

Nombres complexes

Tirés du site <http://public.iutenligne.net/>

19 décembre 2012

Exercice 1 – QCM

Questions	Réponses
On considère la fonction f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f(z) = \frac{z-3}{z-1}$	
1. Le nombre $z = 2$ est le seul nombre complexe tel que $ f(z) = 1$.	☐ V ☐ F
2. L'ensemble des nombres complexes z tels que $ f(z) = 1$ est l'ensemble des nombres complexes de partie réelle 2.	☐ V ☐ F
3. L'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs.	☐ V ☐ F
4. L'ensemble des nombres complexes tels que $ f(z) = 3$ est représenté géométriquement par un cercle de centre $\omega = \frac{3}{4}$ et de rayon $r = \frac{3}{4}$.	☐ V ☐ F

Exercice 2 – QCM

Questions	Réponses
Soit le nombre Z défini par : $Z = \frac{2iz-5}{z-2i}$	
1. Z est défini pour tous les points M d'affixe z du plan.	☐ V ☐ F
2. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $ Z = 1$ est la médiatrice de [AB] avec A(0 ; 2) et B $\left(0 ; -\frac{5}{2}\right)$	☐ V ☐ F
3. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $ z = 1$ est la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.	☐ V ☐ F
4. L'ensemble des points M tels que $Z \in \mathbb{R}$ est le cercle de centre $\omega = -\frac{1}{4}i$ et de rayon $\frac{9}{4}$ privé du point $a = 2i$	☐ V ☐ F

Exercice 3 – QCM

Questions	Réponses
1. Le module du nombre complexe $z = 1 + i$ est :	☐ $\sqrt{2}$ ☐ 0 ☐ 2
2. L'argument du nombre complexe $z = 1 + i$ est :	☐ $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ☐ $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ☐ $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$
3. Les racines carrées de $1 + i$ sont :	☐ $z_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2} - i\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$ et $z_2 = -\frac{-\sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$ ☐ $z_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$ ☐ $z_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2} - i\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2} - i\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2}$

Exercice 4 Donner la forme algébrique des nombres suivants :

1. $z_1 = (1 - 2i)(2 + i)$

2. $z_2 = (3 + 3i)^2 - (2 - i)^2$

3. $z_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

4. $z_4 = \frac{1 + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}} + \frac{1 - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{2}}$

Exercice 5 Donner la forme exponentielle des nombres suivants :

1. $z_1 = -1 + i$

2. $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

3. $z_3 = \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2$

4. $z_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$

5. $z_5 = 1 + \cos \theta - i \sin \theta$

6. $z_6 = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\sin \theta - i \cos \theta}$

Exercice 6 Soit le nombre complexe $z = \frac{1 + i}{1 + i\sqrt{3}}$.

1. Écrire z sous la forme algébrique.
2. Écrire z sous la forme trigonométrique.
3. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 7 Exprimer $\cos(6x)$ et $\sin(6x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, puis uniquement en fonction de $\cos x$.

Indication : utilisez le triangle de Pascal.

Exercice 8 Linéariser : $8 \sin^4(x) + 4 \sin^2(x) \cos^2(x) - \sin(x)$

Exercice 9 Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $z\bar{z} + 3z + 3\bar{z} - 7 = 0$.

Exercice 10 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = \frac{z+1}{z+3i}$:

1. soit un réel
2. soit un imaginaire pur
3. ait un argument égal à $\frac{\pi}{2}$

Exercice 11 Soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

On définit alors les deux sommes :

$$S_1 = z + z^2 + z^4 \quad ; \quad S_2 = z^3 + z^5 + z^6$$

1. Montrer que S_1 et S_2 sont conjugués.
2. Déterminer le signe de la partie imaginaire de S_1 .
3. Calculer $S_1 S_2$ et $S_1 + S_2$.
4. En déduire S_1 et S_2 .

Exercice 12 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 4 + 3i$
2. $z_2 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$
3. $z_3 = -7 - 24i$

Exercice 13 Soit $z = -1 + i$.

1. Calculer sous forme algébrique les racines carrées de z .
2. Calculer sous forme trigonométrique les racines carrées de z .
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$.

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$$

puis en déduire une factorisation du polynôme $P(z) = z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i$.

Exercice 15 Déterminer les racines 4^e de l'unité sous forme algébrique. Déterminer ensuite les racines 4^e de -4 .

Exercice 16 Racines n^e .

1. Déterminer les racines quatrièmes de $16 - 16i$ et écrire les racines sous forme trigonométrique.
2. Déterminer les racines cinquièmes de i et écrire les racines sous forme trigonométrique.
3. Déterminer les racines quatrièmes de $(1 - i)^3$ et écrire les racines sous forme trigonométrique.
4. Déterminer les racines cubiques de $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$ et écrire les racines sous forme trigonométrique.

Exercice 17 Résoudre l'équation :

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = 0$$

Quelques corrections

Exercice 1 – QCM

Questions	Réponses
1. Le nombre $z = 2$ est le seul nombre complexe tel que $ f(z) = 1$.	☐ V ☒ F
2. L'ensemble des nombres complexes z tels que $ f(z) = 1$ est l'ensemble des nombres complexes de partie réelle 2.	☒ V ☐ F
3. L'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs.	☐ V ☒ F
4. L'ensemble des nombres complexes tels que $ f(z) = 3$ est représenté géométriquement par un cercle de centre $\omega = \frac{3}{4}$ et de rayon $r = \frac{3}{4}$.	☒ V ☐ F

Exercice 2 – QCM

Questions	Réponses
Soit le nombre Z défini par : $Z = \frac{2iz - 5}{z - 2i}$	
1. Z est défini pour tous les points M d'affixe z du plan.	☐ V ☒ F
2. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $ Z = 1$ est la médiatrice de $[AB]$ avec $A(0 ; 2)$ et $B\left(0 ; -\frac{5}{2}\right)$	☒ V ☐ F
3. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $ z = 1$ est la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.	☐ V ☒ F
4. L'ensemble des points M tels que $Z \in \mathbb{R}$ est le cercle de centre $\omega = -\frac{1}{4}i$ et de rayon $\frac{9}{4}$ privé du point $a = 2i$	☒ V ☐ F

Exercice 3 – QCM

Questions	Réponses
1. Le module du nombre complexe $z = 1 + i$ est :	☒ $\sqrt{2}$ ☐ 0 ☐ 2
2. L'argument du nombre complexe $z = 1 + i$ est :	☐ $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ☐ $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ☒ $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$
3. Les racines carrées de $1 + i$ sont :	☐ $z_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2} - i\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$ et $z_2 = -\frac{-\sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$ ☒ $z_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$ ☐ $z_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2} - i\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2} - i\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2}$