

Quelques lois de probabilité

Une *loi de probabilité* est un modèle représentant *au mieux* une distribution de fréquences d'une variable aléatoire.

Parmi ces modèles, nous distinguerons ceux qui sont *discrets* et ceux qui sont *continus*.

Dans ce qui suit, je pose $X = \{x_1, x_2, x_2, \dots, x_n\}$ une variable aléatoire (dans le cas des lois discrètes).

★ La loi uniforme discrète

$X = \{x_1, x_2, x_2, \dots, x_n\}$ avec $P(x_i) = \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel i compris entre 1 et n .

Dans ce cas, je noterai : $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\mathbb{N}}(n)$ (ceci n'est pas une notation conventionnelle).

Exemple. Si l'on dispose d'un dé non pipé que l'on lance une fois, et si l'on note X la variable aléatoire représentant la face du dé obtenue, alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\mathbb{N}}(6)$.

★ La loi binomiale (loi discrète)

X suit une loi binomiale de paramètres n et p quand :

- ▶ Une épreuve est répétée n fois toujours dans les mêmes conditions.
- ▶ Chaque épreuve n'admet que deux issues, notées S et $\bar{S}$.
- ▶ $P(S) = p$ à chaque épreuve.

Alors, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Dans ce cas, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.

On peut alors montrer que :

- ▶ L'espérance de X est : $E(X) = np$.
- ▶ L'écart type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Exemple. Un élève répond à un QCM comportant 20 questions, et ce au hasard. Chaque question comporte 5 choix de réponses. Alors, si X est la variable aléatoire représentant le nombre de bonnes réponses à ce QCM, on peut dire que $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(20; \frac{1}{5}\right)$.

★ La loi de Poisson (loi discrète)

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Dans ce cas, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

On peut alors montrer que :

- ▶ L'espérance de X est : $E(X) = \lambda$.
- ▶ L'écart type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

La loi de Poisson est une bonne approximation de la loi binomiale dès lors que $n > 30$ et $np < 5$, ou dès que $n > 50$ et $p < 0,1$. Dans ces cas, on a : $\lambda = np$.

$$\begin{cases} n > 30, np < 5 \\ \text{ou} \\ n > 50, p < 0,1 \end{cases} \implies \mathcal{B}(n; p) \sim \mathcal{P}(np)$$

★ Loi normale, ou loi de Laplace-Gauss (loi continue)

$$P(X \leq t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Dans ce cas, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, où μ est l'espérance de X et σ son écart type.

Dans la pratique, on effectuera le changement de variable $Y = \sigma X + m$ où Y suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ dont on a une table de valeurs.

Dans la pratique, la loi de Laplace-Gauss $\mathcal{N}(np; np(1-p))$ est une bonne approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ dès que $n \geq 30$ et $0,4 < p < 0,6$.

$$n \geq 30 \text{ et } 0,4 < p < 0,6 \implies \mathcal{B}(n; p) \sim \mathcal{N}(np; np(1-p))$$

★ Loi exponentielle (loi continue)

$$P(X = t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda x} dx.$$

Dans ce cas, on note : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

On peut alors montrer que :

- ▶ L'espérance de X est : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
- ▶ L'écart type de X est : $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Exemple. On retrouve cette loi quand on étudie une durée de vie sans vieillissement (comme, par exemple, la durée de vie d'un composant électronique) ou en radioactivité (loi de désintégration radioactive).