

Développements limités et Algèbre linéaire

Stéphane PASQUET

4 mai 2013

Exercice 1. Soient les fonctions :

$$f(x) = 2e^x(\cos x - \sin x) \quad ; \quad F(x) = 2e^x \cos x \quad ; \quad G(x) = 2e^x(\cos x + \sin x)$$

1. Déterminer le $DL_4(0)$ de $F(x)$.
En déduire l'allure de la courbe représentative de F au voisinage de 0.
2. Calculer $F'(x)$. En déduire le $DL_3(0)$ de $f(x)$.
3. Calculer $G'(x)$. En déduire le $DL_5(0)$ de $G(x)$.

Exercice 2. Donner les développements limités suivants :

1. $DL_2(1)$ de $\ln(2+x)$.
2. $DL_2(2)$ de e^{1+x} .
3. $DL_5(0)$ de $\sin^2(x)$.
4. $DL_4(0)$ de $\frac{\cos(x) - 1}{x^2}$.

Exercice 3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{e^x - 1 - x} \right)$.

Exercice 4. On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$f : (x; y; z) \mapsto (5x - y + z; x - 2y - z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f . Donner alors sa dimension.
3. Calculer $\dim \text{Im}(f)$. En déduire $\text{Im}(f)$.

Exercice 5. On considère l'ensemble E défini par :

$$E = \left\{ \vec{u}(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x = 2a + b \\ y = -a + 2b \end{cases}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Soit f l'application de E dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, f(2a + b; -a + 2b) = (a + b; a - b)$$

2. Montrer que f est une application linéaire.
3. (a) On pose $x = 2a + b$, $y = -a + 2b$, $x' = a + b$ et $y' = a - b$.
Montrer que $x' = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y$ et $y' = -\frac{11}{5}x + \frac{3}{5}y$.
(b) En déduire que f est un isomorphisme.
(c) En déduire $\dim(E)$ et $\ker(f)$.