

Développements limités et Algèbre linéaire (suite)

Stéphane PASQUET

18 mai 2013

Exercice 1.

1. Montrer que le $DL_2(0)$ de $f(x) = \ln(3 - x + x^2)$ est : $f(x) = \ln 3 - \frac{1}{3}x + \frac{5}{18}x^2 + o(x^2)$.
2. (a) Montrer que le $DL_4(0)$ de $g(x) = \ln(\cos x)$ est : $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$.
(b) Calculer $g'(x)$ puis en déduire le $DL_3(0)$ de $\tan x$.
3. (a) Montrer que le $DL_3(0)$ de $h(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ est : $g(x) = e + ex + \frac{3e}{2}x^2 + o(x^2)$.
(b) Calculer $h'(x)$ puis en déduire le $DL_1(0)$ de $\frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}}$.

Exercice 2.

1. Donner le $DL_2(0)$ de $\cos x$.
2. Donner le $DL_2(0)$ de e^{x^2} .
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - e^{x^2}}{x^2} \right)$.

Exercice 3. On considère l'application f , définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x; y; z) = (x + y - z; 2x - y + z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(f)$. Que vaut $\dim \ker(f)$? f est-elle injective?
3. Que vaut $\dim \operatorname{Im}(f)$. f est-elle surjective?
4. f est-elle bijective?

Exercice 4. On considère l'ensemble E défini par :

$$E = \{ \vec{u}(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0 \}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.