Fiche d'exercices

Divisibilité & congruences.

Exercice 1 (Équations diophantiennes)

1. Déterminer les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E_1) : 8x - 5y = 2$.

2. Déterminer les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E_2) : 2x^2 + 3y^2 = 16$.

3. On considère l'équation $(F) : 11x^2 - 2y^2 = 5$ où x et y sont deux entiers relatifs.
Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.

Exercice 2 (Écriture en base 10 et critères de divisibilité)

Le système de numération décimale (ou en base 10) est celui usuellement utilisé.
Par exemple, l'écriture du nombre $N = 54\,321$ **en base 10** signifie : $N = 5 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1$.
De façon plus générale, si N est un entier naturel,
l'écriture $N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$, avec $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, signifie :

$$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0.$$

Les entiers naturel a_i s'appellent alors **les chiffres**.

1. Montrer que tout nombre entier est congru à son chiffre des unités modulo 10.

2. Montrer qu'un nombre à cinq chiffres $N = abcde$ est divisible par 3 ssi la somme de ses chiffres est divisible par 3.

3. Montrer qu'un nombre à cinq chiffres $N = abcde$ est divisible par 9 ssi la somme de ses chiffres est divisible par 9.

4. **a)** Déterminer les congruences des puissances de 10 modulo 11.

b) Prouver que $707\,487^{1000}$ est un multiple de 11.

c) Montrer qu'un nombre à cinq chiffres $N = abcde$ est divisible par 11 ssi la somme alternée de ses chiffres $a-b+c-d+e$ est divisible par 11.

Exercice 3 (Points d'un plan à coordonnées dans $\mathbb{N}$)

On considère le plan $\mathscr{P}$ ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.
On se propose de déterminer tous les points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.
Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Montrer que y est impair.

2. Montrer que : $x \equiv 1\ [3]$. On admet que : $z \equiv 3\ [5]$.

3. On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.
Montrer que le point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $p + q + r = 1$.

4. En déduire qu'il existe exactement trois points du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.
Déterminer les coordonnées de ces points.

Exercice 4 (Une suite d'entiers)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.
On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est entier.

1. Démontrer que les termes de la suite (u_n) sont pairs

2. **a)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 1$.

b) Prouver que $u_{2\,022}$ est divisible par 7.

3. **a)** Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (u_n).

b) Sans justification, recopier et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m + 2$ par 5					

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, si u_n est congru à 1 modulo 5, alors u_{n+4} est congru à 1 modulo 5.

d) Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division euclidienne de u_n par 5 soit égal à 4 ?

Exercice 5 (Rep-unit)

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 : $N_p = \underbrace{11\ldots1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre 1}}} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k$.

L'objet de cet exercice est de prouver qu'un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait.

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \mod 10$.

a) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \ldots \ [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \ldots \ [10]$										

b) En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.

c) Conclure que $n^2 \equiv 1 \mod 20$.

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 6 (Carte bancaire)

Un numéro de carte bancaire est de la forme : $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}c$
où $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.
L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

Initialisation : I prend la valeur 0
P prend la valeur 0
R prend la valeur 0
Traitement : Pour k allant de 0 à 7 :
R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9
I prend la valeur $I + R$
Fin Pour
Pour k allant de 1 à 7 :
| P prend la valeur $P + a_{2k}$
Fin Pour
S prend la valeur $I + P + c$
Sortie : Si S est un multiple de 10 alors :
| Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
Sinon :
| Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

a) Compléter le tableau suivant permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

b) Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

c) On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.
Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu $6a35\ 4002\ 9561\ 3411$ reste correct ?

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.
Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

Exercice 7 (Le chiffre de César)

En cryptographie, le chiffrement par décalage, appelé aussi chiffre de César, est une méthode de chiffrement très simple utilisée par Jules César (100 av. J.-C. - 44 av. J.-C.) dans ses correspondances secrètes. Elle consiste à remplacer chaque lettre d'une phrase par une lettre à distance fixe dans l'ordre de l'alphabet. Cette distance fixe s'appelle alors *la clé du codage*.

Par exemple, avec une clé de cryptage égale à 3, le A devient D, le B devient E, etc.

1. Coder le nom OLYMPE avec une clé de cryptage égale à 3.

On veut automatiser cette méthode sur un tableur. Pour cela, on associe à chaque lettre son rang dans l'alphabet, en convenant que le rang de A est 0, celui de B est 1 et ainsi de suite jusqu'au rang de Z qui est 25.

On utilise le code ASCII : dans un tableur, la formule `=CODE("lettre")` permet d'obtenir le code ASCII d'une lettre donnée. Par exemple, `=CODE("C")` affiche 67.

La formule `=CAR(nombre)` donne le caractère correspondant à un code ASCII donné. Par exemple, `=CAR(67)` affiche C. Les lettres majuscules ont un code ASCII compris entre 65 (pour A) et 90 (pour Z).

2. On souhaite coder le message CRYPTAGE DE CESAR à l'aide de la feuille de tableur suivante :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Clé de cryptage :	3							
2	Texte original :	C	R	Y	P	T	A	G	E
3	Rang de la lettre :	2	17						
4	Rang après codage :	5	20						
5	Texte codé :	F	U						

a) Quelles formules doit-on saisir dans les cellules B3, B4 et B5 et copier vers la droite ?

b) Compléter le tableau pour coder le message.

3. On souhaite maintenant décoder le message NGIKHUEXFXLTGLLHENMBHGXLMNGIKHUEXFXFTEIHLX. Pour cela, on réalise la feuille de tableur ci-dessous, où l'on peut modifier en B1 la clé du cryptage.

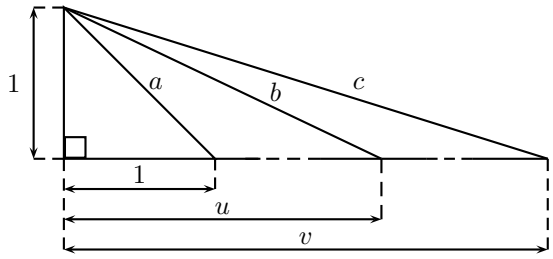
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Clé de cryptage :	3									
2	Texte codé :	N	G	I	K	H	U	E	X	F	X
3	Rang de la lettre codée :	13									
4	Rang de la lettre décodée :	10									
5	Texte décodé :	K									

a) Quelles formules doit-on saisir dans les cellules B3, B4 et B5 et copier vers la droite ?

b) Compléter le tableau pour décoder le message et déterminer la clé du cryptage.

Exercice 8 (Hypoténuses et arithmétique)

On s'intéresse à la figure suivante, dans laquelle a, b et c désignent les longueurs des hypoténuses des trois triangles rectangles en O dessinés ci-contre.



Problème : on cherche les couples de **nombres entiers naturels non nuls** $(u\ ;\ v)$ tels que $ab = c$.

1. ***Modélisation.*** Démontrer que les solutions du problème sont des solutions de l'équation :

$$(E) : \quad v^2 - 2u^2 = 1 \quad (v \text{ et } u \text{ étant des entiers naturels non nuls}).$$

2. ***Recherche systématique de solutions de (E).***
Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche au cours de son exécution tous les couples solutions de l'équation pour lesquels $1 \leqslant u \leqslant 1\,000$ et $1 \leqslant v \leqslant 1\,000$.

```
Pour u allant de 1 à ... faire
    Pour ...
        Si ...
            Afficher u et v
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

Au cours de son exécution, l'algorithme affiche :

2 3
12 17
70 99
408 577

3. ***Analyse des solutions éventuelles de l'équation (E).***
On suppose que le couple $(u\ ;\ v)$ est une solution de l'équation (E).

a) Établir que $u < v$.

b) Démontrer que n et n^2 ont la même parité pour tout entier naturel n.

c) Démontrer que v est un nombre impair.

d) Établir que $2u^2 = (v-1)(v+1)$. En déduire que u est un nombre pair.

Exercice 9 (Chiffrement affine)

Partie A

On considère le programme ci-contre où a et b désignent des entiers naturels, $b \neq 0$.

1. Faire fonctionner ce programme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

2. Que permet de calculer ce programme ?

```
c=0
a=int(input("Saisir un entier naturel a"))
b=int(input("Saisir un entier naturel non nul
    b"))
while a>=b:
    c=c+1
    a=a-b
print(c)
print(a)
```

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, on définit un procédé de codage de la façon suivante :

- **Étape 1 :** on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
- **Étape 2 :** à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
- **Étape 3 :** on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $px + q$ par 26.
- **Étape 4 :** à l'entier y, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Dans cette question, on choisit $p = 25$ et $q = 2$.

a) Démontrer que la lettre V est codée par la lettre H.

b) Modifier le programme de la partie A pour qu'à une valeur de x entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de y, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

c) Déterminer les entiers x compris entre 0 et 25 tels que $f(x) = x$, c-à-d invariants par f. En déduire les caractères invariants dans ce codage.

d) Modifier le programme de la question **1. b)** de sorte qu'il permette de retrouver les entiers invariants par f.

e) Trouver un entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $25a \equiv 1\ (26)$.

f) Démontrer que $y \equiv 25x + 2\ (26)$ équivaut à $x \equiv ay + 2\ (26)$.

g) Décoder la lettre V.

h) On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on ?

2. Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D. Déterminer la valeur de p.

3. Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?

Exercice 10 (Napoléon)

Le tableau de David, *Le sacre de Napoléon*, immortalise l'événement du 2 décembre 1 804 qui proclame Napoléon Bonaparte « Empereur des Français » sous le titre Napoléon 1er .
Sur la période considérée, toutes les années dont le millésime est un multiple de 4 sont bissextiles, excepté 1 900.

1. Montrer qu'il y a 48 années bissextiles entre 1 805 (inclus) et 2 003 (inclus).

2. On considère que le 2 décembre 1 804 est le jour de rang 1. Montrer que le rang du 1er janvier 2 004 est 72 714.

3. Déterminer le plus petit entier naturel a tel que $72\,714 \equiv a\ (7)$.

4. Sachant que le 1er janvier 2 004 était un jeudi, quel jour de la semaine Napoléon 1er a-t-il été sacré empereur ?

Exercice 11 (Factorielles)

Soit n un entier naturel non nul. On note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Par convention, $0! = 1$.

1. L'entier $(n-1)! + 1$ est-il pair ?

2. Prouver que $(15-1)! + 1$ n'est pas divisible par 15.

3. L'entier $(11-1)! + 1$ est-il divisible par 11 ?

4. Quel est le chiffre des unités de la somme $S = 1! + 2! + \cdots + 1000!$?

Exercice 12 (Écriture binaire)

On considère la fonction Python suivante où l'argument N est un entier.

```
1  def chiffres(N):
2      L=[]
3      while N>0:
4          r=int(N%10)
5          L.append(r)
6          N=(N-r)/10
7      return L
```

1. Que renvoie la commande `chiffres(1789)` ?

2. Quel est le rôle de cette fonction ?

On admet que tout entier naturel N peut s'écrire sous la forme :

$$N = a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + a_1 \times 2^1 + a_0,$$

où les nombres a_0, a_1, …, a_n sont des entiers de l'ensemble $\{0 ; 1\}$.

On dit alors que $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^2$ est l'écriture binaire (ou écriture en base 2) du nombre N.

Par exemple, comme $3 = 1 \times 2^1 + 1$, l'écriture binaire de 3 est $\overline{11}^2$ et l'écriture décimale de $\overline{11}^2$ est 3.

3. Quelle est l'écriture décimale de $\overline{100111}^2$?

4. Déterminer les écritures binaires des entiers 23 ; 49 et 512.

5. En s'inspirant de la fonction `chiffres` de la question **1**, proposer une fonction nommée `binaire` dont l'argument est un entier naturel N et qui renvoie une liste d'entiers contenant les chiffres de l'écriture binaire de N.

Exercice 13 (Référence d'un article)

Des articles vendus en ligne ont une référence composée de 6 chiffres et d'une lettre de contrôle. La position de la lettre dans l'alphabet correspond au reste de la division de la référence numérique par 26.

Par exemple, pour la référence numérique 123 456, la lettre est H car $123\,456 \equiv 8 \mod [26]$. La référence complète de l'article est donc 123 456 H.

1. Déterminer la lettre de contrôle d'un article dont la référence numérique est 784 503.

2. On considère la référence ■37 254 H où le premier chiffre a été effacé. On note n ce chiffre manquant.

a) Vérifier que : $n37\,254 = n \times 10^5 + 37\,254$.

b) Montrer que : $4n + 22 \equiv 8 \ (26)$.

c) En déduire le chiffre manquant de la référence.

Exercice 14 (Codage affine avec séparateur)

On associe à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier compris entre 0 et 25. On note ★ le séparateur entre deux mots ; on lui associe l'entier 26. On a ainsi le tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	★
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

• On effectue ensuite un codage affine en associant à chaque valeur de x obtenue ci-dessus, le reste y de la division euclidienne de $4x + 3$ par 27.

• Le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang y.

1. Déterminer les caractères invariants par ce codage.

2. Démontrer que si $y \equiv 4x + 3 \ (27)$, alors $x \equiv 7y + 6 \ (27)$, x et y étant des entiers naturels compris entre 0 et 26.

3. Prouver que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

4. Proposer une méthode de décodage.

5. Marie veut envoyer à Colin le message suivant : « OU★EST★LA★CLE ». À l'aide d'un tableur, coder ce message.

6. Décoder la réponse de Colin : « PTRRITRT★UT★ZDHUTDC ».

Exercice 15 (Somme de 3 cubes)

Certains nombres entiers peuvent se décomposer comme somme des cubes de trois entiers relatifs.
Par exemple : $10 = 1^3 + 1^3 + 2^3$ ou $20 = 1^3 + (-2)^3 + 3^3$.

1. Recopier et compléter le tableau de congruences suivant :

$n \equiv \ldots \ (9)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^3 \equiv \ldots \ (9)$									

2. Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en somme de 3 cubes.

3. Plus généralement, démontrer que les entiers de la forme $4 + 9k$ ou $5 + 9k$ ($k \in \mathbb{Z}$) ne peuvent pas être décomposés en somme de 3 cubes.

4. Compléter la fonction Python `somme_cubes` ci-contre d'arguments `n` et `max` pour qu'elle renvoie, s'il existe, un triplet de trois entiers x, y et z, chacun compris entre $-$`max` et `max`, tels que `n` $= x^3 + y^3 + z^3$.

5. À l'aide de la fonction précédente, vérifier que les nombres 24 et 53 sont des sommes de trois cubes.

6. Peut-on écrire 78 comme somme de trois cubes ?

```
1  def somme_cubes(n,max):
2      for x in range(.............):
3          for y in range(.............):
4              for z in range(.............):
5                  s=...............
6                  if ......:
7                      return ..........
```

Exercice 16 (Chiffrement de Vigenère)

Le chiffrement de Vigenère utilise une clef qui se présente sous la forme d'un mot ou d'une phrase.
Pour chiffrer un texte avec la clef « ROUGE » :

- on associe à chaque lettre son rang dans l'alphabet, compris entre 0 pour A et 25 pour Z ;
- on chiffre la première lettre du message en additionnant son rang avec le rang de la première lettre de la clef (ici la lettre « R »). Le reste du nombre obtenu dans la division par 26 donne le rang de la lettre codée ;
- de la même façon, on chiffre la 2ème , la 3ème , la 4ème et la 5ème lettre du message en utilisant respectivement les lettres « O », « U », « G » et « E » de la clef ;
- pour chiffrer la 6ème lettre, on utilise à nouveau la 1ère lettre de la clef, pour la 7ème lettre, la 2ème lettre de la clef et ainsi de suite.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Message :	B	O	N	J	O	U	R
2	Rang de la lettre :							
3	Clef :	R	O	U	G	E	R	O
4	Rang de la lettre de la clef :							
5	Rang de la lettre codée :							
6	Message codé :							

1. Recopier et compléter le tableau ci-contre pour chiffrer le mot « BONJOUR ».

2. On donne ci-contre le script d'une fonction Python `rang` dont l'argument `mot` est une chaîne de caractères.

a) Que renvoie l'instruction `rang("ROUGE")` ?

b) Expliquer le rôle de cette fonction.

```
1  def rang(mot):
2      L=[]
3      for lettre in mot:
4          L.append(ord(lettre)-65)
5      return L
```

3. Pour coder un message avec la clef « ROUGE », compléter le script Python de la fonction `codage` ci-contre.

```
1  def codage(message):
2      clef=rang("ROUGE")
3      texte=rang(message)
4      chiffre=""
5      n=len(texte)//len(clef)+1
6      clef=n*clef
7      for i in range(len(texte)):
8          chiffre=chiffre+chr(.........................)
9      return chiffre
```

4. En s'inspirant de la fonction `codage`, écrire une fonction `decodage` avec deux arguments `message` et `clef` permettant de décoder un message chiffré par la méthode de Vigenère.

5. À l'aide de la fonction précédente, décoder la citation d'Einstein chiffrée par la méthode de Vigenère et la clef « JAUNE » :

« WENVRZUCRXNPUFWRTONWMEMQMOFCPYUTYFIWMUGLBJYCID
XNNWBULRVZUYYIBMCRRWEMFSWTVVIWPFHWRMJBVCAHGIB »

Exercice 17 (Code-barres)

Le code-barres EAN-13 (European Article Numbering) est le système de codage le plus utilisé pour identifier un produit. Il est composé de treize chiffres représentés par des barres et lus par un lecteur. Le dernier chiffre d'un code EAN-13 est un chiffre contrôle, ou clé, déterminé à partir des douze chiffres précédents.

Partie A : calcul de la clé

On attribue un rang à chacun des douze premiers chiffres du code-barres :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chiffre	3	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9

La clé K est alors déterminée par l'algorithme ci-contre.

$A \leftarrow$ Somme des chiffres de rang impair
$B \leftarrow$ Somme des chiffres de rang pair
$S \leftarrow A + 3B$
$R \leftarrow$ Reste de la division de S par 10
Si $R = 0$ alors
  $K \leftarrow 0$
sinon
  $K \leftarrow 10 - R$

Vérifier la clé du code-barres précédent.

Partie B : détection d'erreurs

On note C_1, C_2, …, C_{12} les douze premiers chiffres d'un code EAN-13.

1. *Cas où l'erreur porte sur un chiffre de rang impair*
On suppose que le chiffre C_{2k+1} $(0 \leqslant k \leqslant 5)$ a été remplacé par le chiffre α.
Comme dans l'algorithme, on note S la somme associée au bon code et S' celle associée au code erroné, R et R' les restes des divisions respectives de S et S' par 10.

a) Justifier que $S' = S + \alpha - C_{2k+1}$.

b) En déduire que $R = R'$ si et seulement si $\alpha - C_{2k+1} \equiv 0 \ \ (10)$.

c) Montrer alors que l'erreur est détectée par la clé.

2. *Cas où l'erreur porte sur un chiffre de rang pair*
On suppose que le chiffre C_{2k} $(1 \leqslant k \leqslant 6)$ a été remplacé par le chiffre β.

a) Justifier que $S' = S + 3\,(\beta - C_{2k})$.

b) En déduire que $R = R'$ si et seulement si $3\,(\beta - C_{2k}) \equiv 0 \ \ (10)$.

c) L'erreur est-elle à nouveau détectée par la clé ?