

I Divisibilité dans $\mathbb{Z}$



Rappel.

► On note

► On note

Définition 1.

Soient a et b deux entiers relatifs, $b \neq 0$.

On dit que b divise a lorsqu'il existe

On dit aussi que :

ou encore que :

Exemple 1.

►

►

► Deux autres diviseurs de 57 sont :

► Il existe un entier qui est multiple de tout entier n ;

En effet,

Autrement dit,

► Les diviseurs de 6 sont :

► Les diviseurs de 1 sont :

► Il existe deux entiers qui divisent tout entier n ;

En effet, pour tout entier n , on a :

Exemple 2.

1. Montrer que, pour tous entiers relatifs p et q , le nombre $14p^2 - 35q$ est divisible par 7.

.....

.....

.....

2. Déterminer les entiers naturels n tels que 4 divise $n + 13$.

► 4 divise $n + 13$ signifie qu'il existe

.....

► Comme $n \in \mathbb{N}$, on doit avoir :

.....

Finalement, les entiers naturels n tels que 4 divise $n + 13$ sont les entiers de la forme

.....

3. Prouver que pour tout entier n , $6n + 5$ n'est pas divisible par 3.

Raisonnons **par l'absurde**.

Supposons que

Il existerait donc un entier k tel que :

.....

Mais alors, k et n étant entiers,

et la dernière égalité exprime que

.....

Finalement,

.....

Propriété 1.

Soient a et b deux entiers relatifs, $b \neq 0$.

1.
2.

Preuve.

1. Si b divise a , alors

Mais alors, on a aussi :

Comme, c'est donc bien que

2. Si b divise a , alors

Mais alors, on a aussi :

Comme, c'est donc bien que ■

Propriété 2.

Soient a et b deux entiers relatifs, $b \neq 0$.

1.
2.

Preuve.

1. Si b divise a , alors

On a donc :

Comme $a \neq 0$, on a : k

Il suit alors que :

2. Si b divise a et a divise b , alors d'après 1, on a :

.....

et donc :

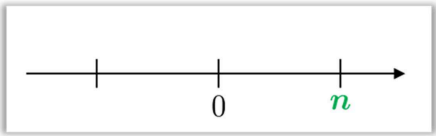
Ainsi, ■

Propriété 3.

Tout entier relatif non nul n possède
.....
L'ensemble de ces diviseurs se note :

Preuve. (dans le cas où n est un entier naturel non nul)

Notons d un diviseur de n
D'après la propriété 2, on a :
.....



Ainsi, dans tous les cas, l'entier d est compris entre
L'entier d (non nul) appartient donc à l'ensemble :
Ainsi, l'entier n possède au plus ■

Exemple 3. Déterminer les entiers relatifs n tels que $4n - 7$ divise 9.

- L'ensemble des diviseurs de 9 est :
- On cherche donc
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exemple 4. Déterminer les couples d’entiers naturels $(a ; b)$ tels que $a^2 - b^2 = 20$.

► Remarquons d’abord que :

Par suite, si le couple $(a ; b)$ est solution, alors :

.....
.....
.....

► L’ensemble des diviseurs positifs de 20 est :

► Comme $a - b$ et $a + b$ appartiennent à

comme leur produit doit valoir 20 et comme, les seules possibilités sont :

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

On vient ainsi de prouver que,

 On a raisonné en utilisant uniquement des *implications*.
Il est nécessaire de vérifier à présent que le couple $(6 ; 4)$ est effectivement solution de l’équation.

► Si

.....

Finalement, l’équation $a^2 - b^2 = 20$ admet un

.....

Propriété 4 (Transitivité).

Soient a , b et c des entiers relatifs, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

.....

.....

Preuve. Si a divise b et b divise c , alors :

-
-

On peut alors écrire :

Comme k et k' sont des entiers,

et c apparaît comme un

Autrement dit, ■

Exemple 5.

►

► Prouver que 1 001 ne possède aucun diviseur pair.

Raisonnons par l'absurde en supposant

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété 5 (Divisibilité & combinaison linéaire).

Soient a , b et c des entiers relatifs, avec $a \neq 0$.

.....

►

► En particulier,

Preuve. Si a divise b et a divise c , alors :

.....

.....

► Soient m et n deux entiers. Considérons la combinaison linéaire

On peut écrire :

c-à-d :

Comme m , k , n et k' sont des entiers,

.....

► On retrouve les deux cas particuliers en prenant ■

Exemple 6. Prouver que si un entier d divise deux entiers consécutifs, alors $d = 1$ ou $d = -1$.

Notons les deux entiers consécutifs que divise d .

Comme

d'après la propriété 5, on a :

.....

.....

Exemple 7. On pose : $a = n + 7$ et $b = 3n + 32$. Déterminer les entiers relatifs n tels que a divise b .

**Méthode.** Dans ce genre de question classique, l'idée consiste à trouver **une combinaison linéaire** de a et b **indépendante** de n .

- On remarque que :
- Si a divise b , alors
.....
.....

La liste des diviseurs de -11 étant :, on en déduit que :
.....

c-à-d :

c-à-d :

 On a raisonné en utilisant uniquement des *implications*. Il est nécessaire de vérifier à présent que pour chaque valeur de n trouvée, a divise effectivement b .

$n =$				
$a = n + 7 =$				
$b = 3n + 32 =$				
a divise b ?				

Ainsi, les solutions sont

II Division euclidienne

Définition et propriété 6.

Soient a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$.

- Il existe

.....

►

 Remarques.

1. Dans la division euclidienne d'un entier a par 7 ,

.....

Plus généralement, dans la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b non nul,

.....

2. Soient a et b deux entiers naturels, $b \neq 0$.

.....

.....

Exemple 8. La division euclidienne de 283 par 25 s'écrit :

.....

.....

.....

 Attention, il existe plusieurs écritures de la forme :

Par exemple :

{

.....

.....

.....

Mais dans ces écritures,

.....

.....

.....

Exemple 9. Soit n un entier naturel.
Déterminer, selon les valeurs de n , le quotient et le reste de la division euclidienne de $7n + 5$ par $3n + 1$.



Méthode. On commence par chercher une écriture de la forme :

.....

Pour tout entier naturel n , on a :

► Cette écriture correspond à la division euclidienne de $7n + 5$ par $3n + 1$ ssi

.....

.....

Ainsi,

► Pour finir, on traite les cas particuliers

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple 10. Soit n un entier naturel ($n \geq 2$).

1. Vérifier que : $(4n - 3)^2 = 8(2n^2 - 3n) + 9$.

2. Cette écriture traduit-elle l'écriture de la division euclidienne de $(4n - 3)^2$ par 8 ? Préciser le quotient et le reste.

► On peut alors la transformer : $(4n - 3)^2 = 8(2n^2 - 3n) +$

c-à-d :

Comme, cette dernière écriture correspond à

Le quotient est donc et le reste est

3. Déterminer les entiers naturels $n \geq 2$ pour lesquels l'écriture du 1. est celle de la division euclidienne de $(4n - 3)^2$ par $(2n^2 - 3n)$.

Or, le discriminant

et son tableau de signe est donné par :

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 9$		

Les entiers recherchés sont donc

Exemple 11. Prouver que pour tout entier naturel n , $n^2 + 1$ n'est pas divisible par 3.



Méthode.

Dans la division euclidienne d'un entier naturel n par 3, les restes possibles sont :

Par suite, étant donné un entier naturel n , n s'écrit nécessairement sous l'une des formes suivantes :

.....

On procède alors par **disjonction de cas**, en vérifiant que dans chaque cas, $n^2 + 1$ n'est pas divisible par 3.

Soit n un entier naturel. Dans la division euclidienne

les restes possibles sont :

n s'écrit nécessairement sous l'une des forme suivantes :

► Si

Comme

.....

► Si

.....

Comme

.....

► Si

.....

Comme

.....

Finalement dans tous les cas,

.....

.....

Exemple 12. Soit n un entier naturel. Montrer que $n^2 - 1$ est divisible par 8 ssi n est impair.



Remarque.

Dans la division euclidienne d'un entier naturel n par 2, les restes possibles sont :

Par suite, étant donné un entier naturel n , n s'écrit nécessairement sous l'une des formes suivantes :



.....



.....

Soit n un entier naturel.

► Si

alors :

Supposons

.....

.....

.....

.....

.....

Ainsi, si n est pair,

► Si

alors :

.....

.....

.....

.....

.....

Ainsi, si n est impair,

Par conséquent,

III Congruences dans $\mathbb{Z}$

Définition 2.

Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

- ▶ On dit que
-
- ▶ Dans ce cas, on écrit alors :

Exemple 13. ▶

▶

i *Remarque.* Reprenons l'exemple précédent :

- ▶ et on a aussi :
- ▶ et on a aussi :
- ▶ Plus généralement,

.....

.....

C'est pourquoi, on dit aussi que :

On dit que la congruence est

Exemple 14.

1. Déterminer les entiers relatifs x tels que $x \equiv 8 \pmod{5}$.

Par définition,

.....

.....

Les entiers x tels que $x \equiv 8 \pmod{5}$ sont donc les entiers s'écrivant sous la forme

2. Donner les trois premiers entiers naturels solutions de l'équation précédente.

On cherche les trois premières solutions

Or,

Ainsi, les trois premiers entiers naturels solutions sont :

.....

Propriété 7.

Soient a , b et c des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

1.
2.
3.
4.
-

Preuve du 1.

1. ► **Sens direct** : Supposons que $a \equiv b \pmod{n}$, c-à-d :

• La division euclidienne de a par n s'écrit :

• La division euclidienne de b par n s'écrit :

On a alors :

Comme

alors

Or, $\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$

En additionnant membre à membre, on obtient :

Le seul multiple de n dans

il suit :

► **Réciproque** : Supposons que a et b aient le même reste r dans la division euclidienne par n .

On peut alors écrire ces divisions : $\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$

Il suit que :

C'est donc que ■

**Remarque.** Soit n un entier naturel non nul. Soit a un entier relatif quelconque. D'après le 4. de la propriété 7, on a :

.....

.....

Ainsi, modulo n , tout entier a est

.....

L'entier r s'appelle

Exemple 15.

- $25 \equiv (7)$ car

.....

► $-17 \equiv (4)$ car

.....

► $29 \equiv (6)$ car

.....

► $-56 \equiv (8)$ car

Exemple 16.

1. Déterminer les entiers x tels que $x \equiv -88 (3)$.

.....

► On a :

.....

► On a alors :

.....

.....

.....

Les entiers x tels que $x \equiv -88 (3)$ sont donc les entiers s'écrivant sous la forme :

2. Les entiers impairs sont les entiers solutions de l'équation :

3. Les entiers dont le reste dans la division par 13 est 10 sont les entiers solutions de l'équation :

 Par la transitivité de la relation de congruence, on va commencer par « simplifier » l'équation. ...

Propriété 8 (Congruences et opérations).

Soient a , b , a' et b' des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

1.
.....
2.
.....
3.
.....

 On dit que l'addition, la multiplication et la puissance sont
.....

Preuve du 1.

1. Si $a \equiv b \ (n)$ et $a' \equiv b' \ (n)$, alors :
- il existe

• il existe
- On a donc :
.....

k et k' étant des entiers, et donc,
.....

Par suite, on a bien : ■

 **Remarque.** La division
.....
En effet, par exemple :
.....

Exemple 17.

1. Déterminer les entiers x tels que $x - 7 \equiv 11 \pmod{5}$.



On utilise le 2. de la propriété 8 selon lequel on peut :

- aux 2 membres d’une congruence ;
- les 2 membres d’une congruence.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Les entiers x tels que $x - 7 \equiv 11 \pmod{5}$ sont donc les entiers s’écrivant sous la forme :

2. Déterminer les entiers x tels que $3x \equiv 4 \pmod{7}$.



Méthode. On réalise un **tableau de congruences** affichant :

-
-

► Les restes possibles dans la division euclidienne par 7 sont

.....

.....

► On procède alors

On en déduit que :

Les solutions sont donc les entiers x s’écrivant sous la forme :

Exemple 18. Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $a = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

► Transformons l'écriture de a :

.....

.....

.....

► Étudions alors a modulo 7 :

-et donc, par compatibilité avec la puissance :
- Puis, par compatibilité avec la multiplication :
- Enfin, par compatibilité avec l'addition :
-

Ainsi,

Exemple 19. Déterminer les entiers relatifs n tels que l'entier $a = n^2 - 3n + 6$ soit divisible par 5.



Méthode. On réalise un **tableau de congruences** affichant :

-
-

► Les restes possibles dans la division euclidienne par 5 sont

.....

.....

► On procède alors

On en déduit que a est divisible par 5 ssi

Les entiers cherchés sont donc les entiers n s'écrivant sous la forme :

Exemple 20.**Méthode.**

- On observe les premières puissances de 4 modulo 7.
- On s'arrête à la première puissance p telle que $4^p \equiv 1 \pmod{7}$.
- On écrit la division de 941 par p pour simplifier 4^{941} modulo 7.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 4^{941} par 7.

►

► La division euclidienne de

.....

► On a alors :

.....

► Comme, il suit :

.....

.....

c-à-d :

Puisque, c'est donc que le reste de la division euclidienne de 4^{941} par 7 est

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 248^{350} par 5.

**Méthode.**

- On commence à simplifier (modulo 5) le nombre sous la puissance.
- On procède ensuite comme à la question 1.

► La division euclidienne de

.....

Ainsi :

►

► La division euclidienne de

.....

► On a alors :

.....

► Comme, il suit :

.....

Ainsi :

Puisque, c'est donc que le reste de la division euclidienne de 248^{350} par 5 est

3. Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturel p , le reste de la division euclidienne de 5^p par 13.

►
.....

► Soit p un entier naturel. La division euclidienne de
.....

Procédons alors

• Si

Comme
.....

Puisque, c'est donc que le reste de la division euclidienne de 5^p par 13 est

• Si

Comme
.....

Puisque, c'est donc que le reste de la division euclidienne de 5^p par 13 est

• Si

Comme
.....

Puisque, c'est donc que le reste de la division euclidienne de 5^p par 13 est

• Si

Comme
.....

Puisque, c'est donc que le reste de la division euclidienne de 5^p par 13 est

Bilan :

Si $p \equiv \dots$ (4)				
Reste de la division de 5^p par 13				