I PGCD de deux entiers

I.1 Définitions et premières propriétés

Définition et propriété 1.

Soit n un entier naturel.

On note .....

- Si $n = 0$, alors .....
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors .....

.....

Exemple 1.

1. Déterminer $\mathscr{D}(60)$.

Pour cela, on liste les diviseurs de 60 .....

.....

.....

2. Déterminer $\mathscr{D}(100)$.

Pour cela, on liste les diviseurs de 60 .....

.....

.....

Définition et propriété 2.

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux entiers naturels non tous nuls.

On note .....

- $\mathscr{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ contient .....
- $\mathscr{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) =$ .....
- $\mathscr{D}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}) =$ .....

Exemple 2. Déterminer $\mathscr{D}(60, 100)$.

On a : .....

En reprenant les résultats de l'exemple 1, il suit : .....

Dans cet exemple, il apparaît que .....

.....

La définition suivante généralise cette notation.

Définition 1.

Soient a et b deux entiers naturels non tous nuls.

- L'ensemble $\mathscr{D}(a\,,b)$ est .....
- L'ensemble $\mathscr{D}(a\,,b)$ possède donc .....

.....

- Cet entier, plus grand commun diviseur de a et b, s'appelle .....

Remarque. On peut étendre cette définition aux .....

Ainsi, PGCD$(-60\,,100)$ désigne le .....Or,

➥ les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de -60 sont : .....

.....

➥ les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 100 sont : .....

.....

Il apparaît que : PGCD$(-60\,,100) =$ .....

Plus généralement, pour tous entiers **relatifs** a et b (non tous nuls), PGCD$(a\,,b) =$ .....

Propriété 3.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

1. ..... **2.** ..... **3.** b divise a ssi .....

Preuve. **1.** On a : $\mathscr{D}(a\,,0) =$ .....

Ainsi, PGCD$(a\,,0)$ est le .....

2. On a : $\mathscr{D}(a\,,1) =$ .....

Ainsi, PGCD$(a\,,1)$ est le .....

3. ▶ Supposons que b divise a.

- Par définition, PGCD$(a\,,b)$ divise .....On a donc : .....
- D'autre part, b divise a et clairement .....

b est donc un .....Mais alors, par définition, PGCD$(a\,,b)$ b.

Ainsi, on a bien : .....

▶ Réciproquement, supposons que .....

.....■

Exemple 3. Soit n un entier naturel tel que $n > 2$. On pose : $a = 5n + 3$ et $b = n - 2$.

1. Prouver que $\mathscr{D}(a\,,b) = \mathscr{D}(n-2\,,13)$.

► Soit $d \in \mathscr{D}(a\,,b)$.

.....

.....

.....

.....

On vient de prouver que si $d \in \mathscr{D}(a\,,b)$, alors $d \in$ .....

C'est donc que : $\mathscr{D}(a\,,b)$ $\mathscr{D}(n-2\,,13)$.

► Réciproquement, soit $d \in \mathscr{D}(n-2\,,13)$.

.....

.....

.....

.....

On vient de prouver que si $d \in \mathscr{D}(n-2\,,13)$, alors $d \in$ .....

C'est donc que : $\mathscr{D}(n-2\,,13)$ $\mathscr{D}(a\,,b)$.

.....

2. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel $n > 2$ pour laquelle $\text{PGCD}(a\,,b) = 13$.

► Par définition, $\text{PGCD}(a\,,b)$ est .....

Or, d'après **1**, ... Il suit donc que :

$\text{PGCD}(a\,,b)$ est .....

c-à-d : $\text{PGCD}(a\,,b) =$ .....

► On a alors : $\text{PGCD}(a\,,b) = 13 \Leftrightarrow$ .....

$\Leftrightarrow$ ..... $\Leftrightarrow$ .....

$\Leftrightarrow$ ..... $\Leftrightarrow$ .....

Ainsi, la plus petite valeur de n pour laquelle $\text{PGCD}(a\,,b) = 13$ est .....

I.2 Recherche du PGCD : l'algorithme d'Euclide

Propriété 4.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Si r désigne le reste de la division euclidienne de a par b, alors :

► ..... ► et donc : .....

Preuve. La division euclidienne de a par b s'écrit : .....

► Soit $d \in \mathscr{D}(a\,,b)$.

- Alors, en particulier, ...
- Aussi, d divise toute .....

Or, $r =$ .....

On vient de prouver que si $d \in \mathscr{D}(a\,,b)$, alors $d \in$ ..... C'est donc que : $\mathscr{D}(a\,,b)$ $\mathscr{D}(b\,,r)$.

► Réciproquement, soit $d \in \mathscr{D}(b\,,r)$.

- Alors, en particulier, ...
- Aussi, d divise toute .....

Or, $a =$ .....

On vient de prouver que si $d \in \mathscr{D}(b\,,r)$, alors $d \in$ ..... C'est donc que : $\mathscr{D}(b\,,r)$ $\mathscr{D}(a\,,b)$.

Les deux inclusions précédentes permettent alors de conclure que : .....

Or, par définition : $\begin{cases} \text{PGCD}(a\,,b) \text{ est } ..... \\ \text{PGCD}(b\,,r) \text{ est } ..... \end{cases}$

Comme ..... ■

Exemple 4. Calculer le PGCD de 252 et 360.

► La division euclidienne de .....

D'après la propriété 4, ...

► La division euclidienne de .....

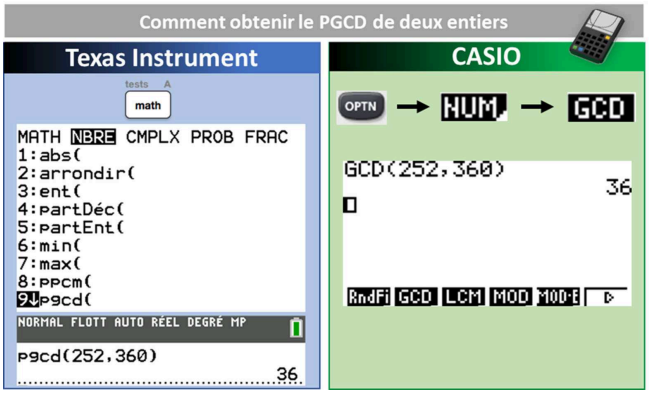
D'après la propriété 4, ...

► La division euclidienne de .....

D'après la propriété 4, ...

.....

On peut vérifier le résultat avec la calculatrice :



La méthode employée dans l'exemple 4 pour déterminer PGCD(252 , 360) peut être généralisée à tout calcul de PGCD. Elle repose sur la propriété 4 et s'appelle .....

.....

Théorème 5.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

► Si b divise a, alors : .....

► Si b ne divise pas a, alors partons de la division euclidienne de a par b puis écrivons les divisions euclidiennes successives .....

	Action	Division	Reste	Commentaire
1.	On divise a par b			
2.	Si $r_1 \neq 0$, on divise b par r_1			
3.	Si $r_2 \neq 0$, on divise r_1 par r_2			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Alors, la suite de ces divisions finit par s'arrêter, c-à-d à une certaine étape N, on obtient .....

PGCD(a , b) est alors .....

.....

Preuve. La suite (r_n) des restes obtenus est une suite d'**entiers** .....

Il existe donc nécessairement un rang N tel que : .....

Complétons alors les deux dernières étapes du tableau, c-à-d les étapes de rangs .....

	Action	Division	Reste	Commentaire
1.	On divise a par b	$a = b\,q_1 + r_1$	$0 < r_1 < b$	$\text{PGCD}(a\,,b) = \text{PGCD}(b\,,r_1)$
2.	$r_1 \neq 0$ et on divise b par r_1	$b = r_1\,q_2 + r_2$	$0 \leqslant r_2 < r_1$	$= \text{PGCD}(r_1\,,r_2)$
3.	$r_2 \neq 0$ et on divise r_1 par r_2	$r_1 = r_2\,q_2 + r_3$	$0 \leqslant r_3 < r_2$	$= \text{PGCD}(r_2\,,r_3)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$N-1$.	...	...		
N.	$r_{N-1} \neq 0$ et on divise r_{N-2} par r_{N-1}		$r_N = 0$	

.....

..... ■

Exemple 5 (PGCD et algorithme).

1. Compléter l'algorithme et les programmes suivants de sorte qu'ils renvoient le PGCD de deux entiers non nuls.

Entrer .....

Tant que .....

  Affecter à .... la valeur .....

  .....

  .....

Fin Tant que

.....

La division euclidienne de a par b s'écrit : $a = b \times q + r$, avec $0 \leqslant r < b$.

On a donc : $\frac{a}{b} =$ .....

Ainsi, $\leqslant \frac{a}{b} <$

et l'entier q est alors la .....

Il suit donc que : $r =$ .....

Texas Instrument

```
PROGRAM:EUCLIDE
:Prompt A
:Prompt B
:While B≠0
:A-B*partEnt(A/B)→R
:B→A
:R→B
:End
:Disp "PGCD=",A
```

```
prgmEUCLIDE
A=?7458
B=?3582
PGCD=
                    6
                 Fait
```

CASIO

```
======EUCLIDE ======
"A="?→A
"B="?→B
While B≠0
A-B×Int (A÷B)→R
B→A
R→B
WhileEnd
"PGCD=":A
```

```
A=?
7458
B=?
3582
PGCD=
                    6
              - Disp -
```

Python

```
1 def PGCD(a,b):
2     while b!=0:
3         r=a-b*int(a/b)
4         a=b
5         b=r
6     return a
```

```
>>> PGCD(7458,3582)
6
>>>
```

2. La feuille de calcul suivante réalisé avec un tableur permet d'obtenir le PGCD des deux entiers saisis en A2 et B2.

► Formule à saisir en A3 : ☐

► Formule à saisir en B3 : ☐

► On sélectionne les cellules A3 et B3 que l'on étire vers le bas jusqu'à obtenir un 0 dans la colonne B (reste nul).

► Le PGCD des entiers saisis en A2 et B2 est alors la valeur située au-dessus de ce 0 dans la colonne B.

	A	B
1	a	b
2	7458	3582
3	3582	294
4	294	54
5	54	24
6	24	6
7	6	0
8	0	#DIV/0!

Théorème 6 (Conséquences de l'algorithme d'Euclide).

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

1. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est .....

   Autrement dit, si un entier d divise a et b, alors .....

2. Pour tout entier naturel k non nul, ...

Exemple 6.

1. Déterminer le PGCD de 420 et 660.

On peut ici remarquer que :

- $420 =$ .....
- $660 =$ .....

D'après le théorème 6, il suit : $\text{PGCD}(420\,,660) =$ .....

Or, clairement : .....

Ainsi, ...

2. Déterminer les diviseurs positifs communs à 168 et 204.

D'après le théorème 6, l'ensemble des diviseurs communs à 168 et 204 est .....

.....

► Déterminons alors .....

.....

.....

.....

.....

► L'ensemble des diviseurs communs à 168 et 204 est donc .....

.....

3. Lorsqu'on divise 2 897 et 3 505 par un même entier naturel n non nul, on obtient respectivement pour restes 13 et 5. Quelles sont les valeurs de n possibles ?

► Par hypothèse,

- la division de 2 897 par n s'écrit : .....
- la division de 3 505 par n s'écrit : .....

► On a donc : .....

Autrement dit, l'entier n cherché est un .....

► D'après le théorème 6, les .....

.....

À l'aide de la calculatrice, on obtient : .....

► Il suit alors que n est un .....

Comme .....

les seules valeurs de n possibles sont : .....

► Vérifions alors si chacune de ces deux valeurs convient. À l'aide de la calculatrice, on obtient :

.....

.....

.....

I.3 Nombres premiers entre eux

Définition 2.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On dit que .....

Exemple 7.

1. Les nombres 42 et 95 sont-ils premiers entre eux ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ainsi, ...

.....

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, n et $n+1$ sont premiers entre eux.

► *1ère façon : par l'algorithme d'Euclide*

.....

.....

.....

.....

► *2ème façon : par la définition du PGCD*

Soit d un .....

On sait alors que d divise .....

En particulier, ...

Par suite, ...

Par définition, on a donc : .....

.....

Théorème 7 (Caractérisation 1 du PGCD).

Soient a, b et d trois entiers naturels non nuls.

d est le PGCD de a et b ssi .....

.....

Preuve.

⇒) ***Sens direct :*** Si d est le PGCD de a et b,

- alors .....

.....

.....

- Par multiplicativité du PGCD (théorème 6), on a :

.....

Comme ....., il suit : .....

⇐) ***Réciproque :*** Si $a = d\,a'$; $b = d\,b'$ et $\text{PGCD}(a', b') = 1$,

alors, ...

..... ■

Exemple 8.

1. Déterminer les entiers naturels a tels que : $a < 320$ et $\text{PGCD}(a, 320) = 20$.

▶ D'après le théorème 7, $\text{PGCD}(a, 320) = 20$ ssi il existe .....

.....

▶ Ainsi, $\text{PGCD}(a, 320) = 20$ ssi il existe un entier a' tel que :

.....

▶ De plus, ...

▶ Par conséquent : $\begin{cases} a < 320 \\ \text{PGCD}(a, 320) = 20 \end{cases}$ ssi .....

Les valeurs de a' qui conviennent sont : .....

Ainsi, les entiers naturels a cherchés sont : .....

2. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ avec $a < b$ tels que : $\begin{cases} ab = 3\,468 \\ \text{PGCD}(a\,,b) = 17 \end{cases}$.

▶ D'après le théorème 7, $\text{PGCD}(a\,,b) = 17$ ssi .....

.....

▶ De plus, ...

▶ Par conséquent : $\begin{cases} ab = 3\,468 \\ \text{PGCD}(a\,,b) = 17 \\ a < b \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

Comme .....

.....

Ainsi, les couples $(a\,;\,b)$ solutions sont : .....

3. Prouver que pour tout entier naturel n non nul, le PGCD de $2n^2$ et de $n(2n+1)$ est n.

▶ On remarque que :

.....

▶ Par .....

.....

▶ Or, ...

D'après le résultat prouvé à l'exemple 7 (**2.**), on sait que : .....

c-à-d : .....

Par suite, on a bien : .....

II Le théorème de Bézout

Théorème 8 (Théorème de Bézout)**.**

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

a et b sont **premiers entre eux** ssi .....

.....

Exemple 9.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a = 5n + 3$ et $b = 7n + 4$ sont premiers entre eux.

Méthode. Dans ce genre de question classique, l'idée consiste à trouver **une combinaison linéaire** de a et b **qui est égale à 1**.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ...

.....

2. Prouver d'une $3^{\text{ème}}$ façon le résultat de l'exemple 7 (**2.**), c-à-d : pour tout $n \in \mathbb{N}$, n et $n+1$ sont premiers entre eux.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ...

.....

3. Soient a, b et c trois entiers non nuls. Montrer que si a est premier avec b et c, alors a est premier avec bc.

▶ a et b étant premiers entre eux, selon le théorème de Bézout,

.....

▶ a et c étant premiers entre eux, selon le théorème de Bézout,

.....

▶ .....

.....

.....

.....

On obtient une .....

.....

4. Soient a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Démontrer que $a+b$ et b sont premiers entre eux.

► a et b étant premiers entre eux, ...

.....

► Or, ...

Il suit donc que : .....

On obtient une .....

.....

Exemple 10. On considère l'équation $(E) : 17\,u + 15\,v = 1$ où $(u\,;\,v)$ est un couple d'entiers relatifs.

1. Justifier que l'équation (E) admet des solutions.

► On a : .....

Ainsi, ... Autrement dit, ...

► Selon le théorème de Bézout, ...

.....

Ainsi, ...

Remarque. Soient a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

Le théorème de Bézout assure de **l'existence** des entiers u et v tels que $a\,u + b\,v = 1$.

Mais .....

C'est par .....

.....

2. Déterminer un couple d'entiers $(u\,;\,v)$ solution de (E).

On applique l'algorithme d'Euclide :

Divisions euclidiennes	On isole les restes	Expression en fonction de 17 et 15

.....

Corollaire 9 (du théorème de Bézout : caractérisation 2 du PGCD).

Soient a, b et d trois entiers naturels non nuls.

$\text{PGCD}(a\,,b) = d$ ssi $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

Démonstration au programme.

⇒) ***Sens direct :*** Soient a et b deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

▶ Par définition, ……

▶ De plus, d'après le théorème 7, ……

……

Selon le théorème de Bézout, ……

……

En multipliant par ……

……

c-à-d : ……

c-à-d : ……

⇐) ***Réciproque :*** Supposons que d divise a et b et qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a\,u + b\,v = d$.

▶ d étant un diviseur commun de a et b, par définition du PGCD, on a : ……

▶ D'autre part, il existe u, $v \in \mathbb{Z}$ tels que ……

Autrement dit, ……

Or, comme ……

……

En particulier, ……et donc : ……

Finalement, on a bien …… ■

Remarque. Dans le corollaire précédent, l'hypothèse d divise a et b est **indispensable**.

En effet, on a par exemple : ……

……

Exemple 11. Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls. On note $d = \text{PGCD}(a\,,b)$ et on suppose que c est premier avec b. Prouver que d est le PGCD de ac et b.

D'après le corollaire du théorème de Bézout,

$\boldsymbol{d} = \text{PGCD}(\boldsymbol{ac}\,,\boldsymbol{b})$ ssi $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

▶ Comme .....

Par conséquent, ...

▶ Comme .....

.....

▶ De plus, ...

.....

▶ Multiplions membre à membre les deux égalités précédentes :

.....

.....

.....

On obtient une .....

D'après le .....

Exemple 12 (Équations diophantiennes).

1. L'équation $54\,x - 42\,y = 17$ admet-elle des solutions dans $\mathbb{Z}^2$?

▶ Déterminons .....

.....

.....

.....

▶ Supposons que l'équation $54x - 42y = 17$ .....

.....

.....

.....

.....

.....

Ainsi, ...

.....

Remarques.

- Le raisonnement et la conclusion seraient identiques en remplaçant 17 par tout entier .....

.....

- Une condition **nécessaire** pour que l'équation $\mathbf{54}\,x - \mathbf{42}\,y = c$ (avec $c \in \mathbb{Z}$) admette une solution est donc que :

.....

- Plus généralement, pour que l'équation $\boldsymbol{a}\,x + \boldsymbol{b}\,y = \boldsymbol{c}$ admette une solution, il faut que : .....

.....

2. a) L'équation $54\,x - 42\,y = 18$ admet-elle des solutions dans $\mathbb{Z}^2$?

On a vu que .....

D'après le corollaire 9, ...

.....

ce qui donne, en .....

.....

soit encore : .....

L'équation $54\,x - 42\,y = 18$ admet donc .....

.....

2. b) Déterminer un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers solution de l'équation $54\,x - 42\,y = 18$.

Procédons comme dans l'exemple 10 par .....

Divisions euclidiennes	On isole les restes	Expression en fonction de 54 et 42

Pour obtenir une solution de $\mathbf{54}\,x - \mathbf{42}\,y = 18$, il suffit alors de .....

.....

.....

Ainsi, une solution particulière de l'équation $\mathbf{54}\,x - \mathbf{42}\,y = 18$ est .....

III Le théorème de Gauss

Théorème 10 (Théorème de Gauss)**.**

Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls.

Si .....

Autrement dit, ...

.....

Démonstration au programme. On suppose que a divise bc et que a est **premier avec** b.

▶ Comme .....

▶ a et b étant premiers entre eux, selon le théorème de Bézout, ...

.....

▶ Multiplions les deux membres de l'égalité précédente par .....

.....

.....

.....

.....

Puisque .....

et la dernière égalité traduit alors que ..... ■

Remarque. Dans le théorème de Gauss, l'hypothèse a premier avec b est **essentielle**.

En effet, on a par exemple : .....

.....

Exemple 13.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_1) : 5(x-1) = 7y$.

Analyse des solutions Soit $(x\,;\,y)$ une solution de (E_1).

► On a : .....

Or, ...

Le théorème .....

C'est donc que : .....

► En remplaçant dans l'équation, il suit :

.....

Donc, si $(x\,;\,y)$ est une solution de (E_1), alors .....

Synthèse Réciproquement, il s'agit de vérifier que .....

.....

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ...

Ainsi, ...

Ccl. Les solutions de (E_1) dans $\mathbb{Z}^2$ sont les couples du type .....

Autrement dit, ...

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_2) : 13(x+6) \equiv 0\ (17)$.

Analyse des solutions Soit x une solution de (E_2).

On a : .....

Or, ...

Le théorème .....

C'est donc que : ..... c-à-d : .....

Donc, si x est une solution de (E_2), alors .....

Synthèse Réciproquement, il s'agit de vérifier que .....

.....

pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ...

Ainsi, ...

Ccl. .....

Exemple 14 (Résolution d'une équation diophantienne).

On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 39x + 15y = 27$.

1. Déterminer le PGCD de 39 et 15.

.....

Par définition, on a donc : .....

2. Justifier que (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

On a vu que : .....

D'après le corollaire 9, ...

.....

ce qui donne en .....

.....

soit encore : .....

L'équation $\mathbf{39}\,x + \mathbf{15}\,y = 27$ admet donc .....

.....

3. Pourquoi (E) est-elle simplifiable par PGCD$(39\,,15)$? Que peut-on dire des coefficients de x et y de l'équation (E') obtenue par cette simplification ?

► .....

► De plus, ...

► On peut simplifier (E) en .....

.....

► Selon le théorème 7, les quotients de deux entiers par leur PGCD sont .....

Du coup, la simplification de (E) par PGCD$(\mathbf{39}\,,\mathbf{15})$ conduit à .....

.....

4. a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe deux entiers u et v tels que $\mathbf{13}\,u + \mathbf{5}\,v = 1$?

.....

.....

4. b) Déterminer deux entiers u et v tels que $13u + 5v = 1$.

On peut utiliser l'algorithme d'Euclide comme dans l'exemple 10, ou bien simplement remarquer ici que :

.....(∗)

Ainsi, ...

4. c) En déduire une solution particulière de (E).

► D'après **3**, on a : $(E) \Leftrightarrow$ .....

► Or, en .....les deux membres de (∗), on obtient :

.....

Ainsi, une solution de .....

5. Soit $(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}^2$, une solution de (E).
5. a) Prouver que : $13(x-18) = -5(y+45)$.

► $(x\,;\,y)$ étant solution de (E), ...

► D'après **4. c)**, on a aussi : .....

En ..... membre à membre ces deux égalités, on obtient :

.....

soit : .....

5. b) Montrer que : $x = 18 + 5k$ et $y = -45 - 13k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

► D'après **5. a)**, on a : .....

C'est donc que ..... Or, ...

Le théorème de Gauss assure alors que .....

.....

.....

► En remplaçant dans .....

.....

.....

.....

Donc, si $(x\,;\,y)$ est une solution de (E), alors .....

6. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

▶ D'après **5**, si $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors .....

▶ Réciproquement, si .....

.....

.....

.....

Finalement, ...

Corollaire 11 (du théorème de Gauss).

Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls.

Si { ..... ; ..... ; ..... } alors .....

Preuve.

▶ Comme .....

▶ Comme .....

▶ Il suit donc que : .....

Cette dernière égalité exprime le fait que : .....

▶ Puisque .....

.....

.....

▶ Finalement, on obtient : .....

Par conséquent, ... ■

Remarque. Dans ce corollaire, l'hypothèse a premier avec b est **essentielle**. En effet, on a par exemple :

- .....
- .....

Exemple 15. Prouver que pour tout entier naturel n, le nombre $A = n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

► *Commençons par prouver que A est divisible par 2 :*

Tout entier n est congru modulo 2 à : ..... On peut alors dresser le tableau de congruences suivant :

$n = ...(2)$		
$n+1 = ...(2)$		
$n+2 = ...(2)$		
$A = ...(2)$		

La dernière ligne de ce tableau fait apparaître que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ...

.....

Remarque. On pouvait aussi se passer d'un tableau de congruences en remarquant que :

➔ .....

➔ .....

➔ .....

et donc, ...

► *Prouvons ensuite que A est divisible par 3 :*

Tout entier n est congru modulo 3 à : ..... On peut alors dresser le tableau de congruences suivant :

$n = ...(3)$			
$n+1 = ...(3)$			
$n+2 = ...(3)$			
$A = ...(3)$			

La dernière ligne de ce tableau fait apparaître que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ...

.....

Remarque. On pouvait aussi se passer d'un tableau de congruences en remarquant que :

➔ .....

➔ .....

➔ .....

► *Conclusion :* On vient de prouver que .....

.....

.....

Exemple 16. On considère le système de congruences $(S) : \begin{cases} n \equiv 2\ (3) \\ n \equiv 1\ (5) \end{cases}$, où n désigne un entier relatif.

1. Vérifier que 11 est une solution de (S).

▶ La division euclidienne de ..... s'écrit : .....Ainsi, on a : .....

▶ La division euclidienne de ..... s'écrit : .....Ainsi, on a : .....

Donc .....

2. Montrer que si n est solution de (S), alors $n - 11$ est divisible par 3.

Soit n une solution de (S).

▶ On a en particulier : .....

▶ Comme on l'a vérifié au **1**, on a aussi : .....

En .....membre à membre les deux congruences précédentes, il vient :

....., autrement dit, ...

3. Résoudre alors le système (S).

▶ Soit n une solution de (S).

- À la question **2**, on a prouvé que .....
- On peut de même montrer que .....

En effet, ...

.....

Comme .....

.....

.....

.....

.....

▶ **Réciproquement**, vérifions si tout entier n de la forme .....est une solution de (S).

- Comme .....

.....

- Comme .....

.....

Ainsi, ...

Finalement, les solutions du système (S) sont .....