Bac blanc blanc

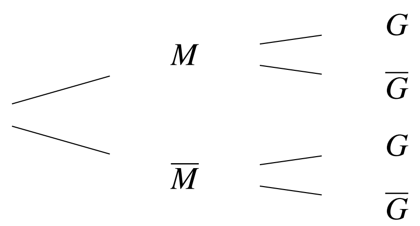
► Exercice 1 — Métropole 2022

Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte. Une étude a montré que 70% des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60% visitent la grotte. Cette étude montre aussi que 6% des clients de l'hôtel ne font aucune visite. On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

- M l'évènement : « le client visite le musée »;
- G l'évènement : « le client visite la grotte ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire de M, $\overline{G}$ l'évènement contraire de G, et pour tout évènement E, on note $p(E)$ la probabilité de E. Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p(M \cap G) = 0.06$

1. (a) **[0.5 points]** Vérifier que $p_{\overline{M}}(\overline{G}) = 0.2$, où $p_{\overline{M}}(\overline{G})$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant qu'il ne visite pas le musée.
   (b) **[0.5 points]** L'arbre pondéré ci-dessous modélise la situation. Compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.

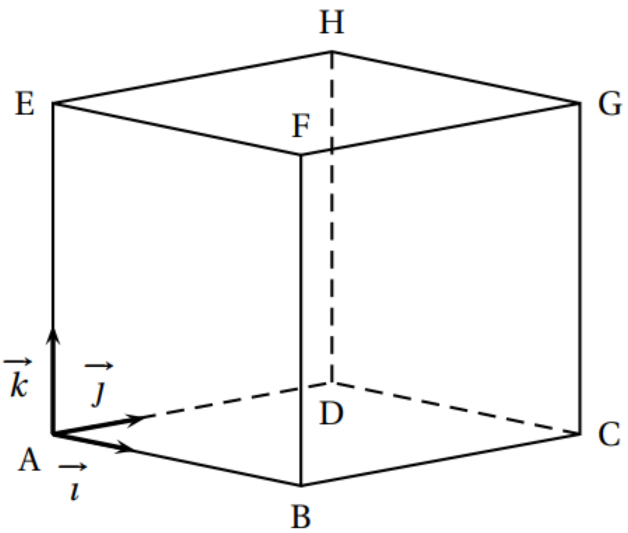


   (c) **[0.5 point]** Quelle est la probabilité de l'évènement « le client visite la grotte mais ne visite pas le musée » ?
   (d) **[0.75 point]** Montrer que $p(G) = 0{,}66$.
2. **[0.5 point]** Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?
3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :
   - visite du musée : 12 euros;
   - visite de la grotte : 5 euros.

   On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.
   (a) **[0.5 point]** Donner, sous la forme d'un tableau, la loi de probabilité de T.
   (b) **[0.5 point]** Calculer l'espérance mathématique de T .
   (c) **[0.5 point]** Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour. Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.
4. **[0.75 point]** Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros. Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ? (On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).

► Exercice 2

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté de longueur 3. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont $B(3\,;0\,;0)$, $D(0\,;3\,;0)$ et $E(0\,;0\,;3)$.



On considère les points $P(0\,;0\,;1)$, $Q(0\,;2\,;3)$ et $R(3\,;1\,;3)$

1. **[0.5 point]** Placer les points P, Q et R sur la figure.
2. **[0.5 point]** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{QR}$.
3. **[0.5 point]** En déduire que les points P, Q et R définissent bien un plan.
4. **[0.5 point]** Justifier que les droites (QR) et (EF) sont sécantes en un point T. Placer ce point T sur la figure précédente.
5. **[0.5 point]** Justifier que les droites (PT) et (BF) sont sécantes en un point I. Placer ce point I sur la figure précédente.
6. **[0.5 point]** En déduire que la droite (BF) est sécante au plan (PQR). Quelle est leur intersection ?
7. On souhaite désormais déterminer les coordonnées du point I.
   (a) **[0.25 point]** Justifier qu'il existe un réel z compris entre 0 et 3 tel que les coordonnées du point I soient $(3\,;0\,;z)$.
   (b) **[0.25 point]** Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{QI}$ en fonction de z.
   (c) **[0.5 point]** Justifier qu'il existe des réels λ et μ tels que $\overrightarrow{QI} = \lambda\overrightarrow{QP} + \mu\overrightarrow{QR}$
   (d) **[1 point]** Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = 1$ puis déterminer les coordonnées du point I.

▶ Exercice 3 — Amérique du Nord 2023

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{11}{u_n}\right)$.

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. **[0.25 point]** Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. **[1 point]** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{11}{x}\right)$.
   Démontrer que la fonction f est croissante sur $[\sqrt{11};+\infty[$.
3. **[1 point]** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$
4. **[0.25 point]** En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. **[0.75 point]** On admet que a vérifie l'équation $f(a) = a$. Préciser la valeur exacte de a.

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée l_n et la longueur L_n.

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $L_n = \dfrac{L_n + l_n}{2}$.

1. (a) **[0.25 point]** Expliquer pourquoi $l_0 = 2.2$.
   (b) **[0.25 point]** Établir que pour tout entier naturel n, $l_n = \dfrac{11}{L_n}$.
2. **[0.25 point]** Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la partie A.
3. **[0.25 point]** Montrer que pour tout entier naturel n, on a $l_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.
4. **[0.25 point]** On admet que les suites (L_n) et (l_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la partie B.
5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```python
def heron(n):
    L = 5
    l = 2.2
    for i in range(n) :
      L = (L + l) / 2
      l = 11 / L
    return round(l,6), round(L,6)
```

   On rappelle que la fonction Python round(x,k) renvoie une version arrondie du nombre x avec k décimales.
   (a) **[0.25 point]** Si l'utilisateur tape heron(3) dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour l et L ?
   (b) **[0.25 point]** Donner une interprétation de ces deux valeurs.

► Exercice 4

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal

1. **[0.5 point]** Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. **[0.5 point]** On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Donner une expression de $f'(x)$ pour tout réel x.
3. **[0.25 point]** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. **[0.5 point]** Donner l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

L'objectif de cette deuxième partie est d'étudier la position relative de la courbe C_f et de la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0. Pour cela, considère la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = 1 - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)\left(1+e^{-x}\right)$$

On admet que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

5. **[0.25 point]** Que vaut $g(0)$?
6. **[0.5 point]** Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = \frac{1}{4}\left(e^{-x} + xe^{-x} - 1\right)$.
7. **[0.5 point]** Montrer que pour tout réel x, $g''(x) = -\frac{1}{4}xe^{-x}$
8. **[0.75 point]** Construire le tableau de variation de g'. On inclura la valeur de son extremum.
9. **[0.25 point]** En déduire que pour tout réel x, $g'(x) \leqslant 0$
10. **[0.5 point]** Quel est le sens de variations de la fonction g ? En déduire que $g(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant 0$.
11. **[0.5 point]** En déduire que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 traverse la courbe C_f en ce point.