

DM2 : Récurrence, dérivation

► Exercice 1 — Nouvelle-Calédonie – 29 Août 2023

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = -\frac{u_n - 4}{u_n + 3}$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. On considère la fonction **terme** ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python

```
1 def terme(n) :  
2     u = ...  
3     for i in range(n) :  
4         u = ...  
5     return u
```

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme(n)` renvoie la valeur de u_n .

3. Soit f la fonction définie sur $] - 3; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] - 3; +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.
5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$.

- (a) Donner v_0
- (b) Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1 + v_n$.
- (c) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel n
- (d) En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{1}{n + 0.5} - 2$$

► Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$.

1. Vérifier que $u_1 = 12$ puis calculer u_2 .
 2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq n + 1$.
 3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - n - 1$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera sa raison et son premier terme.
 4. En déduire une expression de u_n puis de v_n en fonction de n .
-