

DM03 : Suites et dérivation

► Exercice 1

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = e^{16x^3 - 13x^2 - 4x + 1}$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f .
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en 1.

► Exercice 2

Déterminer, si elles existent, les limites des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$.

$$u_n = \frac{n^2 + 2}{e^{-n} - 1}$$

$$v_n = \frac{2n - 3n^3}{2n^3 + n^2 - 4}$$

$$w_n = \frac{n^4 + \frac{1}{n^7}}{n^5 - 1}$$

► Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$$

1. Calculer u_1 .
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x-2}{2x+5}$
 - (a) Déterminer le domaine de définition de f .
 - (b) Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition et montrer que pour tout réel x dans ce domaine,

$$f'(x) = \frac{9}{(2x+5)^2}$$

- (c) Que peut-on en déduire sur les variations de la fonction f ?
3. En remarquant que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et en utilisant le résultat de la question précédente, montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante et minorée par -1 .
 4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{9-8n}{3+8n}$.
 5. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
 6. Déterminer la valeur de n à partir de laquelle on a $u_n \leq -0.99$
-