

DM5 : Bonnes vacances !

► Exercice 1

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5 - 4n^3}{n^2 - 2n^4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{e^n}{1 + e^n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + \sqrt{1 + n^6}}{3n^3 + 2}$$

► Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

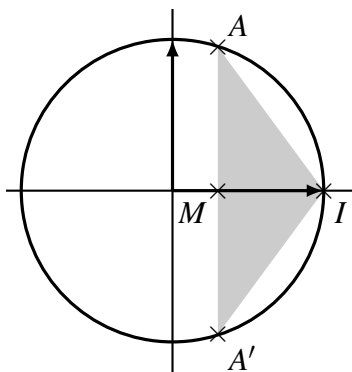
$$u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$$

1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{3}{2}$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$
 - (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
 - (b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .
 - (c) Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

► Exercice 3

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. On considère le cercle C de centre O et de rayon 1. On rappelle qu'une équation cartésienne de ce cercle est $x^2 + y^2 = 1$. On note par ailleurs I le point de coordonnées $(1, 0)$.

Soit $x \in [-1, 1]$. On considère le point M de coordonnées $(x, 0)$. La perpendiculaire à l'axe des abscisses coupe le cercle en deux points A et A' , A étant le point d'ordonnée positive. L'objectif est de déterminer la valeur du réel x pour laquelle l'aire du triangle IAA' est maximale.



1. Montrer que l'aire du triangle IAA' vaut $(1 - x)\sqrt{1 - x^2}$. On pourra utiliser le résultat de cette question pour la suite de l'exercice.
2. On considère désormais la fonction $f : x \mapsto (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$, définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$.
 - (a) Montrer que pour tout réel $x \in] -1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- (b) En déduire les variations de f sur $[-1, 1]$.
- (c) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle IAA' est-elle maximale ? Que vaut alors cette aire ?
- (d) Quelle est alors la nature du triangle IAA' ?