

Devoir surveillé 2

Nom :
Prénom :

► Exercice 1 — 10 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 1}{4u_n + 3}$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

1. Calculer la valeur de u_1 .
2. On considère la fonction **terme** ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python

```
1 def terme(n) :  
2     u = ...  
3     for i in range(n) :  
4         u = ...  
5     return u
```

Compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme(n)` renvoie la valeur de u_n .

On considère l'intervalle $I = \left] -\frac{3}{4}; +\infty \right[$ ainsi que la fonction f définie pour tout réel x dans I par

$$f(x) = \frac{-x - 1}{4x + 3}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur I .
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > -0.5$

On considère alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{u_n + 0.5}$.

5. Calculer v_0 .
 6. Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = 4$.
 7. En déduire une expression de v_n pour tout entier naturel n .
 8. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{0.4 + 4n} - 0.5$.
 9. Quelle est la limite de la suite (u_n) en $+\infty$?
 10. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < -0.499$.
-

► **Exercice 2 — 4 points**

Déterminer les limites en $+\infty$ des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies comme suit pour tout entier naturel non nul n .

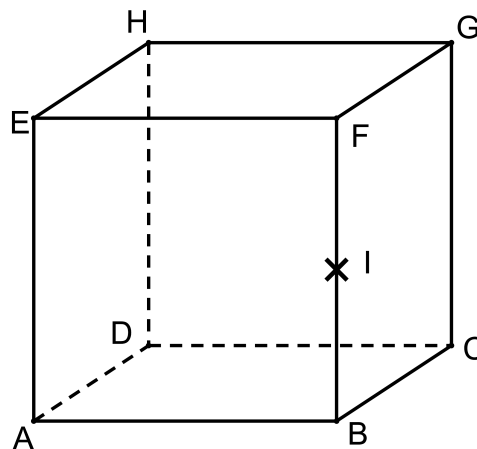
$$u_n = \frac{3n^2 + 2}{1 - n}$$

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+4}}$$

$$w_n = \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{n + e^{-n}}$$

► **Exercice 3 — 4 points**

On considère un cube $ABCDEFGH$ et le point I , milieu de $[BF]$.



1. Donner une droite qui n'est pas coplanaire à la droite (FC) .
2. Exprimer le vecteur $\vec{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AI}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
3. Les vecteurs $\vec{AI}$, $\vec{CD}$ et $\vec{BF}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.
4. Justifier que les droites (EI) et (AB) sont sécantes et tracer leur point d'intersection sur la figure.
5. Construire, en justifiant la construction, l'intersection des plans (EGI) et (ABD) .

► **Exercice 4 — 2 points**

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{2x^2 - 8x + 8}$.

Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera la valeur de f en son extremum.