

# Devoir surveillé 4

## ► Exercice 1

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1+x-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 + \cos(x))e^x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2 + \cos(x))e^x}{x}$$

## ► Exercice 2

On considère la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = e^x - x$ .

1. Construire le tableau de variations de  $g$ .
2. En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $e^x - x > 0$

On considère désormais la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x}$ .

On note  $C_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé.

3. Justifier que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . En déduire les équations des éventuelles asymptotes à  $C_f$ .
5. On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$

6. En déduire le tableau de variations de  $f$ . On inclura dans ce tableau les limites de  $f$  et la valeur exacte de son extremum.
  7. Déterminer l'équation de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse 0.
  8. Tracer, dans un repère orthonormé, l'allure de la courbe  $C_f$  ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.
-

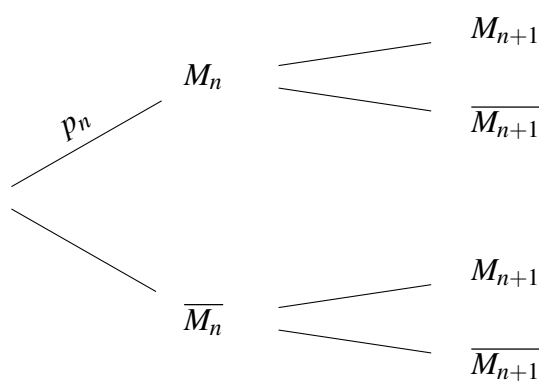
### ► Exercice 3

Outre la machine à café, la photocopieuse est la meilleure amie de tous les professeurs. Malheureusement, celle-ci est capricieuse et n'est pas toujours en état de fonctionner. Un professeur de mathématiques a constaté les faits suivants :

- Si la photocopieuse est en état de fonctionner un jour à 8h30, la probabilité qu'elle fonctionne également le lendemain à la même heure est de 0,6.
- Si la photocopieuse est en panne un jour à 8h30, la probabilité qu'elle soit toujours en panne le lendemain à la même heure est de 0,8.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $M_n$  l'événement « la photocopieuse est en état de fonctionner à 8h30  $n$  jours après la rentrée » et  $p_n$  la probabilité de cet événement. On supposera par ailleurs et par expérience que  $p_0 = 0,7$ .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant qui traduit la situation.



2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$ .
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_n \geq \frac{1}{3}$ .  
(b) Montrer que la suite  $(p_n)$  est décroissante.  
(c) En déduire que la suite  $(p_n)$  est convergente. Quelle est sa limite ?
4. Compléter la fonction **seuil** suivante, écrite en Python, pour que celle-ci renvoie la première valeur de l'entier  $n$  vérifiant  $p_n \leq 0.3334$ .

```
1 def seuil():
2     p = ...
3     n = ...
4     while ...
5         p = ...
6         n = ...
7     return ...
```

5. On se propose de déterminer la limite de la suite  $(p_n)$  d'une autre manière. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = p_n - \frac{1}{3}$ .  
(a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.  
(b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_n = \frac{1}{3} + \frac{11}{30} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$ .  
(c) Retrouver alors la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .
6. Un professeur déclare : « C'est fou, cela fait 5 ans que je suis ici et les trois quarts du temps, cette photocopieuse est en panne ! ». Cette déclaration vous semble-t-elle juste ou excessive ?