# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Lycée Saint-Exupéry – Mantes-la-Jolie
27 janvier 2024
**TMATHS3 et TMATHS4**

# MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

*Ce sujet comporte six pages numérotées de 1 à 6*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*
*Tout autre document ou appareil électronique est interdit.*

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

**Tournez la page S.V.P.**

### ► Exercice 1 — 5 points

On considère la fonction $f$, définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $]-4;+\infty[$ par

$$f(x) = -\frac{2x+9}{x+4}.$$

On admet que la fonction $f$ est dérivable sur son domaine de définition et on note $f'$ sa fonction dérivée.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]-4;+\infty[$.
2. Vérifier que pour tout réel $x \in ]-4;+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{(x+4)^2}$.
3. Quel est le sens de variations de la fonction $f$ sur $]-4;+\infty[$ ?

On considère désormais la suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n) = -\dfrac{2u_n+9}{u_n+4} \end{cases}$$

On admet que la suite $(u_n)$ est ainsi bien définie.

4. Calculer $u_1$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $-3 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
6. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.
7. Justifier que $f(\ell) = \ell$ et déterminer la valeur de $\ell$.
8. On considère le programme suivant, écrit en Python

```python
def seuil(s) :
    u = 5
    n = 0
    while u > s :
        u = - (2 * u + 9) / (u + 4)
        n = n + 1
    return n
```

   L'instruction `seuil(-2.97)` a renvoyé la valeur 34. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

9. On se propose d'utiliser une autre méthode pour déterminer la valeur de cette limite.

   On considère la suite $(a_n)$ définie pour tout entier naturel par $a_n = \dfrac{1}{u_n+3}$

   (a) Montrer que la suite $(a_n)$ est arithmétique de raison 1.
   (b) En déduire une expression de $(a_n)$ puis de $(u_n)$ en fonction de $n$.
   (c) Retrouver ainsi la valeur de $\ell$.

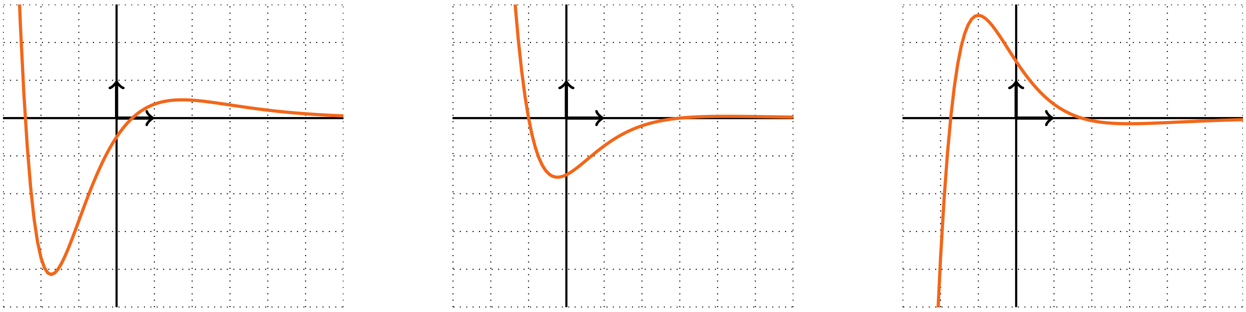
### ► Exercice 2 — 5 points

*Les parties A et B sont indépendantes.*

#### Partie A

On considère une fonction $f$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $f'$ sa dérivée et $f''$ sa dérivée seconde. Les courbes représentatives de $f$, $f'$ et $f''$ sont tracées ci-dessous dans un repère orthogonal.

**Courbe 1** **Courbe 2** **Courbe 3**



Associer, en justifiant la réponse, chaque courbe à l'une des fonctions $f$, $f'$ ou $f''$.

#### Partie B

On considère la fonction $g$ définie pour tout réel $x$ par

$$g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x}.$$

On notera $C_g$ la courbe représentative de la fonction $g$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que la fonction $g$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On notera alors $g'$ sa fonction dérivée et $g''$ sa fonction dérivée seconde.

1. Vérifier que pour tout réel $x$, on a $g'(x) = (3 - x^2)e^{-x}$.
2. Déterminer l'équation de $T$, la tangente à la courbe représentative de $g$ au point d'abscisse 0.

On souhaite désormais déterminer s'il existe des tangentes à la courbe $C_g$ qui soient parallèles à $T$. On rappelle que pour tout réel $x$,

$$g'(x) = (3 - x^2)e^{-x}$$

3. Justifier que les solutions de ce problème correspondent aux solutions de l'équation $g'(x) = 3$.
4. (a) Déterminer la limite de $g'(x)$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de $g'(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
5. (a) Montrer que pour tout réel $x$, on a $g''(x) = (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$.
   (b) Construire le tableau de variations de $g'$.
   On inclura dans ce tableau les limites en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que des valeurs approchées à $10^{-2}$ près des extremums de la fonction $g'$.
6. Montrer que l'équation $g'(x) = 3$ possède exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.
7. On note $\alpha$ la solution strictement négative de cette équation.
   Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

### ► Exercice 3 — 5 points

*Les parties A et B sont indépendantes.*

### Partie A

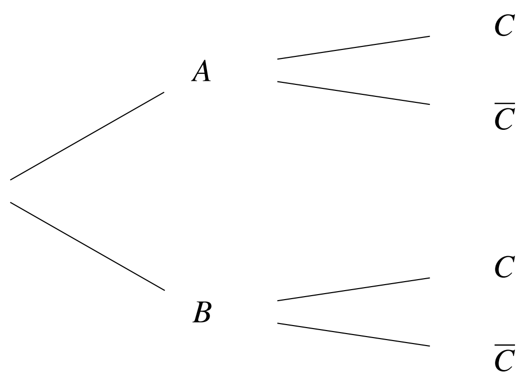
Lassé de son métier, un professeur de mathématiques a décidé de se reconvertir dans la boulangerie. Alice est une cliente régulière de cette boulangerie et vient souvent pour y acheter ses baguettes et son croissant. Le boulanger n'a pas pu s'empêcher de remarquer que le comportement d'Alice était le suivant :

- Dans 60% des cas, Alice achète une baguette lorsqu'elle vient à la boulangerie. Dans le cas contraire, elle en achète deux.
- Si Alice achète une seule baguette, il a 75% de chance qu'elle prenne également un croissant.
- Si Alice achète deux baguettes, elle ne prend un croissant que dans 30% des cas

Alice entre dans la boulangerie. On considère les événements suivants :

- $A$ : « Alice achète une seule baguette » ;
- $B$ : « Alice achète deux baguettes » ;
- $C$ : « Alice achète un croissant ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant qui traduit la situation.




2. Quelle est la probabilité qu'Alice achète deux baguettes et un croissant ?
3. Montrer que $\mathbb{P}(C) = 0{,}57$.
4. Alice sort de la boulangerie. Le boulanger se souvient qu'Alice a pris un croissant mais ne se souvient pas du nombre de baguettes que celle-ci a acheté. Quelle est la probabilité qu'Alice ait acheté deux baguettes ? On donnera une réponse arrondie à $10^{-3}$ près.
5. Le boulanger vend ses baguettes à 1,05 euros et ses croissants à 0,95 euros. On note $X$ la variable aléatoire qui donne le prix payé par Alice lors de sa visite chez le boulanger.
   (a) Recopier et compléter le tableau suivant qui résume la loi de la variable aléatoire $X$.

| $k$ | 1,05 | 2 | 2,10 | 3,05 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = k)$ | 0,15 | | | |

   (b) Calculer l'espérance de $X$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**Partie B**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*
*Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
*Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
*Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est demandée.*

Outre des baguettes croustillantes et de délicieux croissants, le boulanger vend également d'autres produits. On trouve ainsi 10 sortes de pâtisseries différentes, 4 types de cookies, 12 types de boissons ainsi que 15 sandwichs différents.

1. La vitrine du boulanger n'étant pas assez grande pour accueillir tous les types de sandwichs en même temps, le boulanger doit en choisir 8 qu'il pourra exposer et ainsi mettre en avant. L'ordre dans lequel il place les sandwichs dans la vitrine étant important, combien de choix s'offrent au boulanger pour réaliser sa présentation ?

   **A.** 259 459 200 **B.** 40 320 **C.** 16 777 216 **D.** 6 435

2. Une formule est composée d'un sandwich, d'une boisson et d'un dessert, ce-dernier pouvant être une pâtisserie ou un cookie. Combien de formules différentes peut-on ainsi constituer ?

   **A.** 41 **B.** 7 200 **C.** 2 520 **D.** 1 800

3. Un client un peu gourmand souhaite goûter à un échantillon des produits du boulanger. Il compte ainsi commander 3 gâteaux et 2 cookies, tous différents les uns des autres pour varier les plaisirs. Combien de choix s'offrent à lui pour réaliser sa commande ?

   **A.** 720 **B.** 2 002 **C.** 16 000 **D.** 126

4. Face au succès des cookies, notre boulanger-mathématicien décide de lancer un service de cookie personnalisé. Chaque client peut alors choisir une base de cookie (nature ou chocolat) et les ingrédients à mettre dessus. 5 ingrédients sont disponibles et les clients peuvent choisir d'en mettre autant qu'ils veulent sur leur gâteau. Ils peuvent ainsi tout à fait choisir de n'en mettre aucun comme de mettre les 5 en même temps. Combien de recettes de cookies différentes est-il alors possible de créer ?

   **A.** 10 **B.** 240 **C.** 25 **D.** 64

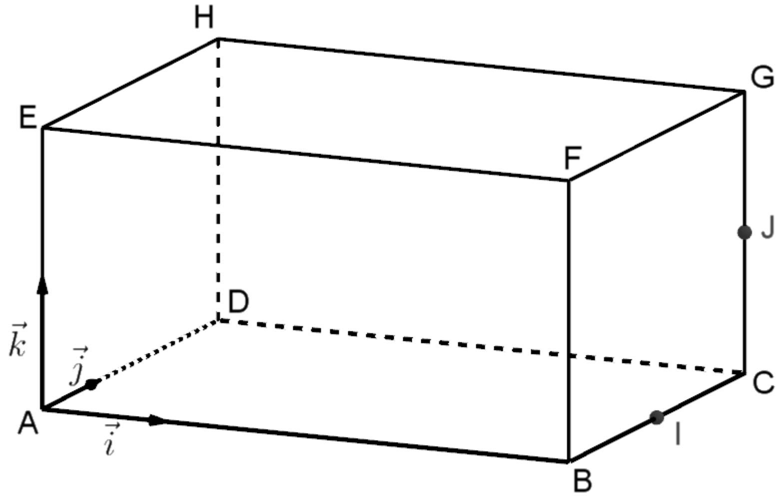
**► Exercice 4**

On considère un pavé droite $ABCDEFGH$ tel que $AB = 4$, $AD = 3$ et $AE = 2$. On note $I$ le milieu du segment $[BC]$ et $J$ le milieu du segment $[CG]$.

On considère les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ définis par $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne ci-dessous les coordonnées de quelques points de la figure dans ce repère.

$A(0\,;0\,;0), B(4\,;0\,;0), C(4\,;2\,;0), G(4\,;3\,;2)$




1. Donner, sans justification, les coordonnées des points $H$ et $F$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. Justifier que le point $I$ a pour coordonnées $\left(4; \frac{3}{2}; 0\right)$ et le point $J$ a pour coordonnées $(4\,;3\,;1)$.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
4. Dans chacun des cas suivants, dire si les droites données sont sécantes, parallèles ou non coplanaires. Aucune justification n'est demandée.
   (a) Les droites $(IJ)$ et $(BG)$ ;
   (b) Les droites $(EJ)$ et $(AC)$ ;
   (c) Les droites $(AI)$ et $(FJ)$.
5. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite $(AJ)$.
   (b) On considère la droite $(\delta)$ de représentation paramétrique

$$(\delta) \quad : \quad \begin{cases} x = 8t \\ y = 3 - 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

   Justifier que la droite $(d)$ n'est autre que la droite $(HI)$.
   (c) Montrer que les droites $(HI)$ et $(AJ)$ sont sécantes en un point $K$ dont on déterminera les coordonnées.
   (d) Montrer que les points $E$, $K$ et $C$ sont alignés.