

Devoir surveillé 6

► Exercice 1

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendantes

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que pour tout réel x ,

$$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{-x}$$

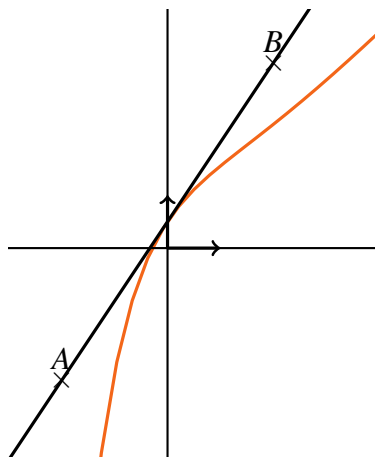
- (b) En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
- (c) Justifier que pour tout réel x , $f'(x) > 0$.
- (d) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
- (e) Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

Partie B

On considère une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que pour tous réels x , $h(x) = (ax + b)e^{-x} + x$.

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

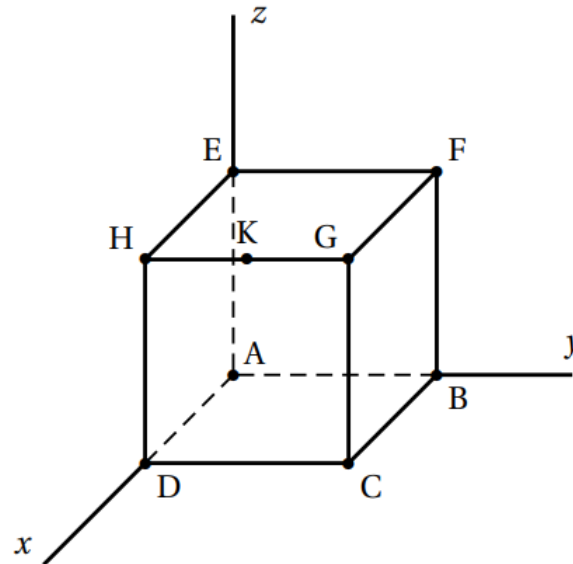
- la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h .
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2; -2,5)$ et $(2; 3,5)$.



1. Déterminer une équation réduite de la droite (AB)
2. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b .

► **Exercice 2**

On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête 1, représenté ci-dessous. On note K le milieu du segment $[HG]$. On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AD}; \vec{AB}; \vec{AE})$.



1. Justifier que les points C , F et K définissent un plan.
2. (a) Donner sans justifier les longueurs KG , GF et GC .
 (b) Calculer l'aire du triangle FGC .
 (c) Calculer le volume du tétraèdre $FGCK$.
 On rappelle que la volume V d'un tétraèdre est donné par

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

3. On note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (CFK) .
 (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est $x + 2y + z - 3 = 0$.
4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK) . Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK)
 (a) Déterminer les coordonnées du point L .
 (b) En déduire que $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$
6. En utilisant la question 2., déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK .