BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Lycée Saint-Exupéry – Mantes-la-Jolie
4 mai 2024
TMATHS3 et TMATHS4

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte cinq pages numérotées de 1 à 5

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Tout autre document ou appareil électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

► Exercice 1 — 5 points

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près si nécessaire.*

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

- M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   (b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'exactement 2 animaux aient un test positif ?
   (c) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
   (d) A partir de combien d'animaux testés est-on sûr à au moins 99% qu'au moins un des animaux aura un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1000 euros. On suppose que le test est gratuit.

   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

   (a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
   (b) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

► **Exercice 2 — 5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On note (D) la droite passant par les points $A(1;-2;-1)$ et $B(3;-5;-2)$.

1. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{array}\right. \quad , t \in \mathbb{R}$$

2. On considère la droite (D') ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2-k \\ y = 1+2k \\ z = k \end{array}\right. \quad , k \in \mathbb{R}$$

   (a) Donner un vecteur directeur de la droite (D').

   (b) Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles.

   (c) Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas sécantes.

   (d) Que peut-on en déduire sur les droites (D) et (D') ?

3. On considère le plan (P) d'équation $4x+y+5z+3=0$.

   (a) Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

   (b) Montrer que le plan (P) et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère alors la droite (Δ) passant par le point C et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la droite (D').

   (b) On considère le point $E(5;-8;-3)$.
   Montrer que le point E appartient aux droites (D) et (Δ).

   (c) En déduire que la droite (Δ) est également perpendiculaire à la droite (D).

► Exercice 3 — 5 points

Soit f et g les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x + \ln(1 + x)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition.

Partie A : étude de fonction

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. (a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{x}{x+1}$
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]-1;+\infty[$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β sur $]-1;+\infty[$, avec α négative et β positive.
   (d) Donner une valeur approchée de β à 10^{-2} près.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1 + \ln(1 + u_n)$

1. Calculer u_1. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
2. Justifier que $1 + \ln(1 + \alpha) = \alpha$ et $1 + \ln(1 + \beta) = \beta$ où α et β sont les réels définis dans la partie précédente.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $\alpha \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

► Exercice 4 — 5 points

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue.

On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t , où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.

On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) \quad : \quad 10y' + y = 30$$

1. Résoudre l'équation homogène associée (H) : $10y' + y = 0$.
2. Déterminer une solution constante de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. On suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle. On a donc $v(0) = 0$. Déterminer une expression de $v(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

Partie B : Étude de la fonction v

On considère la fonction $v : t \mapsto 30 - 30\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)$.

1. Montrer que la fonction v est croissante et concave sur $[0;+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}.
   (a) Compléter le programme suivant, écrit en Python, qui permet de renvoyer la plus petite valeur de t, à la seconde près, à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée. On rappelle que la commande `from math import exp` permet d'utiliser la fonction exponentielle qui s'écrit `exp` en Python.

```python
from math import exp

def v_prime(x) :
    return ...

def seuil() :
    t = 0
    while v_prime(t) ... :
        t = ...
    return t
```

   (b) A l'aide d'une résolution d'inéquation, déterminer la valeur de t recherchée.
4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.
   Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.