

Produit scalaire dans l'espace

u(x,y,z) et v(x',y',z') dans un repère orthonormé.

||u|| = sqrt(x^2 + y^2 + z^2)

u . v = 1/2 (||u + v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2)

u . v = 1/2 (||u||^2 + ||v||^2 - ||u - v||^2)

u . v = ||u|| x ||v|| x cos(u, v)

u . v = xx' + yy' + zz'

Equations dans l'espace

Un plan a une équation cartésienne de la forme ax + by + cz + d = 0, (avec a, b, c non tous nuls)

Le vecteur n(a, b, c) est un vecteur normal au plan.

La droite passant par le point A(a, b, c) et de vecteur directeur u(a, b, c) a pour

représentation paramétrique le système : { x = a + at, y = b + bt, z = c + ct avec t in R

Probabilités

Probabilité de B sachant A : P_A(B) = P(A n B) / P(A)

A et B indépendants : P_A(B)=P(B) ; P_B(A)=P(A) ; P(A n B)=P(A) x P(B).

Suites

- Suite arithmétique : u_n = u_0 + nr, u_{n+1} = u_n + r, 1 + 2 + ... + (n-1) + n = n(n+1)/2
- Suite géométrique : u_n = u_0 x q^n, u_{n+1} = u_n x q, 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n = (1 - q^{n+1}) / (1 - q)
- Limite de q^n: Si -1 < q < 1 alors lim_{n -> +inf} q^n = 0; Si 1 < q alors lim_{n -> +inf} q^n = +inf; Si q = 1 alors lim_{n -> +inf} q^n = 1; Si q <= -1 alors q^n n'a pas de limite.

Limites de fonctions

4 formes indéterminées : 0/0, inf/inf, 0 x inf, inf - inf

Asymptote :

Si lim_{x -> +inf} f(x) = b alors la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en +inf d'équation y = b. (Même chose en -inf).

Si lim_{x -> a} f(x) = +inf, alors la courbe représentative de f admet une asymptote verticale en a d'équation x = a. (Même chose si la limite est -inf).

Fonctions usuelles

Pour tout x réel, ln(e^x) = x

• Fonction exponentielle

La fonction exponentielle est définie et strictement croissante sur R.

Pour tous réels x et y : x <= y si et seulement si e^x <= e^y

e^0 = 1, e^{x+y} = e^x x e^y

1/e^x = e^{-x}, e^{x-y} = e^x / e^y, e^x > 0, e^m = (e^x)^n avec n in N.

Pour tout réel x > 0, e^{ln(x)} = x

• Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est définie et croissante sur]0;+inf[.

Pour tous réels x et y strictement positifs :

ln 1 = 0 ; ln e = 1, ln(xy) = ln x + ln y

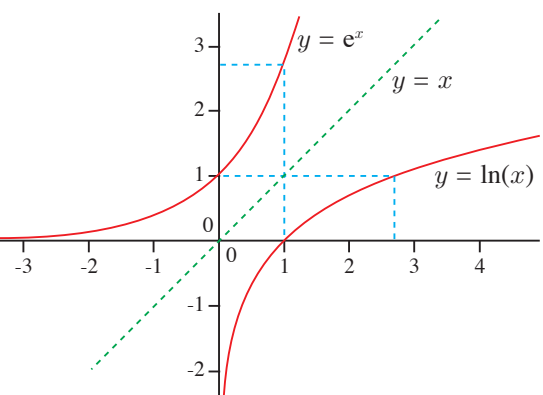
ln(1/x) = -ln x, ln(x/y) = ln x - ln y, ln(sqrt(x)) = 1/2 ln x

ln(x^n) = n ln x avec n in N.

Résolution d'équations : Pour tout réel a > 0 : e^x = a <=> x = ln a

Pour tout réel a : ln x = a <=> x = e^a.

lim_{x -> +inf} e^x = +inf, lim_{x -> +inf} ln x = +inf, lim_{x -> -inf} e^x = 0, lim_{x -> -inf} ln x = -inf, lim_{x -> -inf} xe^x = 0, lim_{x -> +inf} e^x / x = +inf, lim_{x -> +inf} ln(1+x) / x = 1



Dérivées

x in	R	R	R	R - {0}	]0;+inf[	]0;+inf[	R	R	R
f(x) =	k, k in R	x	x^n, n in N*	1/x	sqrt(x)	ln x	e^x	cos x	sin x
f'(x) =	0	1	nx^{n-1}	-1/x^2	1/(2sqrt(x))	1/x	e^x	-sin x	cos x

• Opérations et dérivées

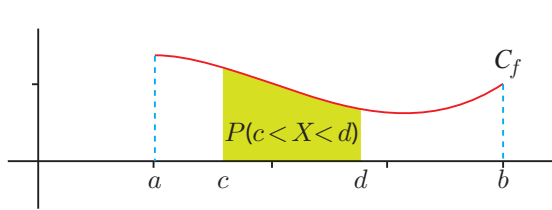
Sur les ensembles où les fonctions u et v sont définies et dérivables : (u+v)' = u' + v', (ku)' = ku', avec k constante, (uv)' = u'v + uv'

(1/v)' = -v'/v^2 lorsque v ne s'annule pas, (u/v)' = (u'v - uv')/v^2 lorsque v ne s'annule pas

(u^n)' = nu'u^{n-1} pour n in N - {0}, (sqrt(u))' = u'/(2sqrt(u)), (ln u)' = u'/u lorsque u > 0

La dérivée de x -> u(ax + b) est x -> a x u'(ax + b)

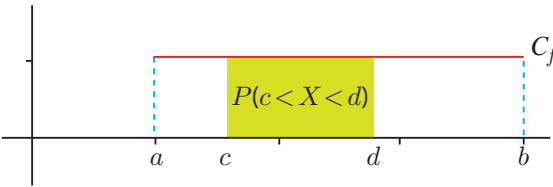
Loi continue à fonction de densité f



P(c < X < d) = integral from c to d of f(x) dx

Espérance de X définie sur [a;b] : E(X) = integral from a to b of xf(x) dx

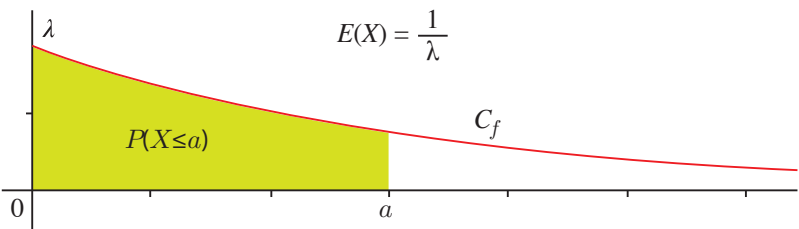
• Loi uniforme sur [a;b] : f(x) = 1/(b-a), P(c < X < d) = (d-c)/(b-a), E(X) = (a+b)/2



• Loi exponentielle de paramètre lambda

f(x) = lambda * e^{-lambda * x} définie sur [0;+inf[

P(X <= a) = 1 - e^{-a}; P(X > a) = e^{-a}



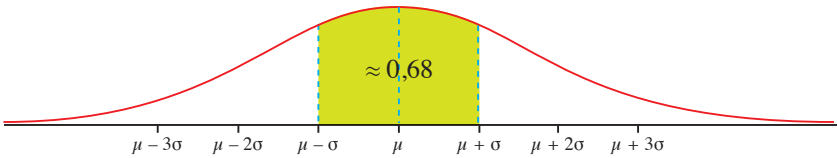
• Loi normale

Loi normale centrée réduite N(0;1) : f(x) = 1/(2pi) * e^{-x^2/2} définie sur R

E(X) = 0, V(X) = 1 ; P(-u <= X <= u) = 0,95 pour u approx 1,96.

Loi normale N(mu;sigma^2).

X suit N(mu;sigma^2) si et seulement si (X-mu)/sigma suit N(0;1).



P(mu - sigma < X < mu + sigma) approx 0,68

P(mu - 2sigma < X < mu + 2sigma) approx 0,95

P(mu - 3sigma < X < mu + 3sigma) approx 0,997

• Intervalle de fluctuation asymptotique

p est une proportion connue dans une population. A condition que n >= 30, np >= 5 et n(1-p) >= 5, l'intervalle de fluctuation asymptotique de p au risque de 5% dans un échantillon de taille n est :

[p - 1,96 * sqrt(p(1-p)/n) ; p + 1,96 * sqrt(p(1-p)/n)]

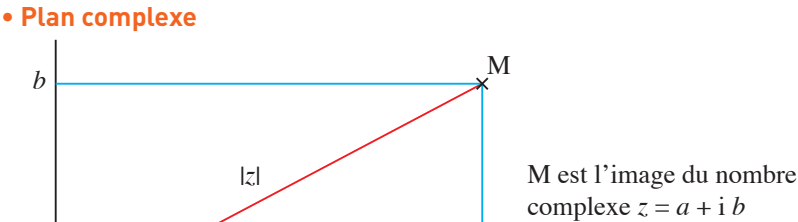
• Intervalle de confiance

f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n. A condition que n >= 30, nf >= 5 et n(1-f) >= 5, l'intervalle de confiance de la proportion p dans la population totale, au niveau de confiance de 95% est

[f - 1/sqrt(n) ; f + 1/sqrt(n)]

Nombres complexes

Forme algébrique : $z = a + i\,b$ avec a et b réels.
 a est la partie réelle de z .
 b est la partie imaginaire de z .
 i vérifie $i^2 = -1$



$|z| = OM$; pour z non nul : $\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta \, (2\pi)$
 $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
 $z_{AB} = z_B - z_A$; $AB = |z_B - z_A|$; $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
Pour I milieu de $[AB]$: $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

• Conjugué
 $\overline{\overline{z}} = z = a - i\,b$; $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
Propriétés du module :
 $|z| = |\overline{z}|$; $|zz'| = |z| \times |z'|$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $|z^n| = |z|^n$ avec n entier
Propriétés de l’argument :
 $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \, (2\pi)$; $\arg(z^n) = n \arg(z) \, (2\pi)$;
 $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \, (2\pi)$
Pour z non nul avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$:
Forme trigonométrique : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r > 0$
Forme exponentielle : $z = r e^{i\theta}$
 $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{i\pi} = -1$

Résolution de $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$.
 $\Delta = b^2 - 4ac$
Si $\Delta > 0$: deux solutions distinctes, réelles : $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Si $\Delta = 0$: une solution unique, réelle : $-\frac{b}{2a}$
Si $\Delta < 0$: deux solutions complexes conjuguées : $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Intégration

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$
Relation de Chasles : pour tous a, b, c réels :
 $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
Positivité
Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
Linéarité
 $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$; $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ avec k constante réelle
Valeur moyenne de f sur l’intervalle $[a;b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Spécialité

Arithmétique : a, b, c, d dans $\mathbb{Z}$ et n dans $\mathbb{N}$.
• **Congruence**
 $a \equiv b[n]$ si et seulement si $a - b$ est multiple de n .
Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$:
 $a + c \equiv b + d[n]$; $ac \equiv bd[n]$; $a^p \equiv b^p[n]$ pour $p \in \mathbb{N}$
• **Théorème de Bézout**
Si $d = PGCD(a,b)$, il existe deux entiers u, v tels que $au + bv = d$.
 a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe u et v entiers, tels que $au + bv = 1$.
• **Théorème de Gauss**
Si a divise le produit bc et a est premier avec b , alors a divise c .
• **Graphe et matrice** :
Graphe orienté à 2 sommets A, B, de matrice M.
 P_n état probabiliste.
Si $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ alors $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P_{n+1} = P_n M$
Si $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ alors $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $P_{n+1} = M P_n$