Matrices (Spécialité)

$A = (a_{ij})$ et $B = (b_{k\ell})$ sont deux matrices de dimensions respectives $n \times p$ et $m \times q$.
a_{ij} est le terme de A se trouvant sur la ligne i et dans la colonne j.

- **Opérations sur les matrices**

Si $n = m$ et $p = q$ alors la somme de A et B est la matrice $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λA est la matrice (λa_{ij}).
Si $p = m$ alors $A \times B$ s'obtient en multipliant chaque vecteur ligne de A par chaque vecteur colonne de B.

- **Matrices carrées**

Si $n = p$, A est une matrice carrée.
A est inversible s'il existe une matrice A^{-1} telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$,
où I est la matrice identité.

- **Écriture matricielle d'un système linéaire**

Le système $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ s'écrit sous la forme $AX = B$,

où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Si A est inversible, alors la solution du système matriciel est $X = A^{-1}B$.

Graphes (Spécialité)

$\mathcal{G}$ est un graphe de matrice d'adjacence $M = (m_{ij})$. On pose $M^k = (\mu_{ij})$, $k \in \mathbb{N}^*$.

- **Graphe non orienté**

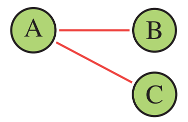
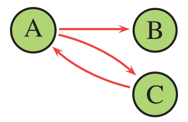
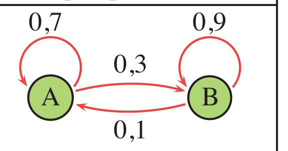
La somme des degrés des sommets de $\mathcal{G}$ est égale au double du nombre de ses arêtes.
Le nombre de sommets de degré impair est un nombre pair.
m_{ij} est le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.
μ_{ij} est le nombre de chaînes de longueur k reliant les sommets i et j.
Formule d'Euler : $s - a + f = 2$, où $\mathcal{G}$ est planaire et connexe, s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces.
$\mathcal{G}$ connexe et a 0 ou 2 sommets de degré impair $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ admet une chaîne eulérienne.
$\mathcal{G}$ connexe et a tous ses sommets de degré pair $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ admet un cycle eulérien.

- **Graphe orienté**

m_{ij} est le nombre d'arêtes allant du sommet i vers le sommet j.
μ_{ij} est le nombre de chaînes de longueur k allant du sommet i vers le sommet j.

- **Graphe probabiliste**

m_{ij} est la probabilité de passer du sommet i au sommet j.
$P_k = P_0 \times M^k$: matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape $k \geqslant 0$.
Si k tend vers $+\infty$, P_k tend vers P : état stable de $\mathcal{G}$.

Graphe non orienté	Graphe orienté	Graphe probabiliste
		
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

Suites

- **Suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0**

$n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$

$$u_n = u_0 + nr = u_p + (n - p)r$$

$r > 0$	$r < 0$	$r = 0$
la suite est croissante	la suite est décroissante	la suite est constante

- **Suite géométrique de raison q et de premier terme u_0**

$n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = qu_n$

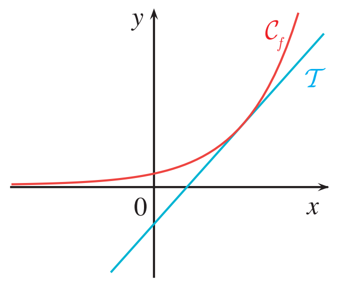
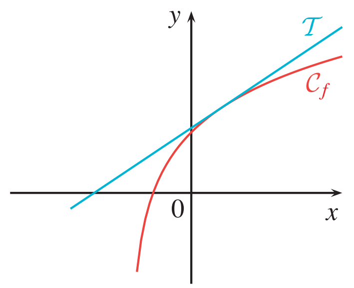
$$u_n = u_0 \times q^n = u_p \times q^{n-p}$$

Sens de variation lorsque $u_0 > 0$:

$q > 1$	$0 < q < 1$	$q = 1$
la suite est croissante	la suite est décroissante	la suite est constante
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$

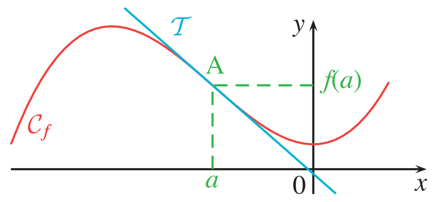
Somme des premiers termes ($q \neq 1$) : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Convexité

f convexe sur I	f concave sur I
	
$\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de ses tangentes	$\mathcal{C}_f$ est toujours en dessous de ses tangentes
$f''(x) > 0$ sur I	$f''(x) < 0$ sur I
f' est croissante sur I	f' est décroissante sur I

- **Point d'inflexion**

A$(a\,;\ f(a))$ est un point d'inflexion si :
$\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en A ;
$f''(x)$ s'annule en changeant de signe pour $x = a$;
f change de convexité en $x = a$.



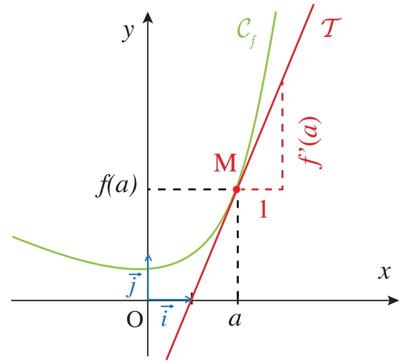
Continuité et dérivabilité

Théorème de la valeur intermédiaire

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ et si c est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x)=c$ admet une unique solution sur $[a\,;b]$.

Équation de la tangente

$f'(a)$ est le *coefficient directeur* de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point $\mathrm{M}(a\,;\,f(a))$.



$$\boxed{\text{Équation de } \mathcal{T} : y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Dérivées usuelles

k est un réel, n est un entier naturel non nul.

$f(x)$	k	x	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\ln x$	e^x
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	e^x
Domaine de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$]0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle, et $k \in \mathbb{R}$.

Fonction	ku	$u+v$	uv	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$	$\ln u$, $u>0$	e^u
Fonction dérivée	ku'	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$

Pourcentages (rappels)

	Augmentation de t %	Réduction de t %
1 fois	$x \longrightarrow \left(1+\frac{t}{100}\right)x$	$x \longrightarrow \left(1-\frac{t}{100}\right)x$
n fois	$x \longrightarrow \left(1+\frac{t}{100}\right)^n x$	$x \longrightarrow \left(1-\frac{t}{100}\right)^n x$

Fonctions logarithme népérien et exponentielle

Logarithme népérien

$x \mapsto \ln x$ est concave et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\ln 1 = 0\,;\ \ln e = 1$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$:	
$\ln(xy) = \ln x + \ln y$	$\ln(x^n) = n\ln x$
$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$	$\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

Exponentielle

$x \mapsto e^x$ est convexe et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$e^0 = 1\,;\ e^1 = e(\approx 2,718)\,;\ e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:	
$e^{x+y} = e^x \times e^y$	$e^{nx} = (e^x)^n$
$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$	$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Propriétés

$x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$

$x > 0 : e^{\ln x} = x$

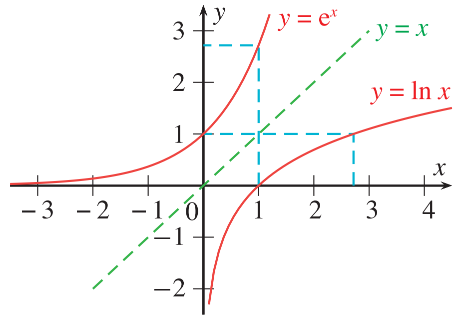
$a \in \mathbb{R} : \ln x = a \iff x = e^a$

$a > 0 : e^x = a \iff x = \ln a$

$x > y \iff e^x > e^y$ et $\ln x > \ln y$

$x = y \iff e^x = e^y$ et $\ln x = \ln y$

Pour tout réel $x > 0$, $\ln x < x < e^x$



Probabilités

Généralités

Égalités élémentaires : $P(\Omega) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$

Événement contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Union et intersection : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

A et B incompatibles : $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilités conditionnelles

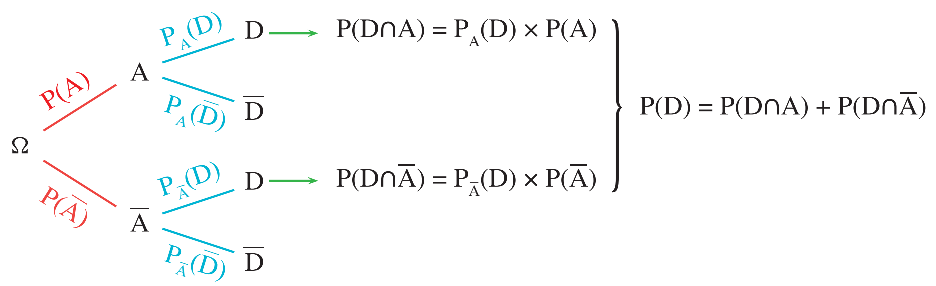
Probabilité de B sachant A : $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

A et B indépendants $\iff P_A(B) = P(B)$

$\iff P_B(A) = P(A)$

$\iff P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

Formule des probabilités totales



Lois à densité

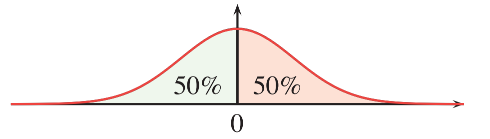
Loi uniforme sur $[a\,;b]$

$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{d-c}{b-a}\,;\quad E(X) = \frac{a+b}{2}$

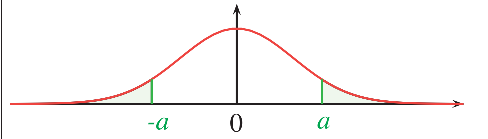
Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$

$E(X) = 0 \quad ; \quad V(X) = 1$

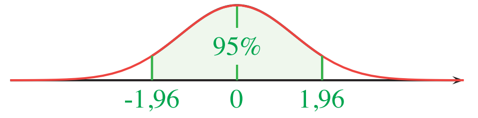
$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = 0,5$



$P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a) = 1 - P(X \leqslant a)$



$P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$

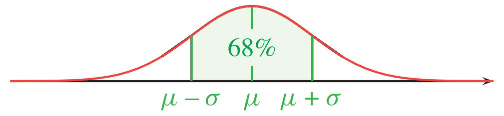


Loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$

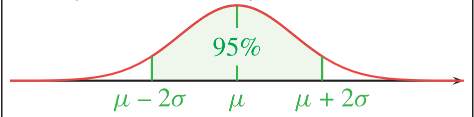
$E(X) = \mu\,; \quad V(X) = \sigma^2$

X suit la loi $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2) \iff Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$

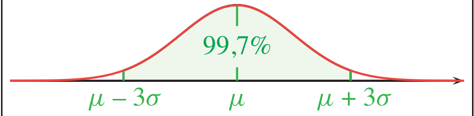
$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$



$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$



$P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$



Intervalle de fluctuation et estimation

Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$, avec $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, $n(1-p) \geqslant 5$ et $p \in]0\,;1[$.

$F_n = \frac{X_n}{n}$ est la variable aléatoire des fréquences de X_n.

Intervalle de fluctuation de F_n : $I_n = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$

Si n tend vers $+\infty$, alors $P(F_n \in I_n) = 0,95$.

Intervalle de confiance au seuil de 95%

f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n, avec $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$, $n(1-f) \geqslant 5$.

Intervalle de confiance : $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Primitives

Primitives usuelles

$f(x)$	1	x^n	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	e^x
$F(x)$	x	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$2\sqrt{x}$	e^x

Formules

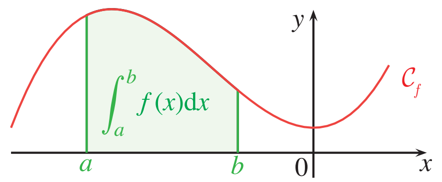
Fonction	$u'u$	$\frac{u'}{u^2}$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u}$
Primitive	$\frac{u^2}{2}$	$-\frac{1}{u}$	e^u	$\ln u$

Intégration

Représentation graphique

f est une fonction continue sur $[a\,;b]$. F est une primitive de f sur $[a\,;b]$.

Si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ représente l'aire entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_f$ sur $[a\,;b]$:



$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

Propriétés

$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en $x = a$.

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$, $c \in \mathbb{R}$

Linéarité : $\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$

Positivité : Si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$

Ordre : Si $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Valeur moyenne sur $[a\,;b]$: $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$