

INTERROS des LYCÉES

Collection dirigée par Éric MAURETTE

maths



Érick DE BRAUWÈRE

 Nathan

Remerciements

Les auteurs et l'équipe de Prepamath Édition tiennent à remercier Jean-Côme Charpentier, Stéphane Pasquet et François Bonnet pour l'aide précieuse qu'ils ont apportée à cet ouvrage.

Illustrations : Patrick Doan, Anna Michalak
Coordination éditoriale : François Déliac
Conception couverture : Simon Geliot

Votre avis nous intéresse : contact@prepamath.fr

Retrouvez les Interros des Lycées et des informations scientifiques sur :

Facebook : facebook.com/interrosdeslycees

Twitter : [@prepamath](https://twitter.com/prepamath)

© PREPAMATH Éditions 2019
© Éditions NATHAN 2019 - ISBN 9782091574158

Avant-propos

La nouvelle édition de cet ouvrage, complètement revue et corrigée, est conforme au nouveau programme de mathématiques de la classe de seconde, entré en vigueur à la rentrée 2019. Désormais, une partie « Algorithmique et programmation » apparaît clairement dans les textes officiels, confirmant ainsi la tendance à l'utilisation de l'outil informatique. Parallèlement, la démonstration est placée au cœur de l'activité mathématique et quelques résultats de cours clairement identifiés seront démontrés.

Certaines notions jusqu'alors étudiées en collège ou en première apparaissent désormais en classe de Seconde (calculs de taux, écart-type, fonction cube, produits remarquables...), tandis que d'autres ont été supprimées.

Dans chaque chapitre, on trouvera :

- Un rappel de cours, qui s'appuie sur la résolution pratique d'un exercice type, et qui donne de manière concise tout ce que l'on doit retenir du chapitre étudié.
- Des questionnaires à choix multiples (QCM) ou des vrai-faux (V/F) pour vous assurer d'avoir la maîtrise des concepts fondamentaux du chapitre.
- Des exercices corrigés de tous types, qui ont tous été réellement posés en lycée, sauf pour les parties nouvelles du programme.

Une grande nouveauté de cette édition est l'apparition de compléments numériques : vidéos, sources de programmes informatiques, ou autres ressources Internet, qui sont repérés par des pictos et le logo de l'application « Nathan live » (cf. mode d'emploi page 6).

Grâce à cette application, vous pourrez accéder à des ressources numériques qui vous aideront de manière vivante à préciser certains points de cours, mieux comprendre la résolution d'exercices importants, ou récupérer les sources Python des programmes contenus dans ce livre. La liste complète des vidéos se trouve en annexe en fin d'ouvrage, et vous pouvez télécharger les programmes qu'il contient en visitant le lien suivant :

<http://www.prepamath.fr/IL2M>.

N'hésitez pas à nous faire part de vos remarques ou suggestions en nous contactant par mail à l'adresse contact@prepamath.fr.

Très bon entraînement à vous.

L'auteur

Table des matières

Chap 1	Notions d'algorithmique	1
	● Cours	1
	● Interros	12
	● Corrigés	18
Chap 2	Les nombres	27
	● Cours	27
	● Interros	41
	● Corrigés	49
Chap 3	Équations, inéquations	69
	● Cours	69
	● Interros	75
	● Corrigés	87
Chap 4	Configurations du plan	119
	● Cours	119
	● Interros	131
	● Corrigés	136
Chap 5	Vecteurs et coordonnées dans le plan	153
	● Cours	153
	● Interros	162
	● Corrigés	172
Chap 6	Équations de droites. Systèmes linéaires	191
	● Cours	191
	● Interros	202
	● Corrigés	210
Chap 7	Fonctions	231
	● Cours	231
	● Interros	240
	● Corrigés	250

Chap	8	Fonctions de référence	269
		● Cours	269
		● Interros	276
		● Corrigés	284
Chap	9	Statistiques et probabilités	299
		● Cours	299
		● Interros	308
		● Corrigés	317
		Annexe : Liste des vidéos	329

Nathan Live

Accédez aux compléments numériques
de cet ouvrage (vidéos, audios, lien internet)
sur votre smartphone ou votre tablette avec :



- 1 | Téléchargez l'application gratuite Nathan Live disponible dans tous les stores sur votre smartphone ou votre tablette (Appstore, GooglePlay, Windows Store).
- 2 | Ouvrez l'application, puis flasquez les pages de votre ouvrage où ce logo apparaît en plaçant votre appareil au-dessus de la page.
- 3 | Consultez les ressources !



Picto Nathan Live
indiquant que la page
contient des ressources

Vous consultez directement
la ressource sur votre
smartphone ou votre tablette

Pour télécharger les programmes contenus dans cet ouvrage :

<http://www.prepamath.fr/IL2M>

Méthodes de travail

Tous les conseils qui suivent sont ceux utilisés par un grand nombre de majors (sortis premiers) de Polytechnique ou de l'ÉNA, par des professionnels de l'organisation et sont également recommandés par de nombreux professeurs. Pour en savoir plus sur le sujet, nous vous conseillons le livre « Comment travailler plus efficacement », par F. Déliac, U. Hadrien, E. Matrullo et E. Maurette, aux Éditions Prepamath.

Faire des « feed-back »

Le « feed-back » est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement, sans s'aider de notes, ce que l'on vient d'apprendre (exercices et cours). Ce contrôle peut se faire mentalement, oralement ou par écrit.

- Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement, et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus le matin en classe (feed-back mental).
- Après avoir relu votre cours le soir, essayez de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon (feed-back écrit).
- Après avoir résolu un problème, prenez 5 minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappelez clairement l'énoncé ainsi que la démarche de résolution (feed-back écrit).
- Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent feed-back oral. Choisissez le type de « feed-back » qui vous convient le mieux et faites-en le plus régulièrement possible (après chaque cours et chaque série d'exercices). Pour être efficace, un « feed-back » doit se faire sans l'aide de vos notes. Ainsi, faire des fiches de résumés de cours à partir de vos cahiers ouverts ne constitue nullement un « feed-back ».

Miser sur la qualité

De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limité d'exercices, mais plus approfondis, que d'en survoler une grande quantité de piètre qualité. Une tendance très répandue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, l'on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficace car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématiques ou de physique, c'est de l'avoir parfaitement compris et assimilé.

Ainsi :

- À la fin d'un problème, prenez 5 à 10 minutes pour essayer de trouver un moyen de le généraliser ou de le compliquer (c'est ce que font souvent les professeurs pour concevoir leurs contrôles écrits) ; trouvez ce que cela pourrait changer dans la solution.
- Prenez également l'habitude, après chaque exercice, de faire un « feed-back » en faisant ressortir la démarche générale et en tissant des liens avec le cours. Bref, il ne faut pas vous contenter de résoudre l'exercice, mais il vous faut lui apporter de la valeur ajoutée et vous interroger sur son contenu.
- Idem pour le cours. Ne vous contentez pas de le parcourir de manière passive. Il vous faut avoir la rigueur d'effacer toutes les zones d'ombre. Pour chaque théorème, il faut vous demander quels types d'exercices son utilisation permettra de résoudre.

Travailler par « couches successives »

Cette méthode, très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions, peut également être utilisée dès le lycée.

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace que de l'attaquer de front, de manière linéaire. La bonne manière consiste à d'abord survoler l'ensemble, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grands titres, ainsi que les noms des paragraphes (première couche, étape devant durer 5 minutes). Dans l'étape suivante (deuxième couche, d'une durée de 10 minutes), on reprend son cours du début en retenant cette fois également les théorèmes et résultats importants. Après cette deuxième couche, on a déjà une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (troisième couche) : on reprend son cours au début pour, cette fois-ci, l'étudier en profondeur en apprenant le détail des démonstrations.

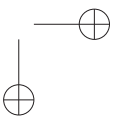
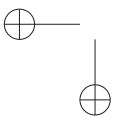
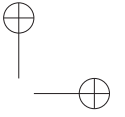
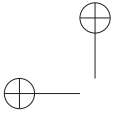
Il est à noter que cette méthode peut être également appliquée avec succès à des matières littéraires, ainsi qu'aux révisions du bac de français. Par exemple :

- Pour la préparation d'un contrôle, on commencera par passer en revue rapidement l'ensemble du cours et des exercices du chapitre précédemment étudiés, avant de les réviser en détail. Ainsi aura-t-on développé une compréhension synthétique et claire.
- De même, avant d'aborder un problème volumineux (tel qu'un contrôle écrit), il est préférable de survoler l'ensemble du problème avant de l'attaquer.

Travailler sa rapidité

Pour acquérir de la rapidité, 3 voies sont possibles :

- Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous concentrer sur une seule chose à la fois, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème ou une dissertation, en rêvassant à ce que vous pourriez trouver à manger dans le réfrigérateur ou en écoutant de la musique.
- Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les mêmes conditions qu'en devoirs surveillés. Le minutage de chacun des exercices de ce livre est fait en ce sens. Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne deviendrez jamais rapide.
- Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une plage horaire serrée. Engagez-vous, par exemple, à travailler chez vous tous les jours entre 18 h et 20 h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelle que soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne se donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, l'on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvasser. L'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.



Chapitre

1

Notions d'algorithmique

Plan du chapitre

1. Qu'est-ce qu'un algorithme ?
2. Les instructions composées
3. Comment écrire une fonction en Python ?

1 Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Exercice type 1

Lycée Marie Curie, Sceaux

On considère la séquence d'instructions :

```
1> a = 3  
2> b = a/2  
3> a+b = 4.5  
4> b = b+1
```

Expliquer ce qui est effectué sur chaque ligne et préciser si chaque opération est autorisée.

Voir corrigé page 3

1.1 Introduction

Au collège, vous avez vu que le logiciel Scratch permettait de construire votre propre programme et ce, rien qu'en déplaçant des blocs d'instructions (les instructions sont des ordres à exécuter par l'ordinateur).

Ces blocs d'instructions constituent un moyen simple de visualiser ce que l'on appelle un *algorithme*.

Définition 1 : algorithme

Un *algorithme* est une suite finie d'instructions permettant de résoudre un problème.

Dans un premier temps, on peut écrire l'algorithme dans un langage *naturel*.

Exemple :

```
Variable
  x est un nombre
Début
  x ← 5
  Afficher x
  x ← 10
  Afficher x
Fin
```

L'instruction $x \leftarrow 5$ est une *affectation*. La valeur 5 est stockée dans la variable x . Au départ, le nombre « 5 » s'affiche (car c'est la première valeur de la variable x) et dans un second temps, c'est « 10 » qui s'affiche (car on a *affecté* à x une autre valeur après le premier affichage).

On traduit l'algorithme pour l'ordinateur sous forme de *programme*, à l'aide d'un *langage de programmation*, comme Python.

Exemple :

```
x = 5
print(x)
x = 10
print(x)
```

1.2 Type des variables

Dans le programme précédent, on remarque que Python n'a pas besoin qu'on lui précise que la variable x va contenir un nombre.

Au moment de l'affectation $x = 5$, Python détermine lui-même que 5 est un entier et que x va contenir un entier. On dit alors que la variable x est du *type* entier.

Le type d'une variable est important car il détermine (entre autres) quelle place la variable peut occuper en mémoire.

En Python, on distingue les types suivants :

- entier (en Python, `int`, de l'anglais *integer*) : -234.
- booléen (du mathématicien et logicien anglais George Boole, 1815-1864). Ce type ne contient que deux valeurs : `True` (vrai) et `False` (faux)
- flottant (en Python `float`) 45.156, -8.11. À noter : Python utilise le point décimal au lieu de la virgule. La position « flottante » de la virgule donne son nom à ce type.
- chaînes de caractères (en Python, `str` pour *string*), 'mathématiques', "bonjour".

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

Le nom d'une variable obéit à certaines règles. Pour simplifier, disons qu'il consiste en une suite de lettres, y compris le caractère « _ », suivie éventuellement d'une suite de chiffres. Noter que Python fait la différence entre majuscules et minuscules.

Par exemple,

- `ab1`, `ma_variable`, `Résultat`, `vAriAble` sont des noms autorisés;
- `2`, `51ab`, `x+y`, `'hello'` sont interdits (`'hello'` est une chaîne de caractère, `2` est un entier : ce sont des *constantes*).

1.3 L'affectation

En Python, le symbole d'affectation est le signe égal (« = »).

Contrairement à ce qui se passe en mathématiques, le signe « = » n'est pas du tout symétrique.

Le membre de gauche est toujours un nom de variable. Si cette variable n'existe pas encore, elle est créée.

En revanche, le membre de droite peut contenir des variables mais elles doivent déjà contenir une valeur. La valeur du membre de droite est alors calculée puis stockée dans la variable située du côté gauche du « = ».

Par exemple, dans l'instruction `x=5`, on calcule la valeur du membre de droite (donc 5), qui est stockée dans la variable `x`.

Si maintenant on effectue `x=10`, la valeur 10 vient remplacer la valeur 5 dans la variable `x`.

➔ Solution de l'exercice type 1

Lycée Marie Curie, Sceaux

```
1> a = 3
```

La valeur 3 est évaluée et stockée dans la variable `a`, qui est donc de type entier.

```
2> b = a/2
```

Le membre de droite est évalué. Comme `a` contient 3, le quotient n'est pas entier et sa valeur est 1.5, qui est stockée dans `b`. Cette variable est de type flottant.

Si l'instruction avait été :

```
2> b = a//2
```

on aurait alors une division *entière*, et c'est l'entier 1 qui serait stocké dans `b`.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type 1 (suite)

Lycée Marie Curie, Sceaux

```
3> a+b = 4.5
```

Le membre de droite n'est pas un nom de variable autorisé, cette instruction est donc fautive. Pourtant, l'instruction :

```
3> print(a+b)
```

devrait bien donner 4.5 mais le signe '=' n'est pas un symbole de comparaison, mais d'affectation.

```
4> b = b+1
```

b contient la valeur 1.5, donc le membre de droite a pour valeur 2.5. Cette valeur est stockée dans b et remplace la valeur précédente. La variable b reste du type flottant.

Remarquons qu'on vient d'assister à l'addition de 1, qui est de type entier, avec 1.5, qui est de type flottant. Ceci peut paraître anodin, mais c'est une opération qui ne va pas de soi sur un ordinateur. En fait, Python convertit automatiquement l'entier 1 en le flottant 1.0 pour pouvoir faire l'addition. Certains langages de programmation ne font pas cette conversion automatiquement et produiraient un message d'erreur.

Voir énoncé page 1

2 Les instructions composées

Exercice type 2

Lycée Jules Ferry, Versailles

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$.

Écrire un algorithme qui permet d'afficher $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(20)$.

Voir corrigé page 10

2.1 Les séquences d'instruction

Une séquence d'instructions est tout simplement une suite d'instructions à exécuter les unes après les autres. En Python, les instructions de la séquence doivent être écrites les unes sous les autres, avec la même indentation (c'est-à-dire, le même retrait).

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

```
a=3  
print(a)
```

Si on manque de place, ou pour la clarté du code, on peut écrire les instructions de la séquence sur une même ligne. Elles doivent alors être séparées par un point-virgule :

```
a=3 ; print(a)
```

Chaque instruction de la séquence peut elle aussi être une séquence :

```
a=3 ; print(a)  
b=2 ; print(b)
```

Une instruction simple est un cas particulier de séquence d'instructions.

2.2 Instruction conditionnelle : SI ... ALORS ...

L'instruction « SI ... ALORS ... » permet d'exécuter une ou plusieurs instructions si une condition est remplie. Sa structure générale est :

```
SI condition ALORS  
    instruction(s) à exécuter si la condition est remplie  
FIN SI
```

Le plus souvent, la condition est une égalité ou une inégalité portant sur une variable.

Exemple :

```
Variable x : nombre  
Début  
    x ← 0  
    Si x>10 alors  
        Afficher x  
Ajouter 20 à x  
    Si x>10 alors  
        Afficher x  
    Fin Si  
Fin
```

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Au début, x vaut 0. Comme la condition $x > 10$ est fausse, il ne se passe rien et on passe à la ligne suivante. On ajoute alors 20 à x , qui vaut maintenant 20. L'instruction suivante teste si $x > 10$, ce qui est vrai, donc la valeur de x est affichée, c'est-à-dire 20. Voici la version Python :

En Python

```
x = 0
if x > 10:
    print(x)
x = x + 20
if x > 10:
    print(x)
```

La séquence concernée par la condition doit être indentée (c'est-à-dire, qu'on doit faire un retrait). L'instruction $x = x + 20$ n'est pas indentée et doit donc être exécutée quelle que soit la valeur de la condition $x > 10$.

Une variante de cette instruction est « SI ... ALORS ... SINON ... » :

```
SI condition ALORS
    instruction(s) à exécuter si la condition est remplie
SINON
    instruction(s) à exécuter si la condition n'est pas
    remplie
FIN SI
```

Exemple :

```
Variable x : nombre
Début
    x ← 0
    Si x > 10 alors
        Afficher x
    Sinon
        Afficher : "trop petit"
    Fin Si
Fin
```

Ici, x contient la valeur 0. Comme la condition $x > 10$ est fausse, c'est l'instruction qui suit "sinon" qui est exécutée et la chaîne de caractères : « trop petit » s'affiche à l'écran.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

En Python

```
x = 0
if x > 10:
    print(x)
else:
    print("trop petit")
```

2.3 Les boucles POUR et TANT QUE

Une *boucle* permet d'exécuter plusieurs fois une ou plusieurs instructions.

2.3.1 - La boucle bornée POUR

On utilisera la boucle POUR quand on saura le nombre de fois qu'il faut exécuter un bloc d'instructions.

Sa structure générale est de la forme :

```
POUR variable ALLANT DE valeur initiale À valeur finale
    instruction(s) à répéter
FIN POUR
```

Remarques

- La variable, qui change de valeurs à chaque fois que la boucle s'exécute, est aussi appelée *variable de boucle* ou *compteur*, pour ne pas qu'il y ait d'ambiguïté avec les autres variables de l'algorithme.
- « FIN POUR » indique la fin de la liste des instructions à répéter.

Exemple : soit $f(x) = x^2 - 3x$.

Pour calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(20)$, on peut utiliser l'algorithme suivant.

```
Variables x,y : nombres
Début
    Pour x allant de 0 à 20
        y prend la valeur x**2-3*x
        Afficher y
    Fin Pour
Fin
```

On note que $x**2$ signifie que la valeur de x est mise au carré.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

En Python, on utilise le mot-clé *range* (*intervalle*, en anglais). Attention, par convention, la valeur finale est toujours exclue. Si on veut que *x* décrive les valeurs de 0 à 20 inclus, il faut donc demander que *x* prenne les valeurs de 0 à 21 (exclu) :

En Python

```
for x in range(0,21):
    y=x**2-3*x
    print(y)
```

Remarque : il n'est pas obligatoire d'utiliser la variable de boucle à l'intérieur même de la boucle. Par exemple, si on veut afficher 100 fois la chaîne « Bonjour ! », on pourra utiliser l'algorithme suivant.

```
Variable : i
Début
    Pour i allant de 1 à 100
        Afficher "Bonjour !"
    Fin Pour
Fin
```

En Python

```
for i in range(1,101):
    print("Bonjour !")
```

2.3.2 - Boucle non bornée TANT QUE

On utilise une boucle TANT QUE lorsque la longueur de la boucle n'est pas connue (ou difficile à prévoir) au moment de l'écriture de l'algorithme.

La forme générale de cette boucle s'écrit :

```
TANT QUE condition FAIRE
    instruction(s)
FIN TANT QUE
```

Remarque : « FIN TANT QUE » indique la fin de la liste des instructions à répéter.

On utilisera la boucle TANT QUE quand la condition dépendra du contenu de la boucle.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

Exemple : on veut afficher le plus petit entier n pour lequel $\frac{1}{n^2 + n + 1} \geq 10^{-6}$.
Pour cela, on utilise l'algorithme suivant.

```
Variable : n
Initialisation : n prend la valeur 0
Début
    Tant que  $1/(n*n+n+1) > 10^{-6}$ 
        n prend la valeur n+1
    Fin Tant que
    Afficher n
Fin
```

- Avant d'entrer dans la boucle, n vaut 0, et donc :

$$\frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{1}{0^2 + 0 + 1} = 1,$$

qui est strictement supérieur à 10^{-6} . Donc on exécute l'instruction dans la boucle : n est augmenté de 1, donc vaut 1.

- On teste à nouveau la condition :

$$\frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{1}{3},$$

qui est encore plus grand que 10^{-6} donc on exécute l'instruction à l'intérieur de la boucle.

- Ainsi de suite jusqu'à ce que $\frac{1}{n^2 + n + 1}$ soit strictement plus petit que 10^{-6} . Dans ce cas, on sort de la boucle et on affiche la dernière valeur de n , celle pour laquelle $\frac{1}{n^2 + n + 1} \leq 10^{-6}$ pour la première fois.

```
n = 0 # initialisation
while 1 / (n**2 + n + 1) > 10**(-6):
    n = n+1 # incrémentation
print(n)
```

Pour information, ce programme affiche le nombre 1 000.

Les boucles non bornées sont délicates à manier. Dans l'algorithme ci-dessus, il ne faut pas oublier d'initialiser ou d'incrémenter la variable n . Il faut s'assurer également que la condition finira par devenir fausse, sous peine que la boucle ne s'arrête plus (c'est ce qu'on appelle un « plantage »). Il n'y a pas ces difficultés avec une boucle bornée, pour laquelle l'initialisation, l'incrémentation et l'arrêt sont en général assurés.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type 2

Lycée Jules Ferry, Versailles

Il s'agit de répéter le calcul de $f(x)$, x prenant les valeurs 0, 1, etc. jusqu'à 20.

Une boucle POUR paraît toute indiquée.

📄 Algorithme

```
Variable : x
Début
  x ← 0
  Pour x allant de 0 à 20
    y ← (2*x**2+x)/(x**2+2*x+1)
    Afficher y
  Fin Pour
Fin
```

📄 En Python

```
for x in range(0,21):
    y = (2*x**2+x)/(x**2+2*x+1)
    print(y)
```

Voir énoncé page 4

3 Comment écrire une fonction en Python ?

Exercice type 3

Lycée Marie Curie, Sceaux

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donnée par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}.$$

Programmer la fonction $f(x)$ en Python.

Voir corrigé page 11

En mathématiques, une fonction f utilise un nombre x pour calculer une valeur $f(x)$.

Une fonction Python généralise ce principe. À partir d'un *argument* x (parfois plusieurs, parfois aucun !), elle exécute un certain nombre d'instructions et renvoie une valeur. Pour programmer une fonction, on utilise le mot-clé *def*. Le nom de la fonction doit vérifier les règles habituelles des noms de variables.

Ne pas oublier qu'un ordinateur fait ce qu'on lui demande, certes très vite, mais qu'il ne prend pas d'initiative. Lui demander de calculer une valeur ne suffit pas : il faut demander que cette valeur soit *communiquée*, d'une manière ou d'une autre.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

Prenons l'exemple de la fonction carré. Le programme :

```
def f(x):  
    x**2
```

ne contient pas de faute de langage. Cependant, il n'est pas satisfaisant parce que la fonction f calcule bien le carré de la variable x , mais le résultat du calcul est perdu. On peut penser à utiliser `print` :

```
def f(x):  
    print(x**2)
```

C'est déjà mieux, le résultat du calcul sera affiché à l'écran. Cependant, on ne peut pas utiliser $f(x)$ dans un calcul comme on le fait en mathématiques. par exemple : $1+f(2)$ va déclencher une erreur.

Le mieux est de demander à la fonction de renvoyer le résultat calculé à l'aide du mot-clé : `return`. Par exemple, la fonction « carré » s'écrit en Python :

```
def f(x):  
    return x**2
```

On peut ensuite utiliser la fonction dans un autre programme :

```
print(f(2))  
y = f(3)+1  
print(y)
```

À la première ligne, on « appelle » $f(2)$. Cette valeur est évaluée en remplaçant le x de la définition de f par 2. La fonction f renvoie alors la valeur 4, et c'est donc 4 qui est affiché. Dans l'instruction suivante, qui est une affectation, on évalue $f(3)$, c'est-à-dire 9, et c'est donc 10 qui est stocké dans y , puis affiché.

En fait, nous avons déjà rencontré des fonctions, comme `print` et même `range`.

On notera que `def` ou `return` ne sont pas suivis de parenthèses car ce sont des mots-clés et non des fonctions.

➡ Solution de l'exercice type 3

Lycée Marie Curie, Sceaux

La définition de la fonction commence par le mot-clé `def`. Il faut penser à bien indenter la séquence d'instructions et utiliser `return` pour renvoyer la valeur calculée.

```
def f(x):  
    y=(2*x**2-1)/(x+1)  
    return y
```

Voir énoncé page 10

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 QCM Entiers de 1 à 9

3 min

Corrigé
p. 18

On cherche à programmer un algorithme qui affichera tous les nombres entiers de 1 à 9. Parmi ces propositions, écrites en Python, lesquelles vous paraissent correctes ?

- ☐ a) `if k>0 and k>0 : print(k)`
- ☐ b) `k=1 ; while k>0 : print(k)`
- ☐ c) `for k in range(1,11): print(k)`
- ☐ d) `for k in range(1,10): print(k)`

2 QCM De Python à un algorithme

5 min

Corrigé
p. 18

Voici un programme en Python :

```
x = 5
for i in range(0,10):
    x = x*2/(x-4)
    print(x)
```

Parmi les algorithmes suivants, quel est celui qui représente ce programme ?

☐ a)

```
x ← 5
Pour i allant de 1 à 10
    x ← x*2/(x-4)
Fin Pour
Afficher x
```

☐ b)

```
x ← 5
Pour i allant de 0 à 9
    x ← x*2/(x-4)
    Afficher x
Fin Pour
```

☐ c)

```
x ← 5
Pour i allant de 0 à 10
    x ← x*2/(x-4)
    Afficher x
Fin Pour
```

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

3 Traduire un programme Python



5 min

Corrigé
p. 18

Lycée Hoche, Versailles

Voici un programme Python :

```
u=50
d=10
n=0
while d>=0.01:
    u = 0.7*u+20
    d = 200/3 - u
    n = n + 1
print(n)
```

En utilisant une boucle « Tant que », écrire en langage naturel un algorithme qui décrit exactement ce que fait ce programme.

4 Fonctions



20 min

Corrigé
p. 19

Lycée Fénélon, Paris

x étant un réel, on considère les fonctions :

$$A(x) = 5 - \frac{3}{x^2}, B(x) = 3(x + 2)^2 + 4, C(x) = \frac{4}{2x + 1} \text{ et } D(x) = 6 - \frac{7}{x}.$$

Programmer ces fonctions en Python.

5 Un programme



20 min

Corrigé
p. 19

Lycée Turgot, Paris

On considère le programme suivant :

```
1 def f(x):
2     y=(x+2)*(x-1)
3     y=4*y
4     y=y+8
5     y=y/(x+1)
6     return y
```

- 1 Quel est le type des variables x ? y ? f ?
- 2 Pour quelle(s) valeur(s) de x l'algorithme va-t-il échouer ?
- 3 Que fait la fonction f ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

6 Pécule



15 min

Corrigé
p. 19

Lycée Rabelais, Meudon

Les parents de Johanna décident de lui constituer un petit pécule. Le jour de sa naissance, ils déposent 250 € sur un compte rapportant 2,75 % par an.

À chaque anniversaire, ils ajoutent également 250 €.

- 1 Écrire un algorithme avec une boucle POUR... qui permet de calculer le pécule de Johanna le jour de ses 18 ans.
- 2 Programmer cet algorithme en Python ou sur votre calculatrice.

7 Lecture d'un algorithme



10 min

Corrigé
p. 20

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : n, r, i, c (nombres entiers)
Début :
  c ← 0
  Lire la valeur de n
  i ← 2
  Tant que i**2 ≤ n répéter
    Si (n/i) est un entier alors
      c ← c+1
      i ← i+1
    Fin Si
  Fin Pour
  Si c=0 alors
    Afficher n " est un nombre premier"
  Sinon
    Afficher n " n'est pas un nombre premier"
  Fin Si
Fin
```

- 1 Exécuter à la main cet algorithme en prenant $n = 20$ puis $n = 23$ (présenter les résultats dans un tableau).
- 2 Expliquer le rôle de cet algorithme et la propriété qu'il semble utiliser.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

8 Laboratoire pharmaceutique



10 min

Corrigé
p. 21

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Un laboratoire produisant un sirop contre la fièvre à destination de nouveaux-nés fournit le protocole médical suivant : pour une température corporelle dépassant 38,5°C, donner 2 cuillères de sirop. Pour une température corporelle comprise entre 37,5°C et 38,5°C, donner 1 cuillère de sirop.

On considère le programme Python suivant :

```
def sirop(T):
    N = 0
    if T > 38.5:
        N = ...
    if T >= 37.5:
        N = ...
    return N
```

- 1 À quoi sert cette fonction ? Préciser à quoi correspondent les variables T et N.
- 2 Compléter la fonction.
- 3 Le cas où le nouveau-né n'a pas de fièvre (température corporelle inférieure à 37,5°C) est-il prévu dans l'algorithme ? On pourra justifier la réponse en testant l'algorithme avec le nombre 37 en entrée.

9 Le site marchand



10 min

Corrigé
p. 21

Lycée Fénélon, Paris

Durant tout le week-end, un site marchand propose une promotion pour toute commande d'un montant minimum de 20 €.

Si le montant de la commande est :

- strictement inférieur à 100 €, une remise de 10 € est offerte.
- entre 100 € compris et 200 € non compris, une remise de 25 € est offerte.
- supérieur ou égal à 200 €, une remise de 20% est offerte.

- 1 Calculer le prix à payer pour une commande d'un montant de 130 €, de 80 € et de 300 €.
- 2 On a commencé l'écriture d'une fonction Python qui automatise le calcul du prix à payer pour une commande de montant $M \geq 20$:

```
def prix(M):
    if M >= 20 and M < 200:
        return .....
    if ..... :
        return .....
    return .....
```

Compléter le code pour qu'il fonctionne correctement.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

10 Calcul mental



20 min

Corrigé
p. 22

Lycée Masséna, Nice

Un logiciel éducatif choisit aléatoirement deux entiers entre 1 et 10. L'utilisateur doit alors entrer leur produit, et doit recommencer jusqu'à ce que sa réponse soit juste.

Écrire l'algorithme en langage naturel puis le programmer en Python.

L'instruction `randint(1,11)` renvoie un entier au hasard entre 1 et 10. L'instruction `reponse=int(input("..."))` affiche une chaîne de caractères et permet à l'utilisateur d'entrer une valeur entière stockée dans la variable `reponse`.

11 Le nombre d'or



20 min

Corrigé
p. 23

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Le *nombre d'or* est le nombre positif noté φ tel que :

$$\varphi^2 = \varphi + 1.$$

- 1 Expliquer pourquoi $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.
- 2 Montrer alors que $\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}$.
- 3 En s'inspirant des questions précédentes, écrire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée du nombre d'or (peu importe la précision).

12 La conjecture de Syracuse



20 min

Corrigé
p. 24

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

On considère la fonction A , qui à tout entier naturel n associe :

$$A(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

- 1 Calculer $A(1)$, $A(4)$, $A(2)$.
- 2 Programmer cette fonction en Python.
- 3 On considère le programme de calcul suivant :

1. Choisir un nombre entier n non nul.
2. Affecter $n \leftarrow A(n)$
3. Aller à l'étape 2.

Que se passe-t-il si $n = 1, 2$, ou 4 ?

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

- 4 La conjecture de Syracuse (nommée ainsi car le problème fut diffusé pour la première fois à l'université de Syracuse, en Amérique, par le mathématicien Helmut Hasse) affirme que, quel que soit la valeur initiale de n , le programme arrive toujours à la suite de nombres 1, 4, 2, 1, 4, 2,...

On dit que ce résultat est une *conjecture* car il semble vrai mais il n'a pas été démontré.

Écrire un algorithme qui permet de vérifier cette conjecture pour n'importe quel nombre entré par l'utilisateur.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 QCM Entiers de 1 à 9Enoncé
p. 12

- a** Cette instruction n'est pas une boucle. Dans le meilleur cas, seule une valeur de k s'affichera à l'écran.
- b** Il s'agit bien d'une boucle, mais la valeur de k n'est pas incrémentée. Elle gardera donc toujours la valeur 1, et cette valeur sera affichée à l'écran un nombre indéfini de fois, jusqu'à ce que l'utilisateur arrête le programme ! On peut corriger le programme en ajoutant $k = k + 1$ dans la boucle pour incrémenter la variable k .
- c** C'est la solution élégante et efficace pour le problème posé.
- d** Attention, en Python la borne finale est toujours exclue, les entiers de 1 à 8 seront affichés.

```
k = 1
while k < 10:
    print(k)
    k = k + 1
```

2 QCM De Python à un algorithmeEnoncé
p. 12

Rappelons qu'en Python, la grande borne de l'intervalle est exclue, donc i prend les valeurs 0, 1, 2, ..., 9.

L'algorithme **a** n'affiche qu'une valeur car « Afficher x » est en dehors de la boucle « Pour ». Il ne peut donc pas convenir car dans le programme Python, l'indentation montre que l'affichage de x est bien à l'intérieur de la boucle `for`; il faut donc que les valeurs successives de x s'affichent 10 fois. Or, l'algorithme **c** affiche 11 valeurs (car la boucle s'exécute pour i allant de 0 à 10 et il y a 11 valeurs : 0, 1, 2, 3, ..., 9, 10).

La bonne réponse est donc l'algorithme **b** qui affiche bien 10 valeurs (car i prend les valeurs 0, 1, 2, ..., 8, 9) de x .

3 Traduire un programme PythonEnoncé
p. 13**Lycée Hoche, Versailles**

```
Variables : u, d, n (nombres)
Début
    u ← 50
    d ← 10
    n ← 0
    Tant que d ≥ 0,01 Répéter
        u ← 0,7 × u + 20
        d ← 200/3 - u
        n ← n + 1
    Fin Tant que
    Afficher n
Fin
```

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

4 Fonctions

Enoncé
p. 13

Lycée Fénélon, Paris

L'avantage du langage Python est qu'il est à la fois structuré et proche du langage naturel :

```
def A(x):
    return 5-3/x**2

def B(x):
    return 3*(x+2)**2+4

def C(x):
    return 4/(2*x+1)

def D(x):
    return 6-7/x
```

5 Un programme

Enoncé
p. 13

Lycée Turgot, Paris

- 1 x peut être entier ou flottant ; y est flottant (à cause de la division) ; f est une fonction.
- 2 À la ligne 5, on effectue une division par $x + 1$. La valeur $x = -1$ va donc causer une erreur de calcul (division par zéro).
- 3 Au début de l'évaluation de $f(x)$, $y = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$ puis $y = 4(x^2 + x - 2) = 4x^2 + 4x - 8$.
Ensuite, $y = (4x^2 + 4x - 8) + 8 = 4x^2 + 4x$. La valeur finale est $y = (4x^2 + 4x)/(x + 1) = 4x$. Conclusion : la fonction f ne fait que multiplier x par 4.

6 Pécule

Enoncé
p. 14

Lycée Rabelais, Meudon

- 1 Chaque année, le pécule de Johanna est donc multiplié par 1,0275 puis on lui ajoute 250.

Algorithme

```
Variables: anniversaire, pecule (nombres)
Début
    pecule ← 250
    Pour anniversaire allant de 1 à 18
        pecule ← 250+1.0275×pecule
    Fin Pour
    Afficher pecule
Fin
```

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2 La traduction en Python est quasi-immédiate :

```
pecule = 250
for anniversaire in range(1,19):
    pecule = 250 + 1.0275*pecule
print(pecule)
```

Programme TI : PROGRAM PECULE
: 250 → P
: For (A,1,18)
: 1.0275 P + 250 → P
: End
: Disp P

Programme Casio : ===== PECULE =====
250 → P :
For 1 → A To 18
1.0275 P + 250 → P
Next :
P ▴

Les trois programmes fournissent la valeur 6130.75365, Johanna disposera donc de 6 130,75 € à son 18^{ème} anniversaire.

7 Lecture d'un algorithme

➔ **Enoncé**
p. 14

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

- 1 • La variable i est initialisée à la valeur 2, puis est incrémentée tant qu'elle reste inférieure ou égale à $\sqrt{n}$. Pour $n = 20$, i varie de 2 à 4.

Valeurs de i	-	2	3	4
Valeurs de c	0	1	1	2

Explications : quand $i = 2$, on fait la division $20 \div 2$ et on trouve un nombre entier (10). Donc c va augmenter de 1.

Ensuite, pour $i = 3$, comme $20 \div 3$ n'est pas un entier, c n'augmente pas.

Enfin, pour $i = 4$, $20 \div 4 = 5$ est un entier donc on ajoute 1 à c .

L'algorithme affiche ici : « 20 n'est pas un nombre premier » car $c \neq 0$.

- Pour $n = 23$, i varie également de 2 à 4.

Valeurs de i	-	2	3	4
Valeurs de c	0	0	0	0

En effet, parmi les nombres 2, 3 et 4, aucun ne sont diviseurs de 23 donc c n'augmente pas.

L'algorithme affiche donc ici : « 23 est un nombre premier » car $c = 0$.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

- 2 A priori, cet algorithme compte les diviseurs de n compris entre 2 et $\sqrt{n}$. Le résultat est stocké dans le compteur c . Si c est égal à 0, l'algorithme en déduit que n est un nombre premier.

Cet algorithme semble s'appuyer sur une propriété qui pourrait s'écrire ainsi :

Si a est un entier de $]\sqrt{n}, n[$ qui divise n , alors $b = \frac{n}{a}$ est un entier de $]1, \sqrt{n}]$ qui divise n . Par conséquent, « Si un entier n n'admet aucun diviseur dans $[2, \sqrt{n}]$, alors il est premier. »

8 Laboratoire pharmaceutique

→ Enoncé
p. 15

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

- 1 Cet algorithme permet d'afficher le nombre de cuillères de sirop N à donner en fonction de la température T saisie.
- 2 La fonction complète est :

En Python

```
def sirop(T):  
    N = 0  
    if T > 38.5:  
        N = 2  
    if T >= 37.5:  
        N = 1  
    return N
```

- 3 Comme l'énoncé nous le suggère, on peut tester le cas où l'on appelle la fonction avec 37 en argument.
- Les deux conditions $T > 38.5$ et $T \geq 37.5$ ne sont pas satisfaites et les instructions $N=2$ et $N=1$ ne sont pas exécutées. La valeur de N reste donc à 0, valeur retournée par la fonction.
- Ceci est correct car si le nouveau-né n'a pas de fièvre, aucune cuillère de sirop ne doit être donnée.
- Ainsi, le cas où le nouveau-né n'a pas de fièvre est prévu par l'algorithme.

9 Le site marchand

→ Enoncé
p. 15

Lycée Fénélon, Paris

- 1 • Pour 130 €, le prix à payer est :

$$130 - 25 = 105 \text{ €} \quad \text{car } 100 \leq 130 < 200.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- Pour 80 €, le prix à payer est :

$$80 - 10 = 70 \text{ €} \quad \text{car } 80 < 100.$$

- Pour 300 €, le prix à payer est :

$$\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 300 = 0,8 \times 300 = 240 \text{ €} \quad \text{car } 300 \geq 200.$$

2

```
def prix(M):
    if M>=20 and M<200 :
        return M-25
    if M>=200 :
        return M*.8
    return M
```

Pour $M \in [20, 200[$, on retire 25 à M . Si $M \geq 200$, on fait une remise de 20%, on doit donc payer $0,8 \times M$. Si aucune des deux conditions n'est vérifiée, on atteint la dernière ligne, et M est renvoyé (pas de remise).

10 Calcul mental

Lycée Masséna, Nice

Enoncé
p. 16

Après le choix des deux entiers par la machine, l'utilisateur entre une réponse. Elle est comparée au produit. TANT QU'ELLE est fausse, on affiche "Mauvaise réponse" et on repose la question. Dès que la réponse est bonne, on sort de la boucle et "Gagné" est affiché. On note que si l'utilisateur a la bonne réponse dès le premier essai, la boucle n'est pas exécutée.

```
Variables : a, b, produit, reponse (nombres entiers)
Début :
    a ← (entier aléatoire entre 1 et 10)
    b ← (entier aléatoire entre 1 et 10)
    produit ← a × b
    Lire reponse
    Tant que reponse != produit répéter
        Afficher "mauvaise réponse!"
        Lire reponse
    Fin Tant que
    Afficher "Gagné!"
Fin
```

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

Traduction en Python : on utilise les commandes qui sont données dans l'énoncé.

```
live!
a=randint(1,11)
b=randint(1,11)
produit=a*b
print(a,"*",b,"= ?")
reponse=int(input("réponse ?"))
while reponse != produit:
    print("mauvaise réponse")
    reponse=int(input("réponse ?"))
print("Gagné!")
```

11 Le nombre d'or

Enoncé
p. 16

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

- 1 Si $\varphi^2 = \varphi + 1$ alors il est facile de voir que $\varphi \neq 0$ donc on peut diviser cette égalité par φ :

$$\frac{\varphi^2}{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi} + \frac{1}{\varphi} \quad \text{soit :} \quad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

- 2 Dans l'égalité montrée à la question précédente, on remplace le φ du membre de droite par ce à quoi il est égal, à savoir $1 + \frac{1}{\varphi}$:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}.$$

- 3 Ce que nous avons fait à la question 2 peut être répété à l'infini :

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}} \\ &= \dots \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Ainsi, en généralisant, on pourrait considérer que :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Ce résultat se démontre, mais pas en classe de Seconde.

Pour calculer une valeur approchée de φ , on peut essayer de partir d'une variable f valant 1, puis faire une boucle dans laquelle f deviendra $1 + \frac{1}{f}$.

```
Variables
  n est un nombre
  f est un nombre
Initialisation
  f prend la valeur 1
Début
  Pour n allant de 1 à 100
    f prend la valeur 1+1/f
  Fin Pour
  Afficher f
Fin
```

Ici, nous avons souhaité répéter 100 fois l'instruction « f devient $1 + \frac{1}{f}$ », mais on peut bien sûr changer cette valeur (100) et mettre 200, 300, ...

En Python

```
f=1
for n in range(100):
    f = 1 + 1/f
print(f)
```

En exécutant ce programme, la valeur affichée est :

1,618034.

12 La conjecture de Syracuse

➔ Enoncé
p. 16

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

- 1 $n = 1$ est impair, donc $A(1) = 3 \times 1 + 1 = 4$; $n = 4$ est pair, donc $A(4) = \frac{4}{2} = 2$; $n = 2$ est pair, donc $A(2) = 1$.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

2

 En Python

```
def A(n):
    if n%2==0:
        return n//2
    else:
        return 3*n+1
```

L'instruction `n%2` calcule le reste de la division euclidienne par 2, qui vaut 0 si et seulement si n est pair. La division `n//2` est la division entière. Il est important de ne pas utiliser `n/2` qui donne un flottant (même si n est pair) et risque de poser des problèmes pour utiliser la valeur de $A(n)$ par la suite.

3

D'après la première question, si n prend la valeur 1, elle prend ensuite la valeur 4, puis 2, puis de nouveau 1, etc. Si $n = 2$ ou 4, on atteint la valeur $n = 1$ en 1 ou 2 étapes. Le programme donne alors la suite 1, 4, 2, 1, 4, 2, etc.

4

Vue la troisième question, nous arrêtons le programme dès que n atteint la valeur 1. Tant que cette valeur n'est pas atteinte, on remplace la valeur de n par celle de $A(n)$.

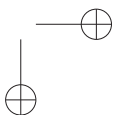
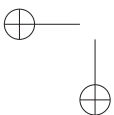
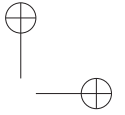
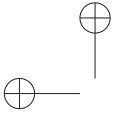
```
n=120
while A(n)!=1:
    print(A(n))
    n=A(n)
```

Par exemple, pour $n = 120$, on obtient : 60, 30, 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1...

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Chapitre

2

Les nombres

Plan du chapitre

1. Les différents types de nombres
2. Calculer avec les entiers
3. Savoir factoriser et développer
4. Savoir manier les fractions et les radicaux

1 Les différents types de nombres

Exercice type 1

Lycée Edgar Quinet, Bourg-en-Bresse

- 1 Parmi les nombres suivants :
 -11 ; $2,4$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{36}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{21}{3}$; quels sont ceux qui sont rationnels, irrationnels, entiers naturels ou relatifs ?
- 2 Compléter par $\in$ ou $\notin$:
 $\sqrt{2} \dots \mathbb{R}$; $\sqrt{64} \dots \mathbb{Z}$; $\frac{3}{7} \dots \mathbb{N}$; $\pi \dots \mathbb{Q}$.

Voir corrigé page 30

1.1 Les nombres réels et leur valeur absolue

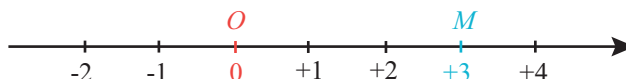
Sur une droite D donnée, choisissons une unité de longueur et un point particulier, que l'on appelle O (appelé point-origine). On choisit, de part et d'autre de O , un « côté positif », l'autre côté étant « négatif » : on a ainsi orienté la droite D .

Tout point M de cette droite peut être déterminé en donnant la distance OM et le côté où se trouve M .

L'abscisse du point M est $+OM$ si M est du côté positif et $-OM$ dans le cas contraire.

Notons que l'abscisse de l'origine est 0.

Exemple : sur la droite ci-dessous, le côté positif est à droite de l'origine (c'est la convention habituelle). Le point M est d'abscisse $+3$, car M est du côté positif et la distance de O à M est de 3 unités de longueur :



Les abscisses des points de la droite sont appelées des *nombre réels* (du latin *res*, la chose : ils servent à repérer des « choses » concrètes sur la droite).

La valeur absolue $|x|$ du réel x (abscisse de M) est la distance OM . On l'appelle également « distance à 0 ». C'est toujours un nombre positif.

Par exemple, $|-1,2| = +1,2$.

La différence $x - y$ entre deux nombres réels peut être positive ou négative. Sa valeur absolue $|x - y|$ mesure la distance entre x et y .

Par exemple, la distance entre -3 et 7 est $|-3 - 7| = 10$.

1.2 Les ensembles de nombres

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}.$$

- On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}.$$

- On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où $n \in \mathbb{N}$ (n appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$) et $a \in \mathbb{Z}$.

- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls).

- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire de tous les nombres.

Les nombres réels ne sont pas tous rationnels. Par exemple, $\sqrt{2}$ ne peut pas se mettre sous la forme $\frac{p}{q}$.

 Retrouvez en vidéo la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ avec 

Si un ensemble est suivi d'une étoile en exposant, il a pour éléments tous les nombres de cet ensemble sauf 0.

Exemple : $\mathbb{N}^* = \{1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$

Si on souhaite enlever un ou plusieurs nombres à un ensemble, on le fera suivre de : $\setminus \{\dots\}$.

Exemples

- $\mathbb{Q} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ désigne l'ensemble de tous les rationnels sauf $\frac{1}{3}$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres irrationnels.

Il existe un ensemble sans élément, appelé l'*ensemble vide*, et on le note : $\emptyset$.

Remarque : un ensemble A est inclus dans un ensemble B si *tous* les éléments de A appartiennent à B .
 $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, qui lui-même est inclus dans $\mathbb{D}$, etc. jusqu'à $\mathbb{R}$. On écrira alors :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.3 Un nombre et plusieurs formes

Un nombre réel peut être *représenté* de plusieurs façons. Par exemple :

$$\frac{51}{5} = \frac{5,1}{0,5} = 10,2 = 1,02 \cdot 10^1$$

ou encore :

$$\frac{4}{3} = 1,3\overline{3} \dots$$

Quelle que soit l'écriture adoptée, il s'agit toujours du *même* nombre. En particulier :

- $\frac{51}{5}$ est un nombre décimal ;
- $\sqrt{9}$ est un nombre entier naturel ;
- 45 est un nombre rationnel ;
- 1,3 est un nombre rationnel ;
- 34,0 est un nombre entier.

Ces caractéristiques (décimal, entier, etc.) sont celles du nombre lui-même et non de son écriture.

Ceci dit, selon le nombre rencontré, on préférera l'écrire sous la forme la plus simple. Par exemple, on écrira 3 plutôt que $\sqrt{9}$.

1.4 Développement décimal d'un réel

Un nombre décimal x peut s'écrire à l'aide d'une virgule, par exemple 23,157 : chaque multiplication par 10 décale la virgule d'un rang. S'il y a k décimales après la virgule, k multiplications permettent d'obtenir un entier, ici : 23157.

Si on divise 1 par 3 à la calculatrice, on obtient : 0,333 333 333. Pourtant, $1/3$ n'est pas un nombre décimal (voir vidéo).

Ceci n'est pas une écriture décimale *exacte* de $\frac{1}{3}$, mais seulement une approximation de $\frac{1}{3}$ par un nombre décimal.

⚠ ATTENTION

Les nombres réels ne sont pas tous décimaux.

🎬 Retrouvez la vidéo avec 

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On peut encadrer tout nombre réel entre deux nombres décimaux ayant n chiffres après la virgule. Par exemple : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$. L'écart entre les deux bornes est de 10^{-3} : il s'agit d'un encadrement à 10^{-3} près. On dit aussi que 1,414 est un développement de $\sqrt{2}$ avec 3 décimales exactes.

On peut pousser le développement du réel x et obtenir un nombre arbitraire de décimales.

Trois cas peuvent se présenter :

- Si $x \in \mathbb{D}$, les décimales sont toutes égales à zéro à partir d'un certain rang. On parle de développement décimal fini. Le développement décimal des autres nombres est *illimité*.
- Si x est rationnel, le développement va présenter une périodicité, c'est-à-dire qu'un motif va se répéter indéfiniment. Par exemple : $x = 1,324\,242\,424\ldots$. On peut constater que x est bien rationnel car :

$$10x = 13,242\,4\ldots, \quad 1\,000x = 1\,324,242\,4\ldots$$

$$\text{et donc } 1000x - 10x = 1\,311, \text{ d'où } x = \frac{1\,311}{990} = \frac{437}{330}.$$

- Si x est irrationnel, le développement est apériodique (il n'y a pas de période). C'est le cas du développement décimal de π , par exemple.

$$\pi \approx 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\,169\,399\,375\ldots$$

➔ Solution de l'exercice type 1

Lycée Edgar Quinet, Bourg-en-Bresse

1 $-11 \in \mathbb{Z}; 2,4 \in \mathbb{D}; \sqrt{7} \in \mathbb{R}; \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{N}; -\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}; \frac{21}{3} = 7 \in \mathbb{N}.$

2 $\sqrt{2} \in \mathbb{R}; \sqrt{64} \in \mathbb{Z}; \frac{3}{7} \notin \mathbb{N}; \pi \notin \mathbb{Q}.$

Voir énoncé page 27

2 Calculer avec les entiers

Exercice type 2

- 1 Décomposer 60 en produit de facteurs premiers.
- 2 Un terrain rectangulaire de longueur a , de largeur b (exprimées en mètres), a une aire de 60 m^2 . Sachant que a et b sont des entiers naturels et que l'écart $a - b$ est le plus petit possible, déterminer a et b .

Voir corrigé page 34

2.1 Savoir utiliser les multiples et les diviseurs

Définition 1

Soient a et b sont deux entiers relatifs. S'il existe un entier q tel que $a = bq$, alors on dit que :

- a est un multiple de b
- b est un diviseur de a (ou « b divise a »).

Par exemple, 21 est un multiple de 7 (car $21 = 7 \times 3$), 5 est un diviseur de 15 (car $15 = 5 \times 3$).

Tous les entiers sont multiples de 1 (et de -1). 0 est le seul multiple de 0. Tout entier est multiple de lui-même (car $n = n \times 1$).

Inversement, 1 n'est multiple que de 1 (et -1), et 0 est multiple de tous les entiers (car $0 = n \times 0$).

Propriété 1

- L'opposé d'un multiple de b est multiple de b .
- La somme (ou la différence) de deux multiples de b est un multiple de b .

En effet, cette somme s'écrit : $bq + br = b(q + r)$, avec q et r (et donc $q + r$) entiers.

Exemple : si 7 divise $n + 21$, alors divise n . En effet, $n = (n + 21) + (-21)$ et 21 est multiple de 7.

La fonction suivante `diviseur(k,n)` vérifie si l'entier k est diviseur de l'entier naturel n . Le principe de l'algorithme est de faire défiler les multiples de k : 0, k , $2k$, $3k$, etc., tant que ces multiples sont inférieurs strictement à n . Lorsque la boucle s'arrête, le multiple de k qu'on a atteint vérifie : soit $m = n$, donc n est multiple de k , soit $m > n$, donc n est compris au sens strict entre deux multiples consécutifs, donc n n'est pas multiple de k .

```
def diviseur(k,n):
    m = 0
    while m < n:
        m = m + k
    return m == n
```

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

À noter : `m==n` vaut déjà `True` ou `False`. Il est donc inutile d'écrire une instruction conditionnelle du type :

```
if m==n:
    return True
...
```

Rappelons quelques propriétés permettant de vérifier la divisibilité dans quelques cas particuliers. L'entier n est divisible :

- par 2 si son écriture se termine par 0, 2, 4, 6, ou 8 (chiffre des unités) ;
- par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- par 5 si son écriture se termine par 0 ou 5 ;
- par 6 si n est divisible par 2 et par 3 ;
- par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- par 10^k si son écriture se termine par k zéros ;
- par 11 si la somme des chiffres de rang pair est égale à la somme des chiffres de rang impair (par exemple 49137 est divisible par 11 car $4 + 1 + 7 = 9 + 3$). Ce dernier critère est moins connu mais les précédents sont très fréquemment utilisés.

Définition 2

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. La fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si a et b n'ont pas de diviseur commun (autre que 1 ou -1).

Par exemple, $\frac{15}{8}$ est irréductible, mais $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

En général, il est bon de présenter les fractions sous forme irréductible, mais il ne faut pas le faire trop tôt dans les additions : pour calculer $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$, il serait malvenu de « simplifier » : $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \dots?$

2.2 Pairs et impairs

Définition 3

Les multiples de 2 sont les entiers *pairs*. Les autres entiers sont *impairs*.

Par définition, les entiers pairs sont donc de la forme $2n$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

Les entiers impairs sont de la forme $2n + 1$.

Propriété 2

- Le carré d'un entier pair est pair.
- Le carré d'un entier impair est impair

En effet, si $x = 2n$, alors $x^2 = 4n^2 = 2 \times (2n^2)$, donc x^2 est pair.

Si $x = 2n + 1$, alors $x^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, donc x^2 est impair.

On a ici une disjonction de cas : un entier x est, soit pair, soit impair. On peut donc énoncer la réciproque du résultat précédent :

Propriété 3

Soit x un entier.

- Si x^2 est pair, alors x est pair.
- Si x^2 est impair, alors x est impair.

2.3 Nombres premiers

Définition 4

Un entier naturel est *premier* s'il admet exactement *deux* diviseurs positifs : 1 et lui-même.

L'entier 1 n'est donc pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur dans $\mathbb{N}$: lui-même. 2 est le plus petit nombre premier : ses diviseurs positifs sont 1 et 2. C'est le *seul* nombre premier pair, car les autres nombres pairs n sont multiples de 2, de 1 et... de 2.

Les 10 plus petits nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Écrivons un programme simple permettant de vérifier si un entier naturel est premier. On teste successivement tous les diviseurs possibles entre 2 et $n - 1$. Notons que `return` interrompt l'évaluation de la fonction. Ainsi, si notre fonction `premier` détecte un diviseur, elle renvoie `False` et s'arrête. Si on atteint la ligne avec le second `return`, c'est qu'on n'a pas trouvé de diviseur entre 2 et $n - 1$, donc n est premier.

```
def premier(n):
    for k in range(2,n):
        if diviseur(k,n):
            return False
    return True
```

Un ordinateur est rapide, mais pour vérifier « à la main » si un entier n est premier, ou si cet entier est grand, il faut améliorer l'algorithme. Remarquons qu'il est inutile de tester tous les nombres compris entre 2 et $n - 1$.

Par exemple, si on sait que n n'est multiple ni de 2, ni de 3, il est inutile de vérifier s'il est multiple de 4 ou de 6. Il suffit donc de tester si n admet un diviseur *premier* entre 2 et $n - 1$.

Exemple : vérifions que 97 est premier.

En appliquant les critères classiques, on voit que 97 n'est multiple ni de 2, ni de 3, ni de 5.

Pour 7, c'est un peu plus difficile, mais on peut voir, par exemple, que 77 est multiple de 7 et que l'écart $97 - 77 = 20$ n'est pas divisible par 7.

Enfin, 97 n'est pas divisible par 11 car trop proche de $99 = 9 \times 11$.

On pourrait continuer à tester : 13, 17, etc., mais c'est inutile. En effet, nous venons de vérifier que les diviseurs supérieurs à 1 de 97 sont nécessairement plus grands que 11.

Mais si $97 = pq$ avec $p > 11$ et $q > 11$, alors $97 > 121$, ce qui est absurde. On peut donc conclure que 97 n'a pas de diviseur entre 2 et 96.

➡ Solution de l'exercice type 2

- 1 On essaye les nombres premiers à partir du plus petit : $60 = 2 \times 30$, puis $30 = 2 \times 15$. Ensuite, $15 = 3 \times 5$. Finalement, $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.
- 2 Pour décomposer 60 en produit de deux facteurs, à part $60 = 1 \times 60$, on peut considérer que le premier facteur est premier et le second produit de trois diviseurs premiers, ou que les deux facteurs sont produits de deux diviseurs premiers.
On obtient ainsi $60 = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 5 \times 12 = 4 \times 15 = 6 \times 10$. On a trouvé toutes les décompositions possibles de 60 sous la forme ab . On veut $a - b \geq 0$ et $a - b$ le plus petit possible, on a donc $a = 10$ et $b = 6$.

Voir énoncé page 30

3 Savoir factoriser et développer

Exercice type 3

Lycée Alain Fournier, Bourges

Factoriser $A = 18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2$.

Voir corrigé page 37

3.1 Développement

Développer, c'est transformer un produit en une somme (ou une différence).

Dans les énoncés ci-dessous, le membre de gauche contient une expression factorisée, et le membre de droite l'expression équivalente développée.

Propriété 4 : distributivité

Pour tous nombres a , b , c et d , on a :

- $a(b + c) = ab + ac$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Propriété 5 : identités remarquables

Pour tous nombres a et b , on a :

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Par exemple si on veut développer l'expression :

$$B = (x - 2)^2 - (x - 3)(2x + 5),$$

on écrira :

$$\begin{aligned}B &= x^2 - 4x + 4 - (2x^2 + 5x - 6x - 15) \\ &= x^2 - 4x + 4 - 2x^2 - 5x + 6x + 15.\end{aligned}$$

Réduire, c'est, après avoir développé, effectuer toutes les additions possibles :

$$B = -x^2 - 3x + 19.$$

En général, les énoncés portent la mention « développer et réduire », il est conseillé dans tous les cas de réduire. On peut effectuer des réductions partielles au cours du calcul, *dans la mesure où on respecte les règles de priorité*.

Par exemple, on pourra écrire :

$$\begin{aligned}B &= x^2 - 4x + 4 - (2x^2 + 5x - 6x - 15) \\ &= x^2 - 4x + 4 - (2x^2 - x - 15) \\ &= x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + x + 15 \\ &= -x^2 - 3x + 19.\end{aligned}$$

3.2 Factorisation

Factoriser, c'est effectuer le procédé inverse de développer : on transforme une somme en un produit.

Dans un premier temps, on essaye de repérer un facteur commun. Par exemple, dans l'expression :

$$(x + 2)(x - 5) - 4(x + 2),$$

$(x + 2)$ est un facteur commun à $(x - 5)$ et à (-4) .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On choisit : $k = (x + 2)$, $a = (x - 5)$ et $b = -4$ pour appliquer la propriété : $ka + kb = k(a + b)$.

Cela donne :

$$(x + 2)(x - 5) - 4(x + 2) = (x + 2)[(x - 5) - 4].$$

L'expression du membre de droite est factorisée.

En général, même quand ce n'est pas demandé, on préfère développer et réduire le second facteur.

On obtient :

$$(x + 2)(x - 5) - 4(x + 2) = (x + 2)(x - 9).$$

Il arrive parfois qu'un facteur commun soit « caché » parce qu'il est multiplié par une constante.

Par exemple, dans l'expression :

$$(x + 2)(x - 5) - 4x - 8,$$

on a le facteur commun $(x + 2)$ qui n'est pas apparent.

En effet :

$$-4x - 8 = -4(x + 2).$$

Et on retrouve l'expression précédente.

Enfin, si aucun facteur commun n'est visible, on peut essayer d'utiliser une identité remarquable.

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Remarquez que dans ces égalités, le membre de gauche est une somme, et le membre de droite un produit (ne perdez pas de vue qu'un carré est un produit). Ce sont donc, écrites sous cette forme, des factorisations. Essayons de factoriser, par exemple :

$$B = x^2 - 16 + (x - 3)(x - 4).$$

Il n'y a pas de facteur commun évident. En revanche, la première partie de l'expression fait intervenir l'identité remarquable

$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4).$$

On peut donc terminer la factorisation :

$$\begin{aligned} B &= (x + 4)(x - 4) + (x - 3)(x - 4) = (x - 4)[(x + 4) + (x - 3)] \\ &= (x - 4)(x + 4 + x - 3) = (x - 4)(2x + 1). \end{aligned}$$

Si aucune des méthodes précédentes n'aboutit, on peut éventuellement *développer* l'expression, dans l'espoir de faire apparaître quelque chose d'intéressant. Cette méthode (développer pour espérer factoriser) ne s'applique qu'à des cas *très* rares, dont voici un exemple :

$$C = 2x^2 - 6x + 29 + 2(x + 2)(x - 5)$$

LES NOMBRES • CHAP. 2

Il n'y a pas de facteur commun évident, et $2x^2 - 6x + 29$ n'est pas le développement d'un produit remarquable. On développe :

$$\begin{aligned} C &= 2x^2 - 6x + 29 + 2(x^2 - 5x + 2x - 10) \\ &= 2x^2 - 6x + 29 + 2x^2 - 10x + 4x - 20 \\ &= 4x^2 - 12x + 9. \end{aligned}$$

Ouf ! $4x^2 - 12x + 9$ ne pose (presque) pas de problème, puisqu'il s'agit du développement (remarquable) de $(2x - 3)^2$.

➔ Solution de l'exercice type 3

Lycée Alain Fournier, Bourges

Aucun facteur commun ne saute aux yeux. La première partie de l'expression fait penser à la deuxième identité remarquable, mais $18x^2$ et 8 ne sont pas des carrés parfaits. Faut-il se résoudre à tout développer, en attendant un miracle ? Si nos avertissements du paragraphe précédent ne vous ont pas convaincu(e), sachez que le développement de A donne : $12x^2 - 29x + 14$, ce qui n'est pas facilement factorisable.

Une fois pour toutes, rappelez-vous que, lorsqu'il faut factoriser, commencer par développer est une solution extrême, à utiliser avec circonspection.

Il vaut mieux examiner de plus près chacun des éléments de A. Souvent, ces éléments ne sont pas disposés au hasard, et l'ordre dans lequel ils sont écrits peut vous aider. Pourquoi a-t-on écrit séparément $18x^2 - 24x + 8$ et $-3x + 2$, et non pas directement $18x^2 - 27x + 10$? Tout simplement, pour vous faire voir plus facilement le facteur 2 qui se cache dans $18x^2 - 24x + 8$! Regardez bien : $18x^2 - 24x + 8 = 2(9x^2 - 12x + 4)$.

Ceci est déjà plus sympathique, puisque $(9x^2 - 12x + 4)$ est le développement du produit remarquable $(3x - 2)^2$.

Or, $(3x - 2)$ apparaît plusieurs fois dans A, puisque $6x - 4 = 2(3x - 2)$ et $-3x + 2 = -(3x - 2)$. Nous tenons notre facteur commun ! Toutes ces réflexions, vous devez les mener sur votre brouillon. Cependant, une fois que vous avez trouvé un facteur commun, *ne rédigez pas la solution au brouillon*, vous perdriez votre temps ! Écrivez directement :

$$\begin{aligned} A &= 18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2 \\ &= 2(9x^2 - 12x + 4) - 2(x + 1)(3x - 2) - (3x - 2) \\ &= 2(3x - 2)^2 - 2(x + 1)(3x - 2) - (3x - 2) \\ &= (3x - 2)[2(3x - 2) - 2(x + 1) - 1] \\ &= (3x - 2)(6x - 4 - 2x - 2 - 1) \\ &= (3x - 2)(4x - 7). \end{aligned}$$

Voir énoncé page 34

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 Savoir manier les fractions et les radicaux

Exercice type 4

Lycée Ampère, Lyon

Calculer et écrire sans radicaux au dénominateur :

$$A = \frac{7}{\sqrt{2} + 1} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

Voir corrigé page 40

4.1 Règles de calculs avec les fractions

On rappelle ici les différentes techniques vues au collège :

- *Somme et différence.*

On réduit au même dénominateur. Dans le pire des cas, le produit des dénominateurs peut servir :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Si les dénominateurs ont un diviseur commun intéressant, on peut trouver un dénominateur commun plus petit que le produit :

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}.$$

- *Produit.*

Le numérateur du produit est le produit des numérateurs, le dénominateur du produit est le produit des dénominateurs :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Notez qu'il peut être judicieux de décomposer les différents facteurs et simplifier *avant* de multiplier :

$$\frac{32}{35} \times \frac{25}{8} = \frac{4 \times 8}{5 \times 7} \times \frac{5 \times 5}{8} = \frac{4 \times 8 \times 5 \times 5}{5 \times 7 \times 8} = \frac{4 \times 5}{7} = \frac{20}{7}$$

est préférable (si on calcule à la main) à :

$$\frac{32}{35} \times \frac{25}{8} = \frac{800}{280} = \dots = \frac{20}{7}.$$

Bien sûr, si vous faites le même calcul à la machine, vous pouvez préférer la deuxième méthode, moins économique mais plus directe.

- *Quotient.*

Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse. Par exemple :

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{16} \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4 \times 5} = \frac{3}{20}.$$

Remarque : le mot *fraction* désigne seulement une *écriture* du type : $\frac{a}{b}$. Le nombre ainsi représenté n'est pas nécessairement rationnel. Ainsi, $\frac{\sqrt{2}}{3}$ est un nombre irrationnel, écrit sous la forme d'une fraction.
Rassurez-vous : les règles de calculs que nous venons d'énoncer s'appliquent à toutes les fractions, qu'elles représentent ou non un nombre rationnel.

4.2 Règles de calcul avec les radicaux

Si a et b sont deux réels positifs :

- 1 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
- 2 si $a > 0$ et $b > 0$, alors $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ (car en élevant au carré : $a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$).
- 3 $(\sqrt{a})^2 = a$.
- 4 $\sqrt{a^2} = |a|$. (Par exemple, si $x = -2$, $\sqrt{x^2} = +2$!)

Le mot *radical* désigne une façon d'écrire certains nombres. 2 est une *racine carrée*, (celle de 4), mais ce n'est un radical que si on l'écrit : $\sqrt{4}$.

Dans l'écriture des fractions, on évite de laisser des radicaux au dénominateur.

- *Cas n° 1 :* le dénominateur est un radical. On simplifie en le multipliant par lui-même. Par exemple :

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

- *Cas n° 2 :* le dénominateur est une somme contenant des radicaux. On utilise alors la quantité conjuguée. La quantité conjuguée de $a + b$ est l'expression $a - b$. On fait apparaître un produit remarquable, qui permet de se débarrasser des radicaux. Par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} &= \frac{2 \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2 \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} \\ &= \frac{2 \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

4.3 Règles de calcul avec les puissances

On considère des réels a, b et des entiers relatifs p, q, n . (Si un exposant strictement négatif intervient, il doit s'appliquer à un réel différent de zéro.)

- $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$;
- $a^p \times a^q = a^{p+q}$;
- $a^n \times b^n = (ab)^n$ (avec le même exposant n).
- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

Attention, il n'y a pas de formule simple pour ajouter des puissances.

➡ Solution de l'exercice type 4

Lycée Ampère, Lyon

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{7}{\sqrt{2}+1} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \\
 &= \frac{7 \times (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{2\sqrt{3} \times (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\
 &= \frac{7 \times (\sqrt{2}-1)}{2-1} + \frac{2\sqrt{3} \times (\sqrt{3}+1)}{3-1} \\
 &= 7\sqrt{2} - 7 + \frac{6+2\sqrt{3}}{2} \\
 &= 7\sqrt{2} - 7 + 3 + \sqrt{3} \\
 &= 7\sqrt{2} - 4 + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Voir énoncé page 38

LES NOMBRES • CHAP. 2

1 QCM Décimaux

1 min

→ Corrigé
p. 49

Quels sont les décimaux ?

☐ a $1,27$

☐ b $-\frac{17}{3}$

☐ c $\sqrt{64}$

☐ d $\sqrt{8} - \sqrt{2}$

2 QCM Rationnels

1 min

→ Corrigé
p. 49

Quels sont les rationnels ?

☐ a -15

☐ b $\sqrt{5}$

☐ c $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

☐ d $2,34$

3 V/F Radicaux

2 min

→ Corrigé
p. 49

Vrai ou faux ?

☐ a $\sqrt{2} - 1$ est l'opposé de $\sqrt{2} + 1$

☐ b $\sqrt{2} - 1$ est l'inverse de $\sqrt{2} + 1$

☐ c $\sqrt{8} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

☐ d $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{10}$

☐ e $\sqrt{-4} = -2$

4 V/F Fractions

3 min

→ Corrigé
p. 49

Vrai ou faux ?

☐ a $\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

☐ b $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

☐ c $\frac{3}{5} \times \frac{20}{9} = \frac{4}{3}$

☐ d $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

5 V/F Factorisation

5 min

→ Corrigé
p. 50

Vrai ou faux ?

☐ a x peut être mis en facteur dans $3x^2 + 2x + 5$.

☐ b Pour tout réel x , $(x + 2)^2 = x^2 + 2x + 4$

☐ c Pour tout réel x , $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

☐ d Pour tout réel x , $(2x - 3)(2x + 3) = 2x^2 - 9$

6 V/F Sens des inégalités

5 min

→ Corrigé
p. 50

Vrai ou faux ?

☐ a $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$

☐ b $\sqrt{8} + \sqrt{2} < \sqrt{10}$

☐ c $\sqrt{0,5} > 0,5$

☐ d $(3,1)^3 < 27$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

7 V/F Transformer des inégalités

3 min

Corrigé
p. 50

Vrai ou faux ?

- a** Si $x < 0$ et $x \neq 0$, alors $\frac{1}{x} > 1$ **b** Si $x \geq 2$, alors $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$
c Si $x < -2$, alors $\frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$ **d** Si $x \geq 3$, alors $-2x \leq -6$

8 QCM Nombres premiers

1 min

Corrigé
p. 50

On considère deux entiers premiers p et q , strictement supérieurs à 2. Parmi les entiers suivants, quels sont ceux qui pourraient être premiers ?

- a** $p + q$ **b** $p + q + 1$
c $p + q + 2$ **d** pq

9 Ensembles



10 min

Corrigé
p. 50

Lycée Jacques Prévert, Taverny

Pour chaque nombre, donner le plus petit ensemble, parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ auxquels ils appartiennent :

$$5 \times 10^{-4}, \quad \frac{3,6 \times \sqrt{4}}{3}, \quad \frac{64}{3}, \quad \sqrt{\frac{25}{16}}, \quad \sqrt{\frac{49}{9}}.$$

10 Ensembles



10 min

Corrigé
p. 51

Lycée Montchapet, Dijon

Parmi les nombres suivants :

$$4,567, \quad 10^{-3}, \quad -10^3, \quad 6\,545, \quad 4 \times 10^{-3}, \\ \sqrt{\pi}, \quad -\frac{3}{100}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{22}{9}, \quad \sqrt{3}, \\ \sqrt{144}, \quad 0, \quad \frac{2}{\pi}, \quad -\frac{23}{6}, \quad \sqrt{\sqrt{81}}.$$

- 1** Quels sont ceux qui sont décimaux ?
- 2** Quels sont ceux qui sont rationnels mais non décimaux ?
- 3** Quels sont ceux qui ne sont pas rationnels ?

11 Ensembles



15 min

Corrigé
p. 51

Lycée Victor Louis, Talence

Pour chacun des nombres page suivante,

- 1** Quels sont les nombres décimaux ?
- 2** Quels sont les nombres rationnels non décimaux ?

LES NOMBRES • CHAP. 2

3 Quels sont les nombres non rationnels ?

$$a = 3,507$$

$$b = 5\,998$$

$$c = \sqrt{121}$$

$$d = 3,14$$

$$e = \frac{21}{6}$$

$$f = \pi$$

$$g = 4 \times 10^{-3}$$

$$h = \frac{1}{3}$$

$$i = 5^{-2}$$

$$j = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{8}{5} \times \frac{17}{12}$$

$$k = -\frac{22}{7}$$

$$l = \sqrt{2}$$

$$m = (3^2)^3 \times \frac{1}{9} \times 5^{-4}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{9-5\sqrt{3}}{10}$$

12 Appartenance, inclusion



15 min

Corrigé
p. 52

Lycée Gérard de Nerval, Soissons

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$.

1 $\frac{-15}{3} \dots \mathbb{Z}$

2 $\sqrt{9} \dots \mathbb{N}$

3 $\mathbb{Z} \dots \mathbb{Q}$

4 $\pi \dots \mathbb{Q}$

5 $\mathbb{N} \dots \mathbb{Q}^*$

6 $10^{-3} \dots \mathbb{R}_+$

13 Puissances et fractions



5 min

Corrigé
p. 53

Lycée Henri IV, Paris

Écrire sous la forme $2^n \times 3^p \times 5^q$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$:

1 $A = \frac{5^3 \times 8^3 \times 9^2}{15^2 \times 12^4}$

2 $B = \frac{12^3 \times 15^{-3}}{5^{-2} \times 2^3}$

14 Puissances et fractions



5 min

Corrigé
p. 53

Lycée Hoche, Versailles

Simplifier l'écriture de $A = \frac{(0,2)^3 \times 10^4}{2^3 \times 81} : \frac{-8^3 \times 15}{(-12)^5}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

15 Développements



10 min

Corrigé
p. 53

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Développer les expressions suivantes :

1 $A(x) = 2x(x - 2)(x + 2)$

2 $B(x) = (1 + 3x)^2 - 2(x + 1)(x - 5)$

3 $C(x) = (3x - \sqrt{3})^2$

4 $D(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \quad (x \neq 0)$

16 Factorisations



10 min

Corrigé
p. 54

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Factoriser au maximum :

1 $A(x) = (2x - 3)^2 - (4x + 1)(2x - 3)$

2 $B(x) = (x + 1)^2 - (2x + 3)^2$

3 $C(x) = (x - 1)(2 + x) + (x + 5)(1 - x)$

4 $D(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

5 $E(x) = xy - x - y + 1$

6 $F(x) = (5x + 3)^2 - 11$

7 $G(x) = (x - 1)^2 - 2(x^2 - 1)$

17 Calcul littéral



10 min

Corrigé
p. 55

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Montrer que la somme du produit de trois entiers consécutifs $n - 1$, n et $n + 1$ et de l'entier n est le cube d'un entier.

18 Puissances et fractions



10 min

Corrigé
p. 55

Lycée Louis le Grand, Paris

Calculer :

1 $A = \frac{-1^5(2^3)(-7)^4}{21^2(-6)^3}$

2 $B = \frac{3 - \frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{4}{15} - \frac{1}{10}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} : \frac{1 + \frac{2}{5}}{2 - \frac{1}{5}}$

LES NOMBRES • CHAP. 2

19 Radicaux

★ 5 min

→ Corrigé
p. 56

Lycée Henri IV, Paris

Simplifier afin que le résultat contienne au plus un radical $\sqrt{b}$, où $b \in \mathbb{N}$, et b est le plus petit possible.

1 $C = \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{12}$

2 $D = \sqrt{\frac{6,3}{2,8}} \times \sqrt{\frac{18}{0,72}}$

20 Radicaux

★ 10 min

→ Corrigé
p. 56

Lycée Charlemagne, Paris

Écrire A et B sous la forme $a + \sqrt{b}$, où a et b sont rationnels.

1 $A = \frac{3}{\sqrt{5} + 2}$

2 $B = \frac{2\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} - 1}$

21 Calculs algébriques

★ 5 min

→ Corrigé
p. 57

Lycée Jean Zay, Orléans

Calculer la valeur de l'expression A pour $x = \frac{-1}{3}$ et $y = \frac{5}{2}$:

$$A = 18x^3y - 4xy^2 - y^3$$

22 Radicaux

★ 5 min

→ Corrigé
p. 57

Lycée Louis le Grand, Paris

Calculer

$$A = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + 8\sqrt{2}$$

23 Calcul algébrique

★★ 10 min

→ Corrigé
p. 58

Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

Calculer et simplifier :

1 $\frac{\frac{2}{7} + \frac{5}{21}}{\frac{5}{9} - \frac{1}{3}}$

2 $\frac{(2^{23})^{15}}{2^{1000}}$

3 $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{2}\right)$

4 $\frac{(0,06)^4 \times (1,6)^{-3}}{30 \times (0,0002)^{-10}}$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

24 Radicaux



10 min

Corrigé
p. 59

Lycée André Malraux, Biarritz

- 1 Écrire $(3 - \sqrt{11})^2$ sous la forme $a + b\sqrt{11}$, où a et b sont des nombres entiers relatifs.
- 2 Quel est le signe de $3 - \sqrt{11}$?
- 3 En déduire une autre écriture de $\sqrt{20 - 6\sqrt{11}}$.

25 Calculs algébriques



20 min

Corrigé
p. 60

Lycée Blaise Pascal, Orsay

- 1 Calculer $A = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{5}{6}}$
- 2 Simplifier $B = \frac{(5^2 \times 10^{-5})^3}{(5 \times 10^{-3})^5} \times \left(\frac{10^2}{5}\right)^2$
- 3 Écrire plus simplement :
 (a) $C = 2^{23} \times (0,5)^{24}$ (b) $D = \left(\frac{2}{3}\right)^{108} \times (1,5)^{107}$
- 4 Écriture scientifique de :
 $a = 0,000\,073\,654$
 $b = 9\,325\,000$
 $c = 0,023 \times 10^{-5}$
 $d = 19,402 \times 10^2$

26 Moyennes



25 min

Corrigé
p. 60

Lycée Condorcet, Paris

a et b étant deux réels strictement positifs, on définit A , G , H , par :

$$A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}, \frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

- 1 Calculer A , G , H , sachant que $a = \sqrt{7}$ et $b = 4\sqrt{7}$. Comparer A , G , et H (justifier).
- 2 Mêmes questions avec $a = 2^4$ et $b = 2^2 \times 3^{-2}$.

27 Radicaux



15 min

Corrigé
p. 61

Lycée Hoche, Versailles

- 1 Simplifier :

$$I = \sqrt{50} - 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{18}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

LES NOMBRES • CHAP. 2

$$J = 7\sqrt{\frac{3}{7}} \times \sqrt{\frac{30}{49}}$$

$$K = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$L = \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right)^2$$

- 2** Calculer $(2 - \sqrt{13})^2$ et en déduire une écriture plus simple de $Y = \sqrt{17 - 4\sqrt{13}}$

28 Puissances



5 min

→ Corrigé
p. 63

Lycée Hoche, Versailles

Écrire sous la forme d'un produit de puissances de a , b et c ($\neq 0$) :

$$B = \left(\frac{a^3}{c} \right)^2 : \frac{[(a^7)^5 b^{-2} (c^{-3})^{-2}]^{-1}}{[ab^2(c^{-2})^{-3}]^2}$$

29 Fractions



15 min

→ Corrigé
p. 63

Lycée Louis Le Grand, Paris

Écrire sous la forme d'une fraction :

$$A = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

En déduire :

$$B = \frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13} + \frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14} + \dots + \frac{1}{19 \times 20 \times 21 \times 22}$$

30 Arithmétique



10 min

→ Corrigé
p. 64

Nouveau programme

- 1** Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
- 2** Démontrer que la somme de trois multiples consécutifs de 3 est un multiple de 9.
- 3** La somme de quatre entiers consécutifs est-elle un multiple de 4 ?

31 Arithmétique



10 min

→ Corrigé
p. 65

Nouveau programme

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si a divise $n + 4$ et $2n - 3$ alors a est un diviseur de 11.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

32 Arithmétique



10 min

Corrigé
p. 65

Nouveau programme

Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ tels que $x^2 - y^2 = 5$.

33 Arithmétique



10 min

Corrigé
p. 65

Nouveau programme

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n + 24$.

34 Diviseurs



10 min

Corrigé
p. 66

Nouveau programme

- 1 Montrer que le produit de deux entiers naturels consécutifs est toujours pair.
- 2 Que dire du produit de trois entiers consécutifs ?

35 Nombres premiers



15 min

Corrigé
p. 66

Nouveau programme

On considère un entier n non nul et des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$, deux à deux distincts, et $a = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$.

- 1 L'entier a est-il multiple d'un des p_k ?
- 2 Euclide a utilisé cette propriété pour démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini. Expliquez son argument.

LES NOMBRES • CHAP. 2

1 QCM Décimaux

➔ Enoncé
p. 41

- a** OUI : $1,27 = \frac{127}{100}$ est décimal.
b NON : 3 ne divise ni 10, ni 17, donc $-\frac{17}{3}$ est rationnel, mais il n'est pas décimal.
c OUI : $\sqrt{64} = 8$ est entier, donc décimal.
d NON : $\sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ n'est pas rationnel (donc pas décimal).

2 QCM Rationnels

➔ Enoncé
p. 41

- a** -15 est entier, donc rationnel. **b** $\sqrt{5}$ est irrationnel.
c (Piège !) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{9} = 3$ est entier, donc rationnel !
d 2,34 est décimal, donc rationnel.

3 V/F Radicaux

➔ Enoncé
p. 41

- a** Faux. C'est $-\sqrt{2} - 1$ est l'opposé de $\sqrt{2} + 1$.
b Vrai car $(\sqrt{2} - 1) \times (\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$.
c Vrai car $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
d Faux car $\sqrt{8} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, donc $(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$, et non 10.
e Faux car la racine carrée de -4 n'est pas définie (ne pas confondre avec $-\sqrt{4} = -2$).

4 V/F Fractions

➔ Enoncé
p. 41

- a** Faux mais $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.
b Faux : $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$.
c Vrai : $\frac{3}{5} \times \frac{20}{9} = \frac{3 \times 4 \times 5}{5 \times 3 \times 3} = \frac{4}{3}$.
d Faux car $12 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = 3 + 2 = 5$, alors que $12 \times \frac{2}{3} = 8 \dots$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 V/F Factorisation

→ Enoncé
p. 41

- a** Faux, à cause du 5.
- b** Faux attention au double produit : $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.
- c** Vrai : $(x - 2)^2 = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$.
- d** Faux. On a $(2x)^2 = 4x^2$, donc $(2x - 3)(2x + 3) = 4x^2 - 9$.

6 V/F Sens des inégalités

→ Enoncé
p. 41

- a** Vrai car $3 \times 7 > 5 \times 4$.
- b** Faux car $(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 = 8 + 2 + 2 \times \sqrt{8} \times \sqrt{2} > 10$.
- c** Vrai : en comparant les carrés : $0,5 > 0,25$.
- d** Faux car $3 < 3,1$ donc en élevant au cube : $27 < (3,1)^3$.

7 V/F Transformer des inégalités

→ Enoncé
p. 42

- a** Faux. Si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0$. Ce n'est vrai que si $x \in]0; 1[$.
- b** Vrai.
- c** Faux. Si $x = -10$, alors $\frac{1}{x} = -\frac{1}{10} > -\frac{1}{2}$.
- d** Vrai : la multiplication par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.

8 QCM Nombres premiers

→ Enoncé
p. 42

Il faut observer que comme p et q sont des entiers premiers, différents de 2, ils sont nécessairement impairs.

- a** Non car $p + q$ est pair et $p + q \neq 2$.
- b** Oui. $p + q + 1$ n'est pas toujours premier, mais peut l'être. Par exemple $3 + 7 + 1 = 11$ est premier (mais $3 + 11 + 1 = 15$ ne l'est pas).
- c** Non, pour la même raison qu'à la réponse 1.
- d** Non car pq admet quatre diviseurs distincts : pq , p , q et 1.

9 Ensembles

→ Enoncé
p. 42

Lycée Jacques Prévert, Taverny

- 1** $5 \times 10^{-4} = 0,0005$ est un nombre décimal;

LES NOMBRES • CHAP. 2

2 $\frac{3,6 \times \sqrt{4}}{3} = 1,2 \times 2 = 2,4$ est un nombre décimal ;

3 $\frac{64}{3}$ est rationnel (mais non décimal) ;

4 $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1,25$ est décimal ;

5 $\sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$ est rationnel, non décimal.

10 Ensembles

→ **Enoncé**
p. 42

Lycée Montchapet, Dijon

1 Rappel : un nombre est *décimal* s'il s'écrit sous la forme :

$$\frac{n}{10^k}$$

où n et k sont des entiers. En particulier, les nombres entiers sont des décimaux, puisqu'ils s'écrivent :

$$n = \frac{n}{10^0}.$$

Parmi ceux proposés, sont décimaux : $4,567$ car $4,567 = \frac{4\,567}{1\,000}$; 10^{-3} car $10^{-3} = \frac{1}{1\,000}$; $-10^3 = -1\,000$ est entier ; $6\,545$ est entier ; 4×10^{-3} car $4 \times 10^{-3} = \frac{4}{1\,000}$; $-\frac{3}{100}$; $\sqrt{144} = 12$ est entier ; 0 est entier ; $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$ est entier.

2 Sont rationnels mais non décimaux : $\frac{1}{3}$, $-\frac{22}{9}$, $-\frac{23}{6}$.

3 Sont irrationnels : $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{3}$, $\frac{2}{\pi}$.

11 Ensembles

→ **Enoncé**
p. 42

Lycée Victor Louis, Talence

a est décimal ;

b est entier, donc décimal ;

$c = \sqrt{121} = 11$ est entier, donc décimal ;

$d = 3,14$ est décimal ;

$e = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$ est décimal ;

$f = \pi$ est irrationnel ;

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

$$g = \frac{4}{1\,000} = 0,004 \text{ est décimal ;}$$

$$h = \frac{1}{3} \text{ est rationnel mais non décimal ;}$$

$$i = 5^{-2} = \frac{1}{25} = 0,04 \text{ est décimal ;}$$

$$\begin{aligned} j &= \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{8}{5} \times \frac{17}{12} \\ &= \frac{5}{15} - \frac{9}{15} + \frac{34}{15} = \frac{30}{15} = 2 \text{ est entier ;} \end{aligned}$$

$$k = \frac{-22}{7} \text{ est rationnel, non décimal ;}$$

$$l = \sqrt{2} \text{ est irrationnel ;}$$

$$m = (3^2)^3 \times \frac{1}{9} \times 5^{-4} = \frac{9^2}{5^4} = 0,1296 \text{ est décimal ;}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{9-5\sqrt{3}}{10} \\ &= \frac{10 + (9-5\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{10(\sqrt{3}+1)} \text{ (en réduisant au même dénominateur)} \\ &= \frac{10 + 9\sqrt{3} + 9 - 15 - 5\sqrt{3}}{10(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{4 + 4\sqrt{3}}{10(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{4(1+\sqrt{3})}{10(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{2}{5} = 0,4 \text{ donc } n \text{ est décimal.} \end{aligned}$$

12 Appartenance, inclusion

➔ **Enoncé**
p. 43

Lycée Gérard de Nerval, Soissons

1 $\frac{-15}{3} \in \mathbb{Z} \left(\frac{-15}{3} = -5 \right).$

2 $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$ (car $\sqrt{9} = 3$).

3 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. En effet, tous les entiers sont en particulier rationnels, car ils peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers ; par exemple,

$$5 = \frac{5}{1}.$$

LES NOMBRES • CHAP. 2

- 4** $\pi \notin \mathbb{Q}$, car π n'est pas rationnel. C'est pour cela que le développement décimal de π , non seulement est infini, mais de plus ne se « répète » jamais. « Pire », on ne peut même pas écrire π comme la racine d'un nombre rationnel (on dit que π est « transcendant »).
- 5** $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}^*$ (car $0 \in \mathbb{N}$ mais $0 \notin \mathbb{Q}^*$).
- 6** $10^{-3} \in \mathbb{R}^+$, car 10^{-3} est positif.

13 Puissances et fractions

Enoncé
p. 43

Lycée Henri IV, Paris

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \quad A &= \frac{5^3 \times 8^3 \times 9^2}{15^2 \times 12^4} \\ &= \frac{5^3 \times 2^9 \times 3^4}{3^2 \times 5^2 \times 3^4 \times 2^8} \\ &= \frac{5 \times 2}{3^2} \\ &= 5 \times 3^{-2} \times 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \quad B &= \frac{12^3 \times 15^{-3}}{5^{-2} \times 2^3} \\ &= \frac{12^3 \times 5^2}{15^3 \times 2^3} \\ &= \frac{2^6 \times 3^3 \times 5^2}{5^3 \times 3^3 \times 2^3} \\ &= \frac{2^3}{5} \\ &= 2^3 \times 5^{-1} \end{aligned}$$

14 Puissances et fractions

Enoncé
p. 43

Lycée Hoche, Versailles

On applique les règles de calculs avec les fractions :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(0,2)^3 \times 10^4}{2^3 \times 81} : \frac{-8^3 \times 15}{(-12)^5} \\ &= \left(\frac{2}{10}\right)^3 \times \frac{5^4 \times 2^4}{2^3 \times 3^4} \times \frac{-12^5}{-8^3 \times 15} \\ &= \frac{2^3 \times 5^4 \times 2^4 \times 3^5 \times 2^{10}}{2^3 \times 5^3 \times 2^3 \times 3^4 \times 2^9 \times 3 \times 5} \\ &= 2^2 \text{ (après simplifications)} \\ &= 4 \end{aligned}$$

15 Développements

Enoncé
p. 44

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

$$\mathbf{1} \quad 2x(x-2)(x+2) = 2x(x^2-4) = 2x^3-8x.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned} 2 \quad (1 + 3x)^2 - 2(x + 1)(x - 5) &= 1 + 6x + 9x^2 - 2(x^2 - 5x + x - 5) \\ &= 1 + 6x + 9x^2 - 2x^2 + 8x + 10 \\ &= 7x^2 + 14x + 11. \end{aligned}$$

$$3 \quad (3x - \sqrt{3})^2 = 9x^2 - 6x\sqrt{3} + 3.$$

$$4 \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

16 Factorisations

Enoncé
p. 44

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

$$\begin{aligned} 1 \quad A(x) &= (2x - 3)^2 - (4x + 1)(2x - 3) \\ &= (2x - 3)(2x - 3 - (4x + 1)) \\ &= (2x - 3)(-2x - 4) \\ &= -2(2x - 3)(x + 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad B(x) &= (x + 1)^2 - (2x + 3)^2 \\ &= ((x + 1) - (2x + 3))((x + 1) + (2x + 3)) \\ &= (-x - 2)(3x + 4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad C(x) &= (x - 1)(2 + x) + (x + 5)(1 - x) \\ &= (x - 1)(2 + x) - (x + 5)(x - 1) \\ &= (x - 1)(2 + x - x - 5) \\ &= -3(x - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad D(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x + 1) + x + 1 \\ &= (x + 1)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

$$5 \quad E(x) = xy - x - y + 1 = x(y - 1) - (y - 1) = (y - 1)(x - 1).$$

$$\begin{aligned} 6 \quad F(x) &= (5x + 3)^2 - 11 \\ &= (5x + 3)^2 - \sqrt{11}^2 \\ &= (5x + 3 - \sqrt{11})(5x + 3 + \sqrt{11}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad G(x) &= (x - 1)^2 - 2(x^2 - 1) \\ &= (x - 1)^2 - 2(x - 1)(x + 1) \\ &= (x - 1)(x - 1 - 2(x + 1)) \\ &= (x - 1)(-x - 3). \end{aligned}$$

LES NOMBRES • CHAP. 2

17 Calcul littéral

Enoncé
p. 44

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Le produit de trois entiers consécutifs $n-1$, n et $n+1$ s'écrit : $(n-1)n(n+1)$.

La somme du produit de trois entiers consécutifs $n-1$, n et $n+1$ et de l'entier n est donc :

$$(n-1)n(n+1) + n = (n^2 - n)(n+1) + n = n^3 + n^2 - n^2 - n + n = n^3.$$

Cette somme est donc bien le cube d'un entier.

18 Puissances et fractions

Enoncé
p. 44

Lycée Louis le Grand, Paris

1 On obtient :

$$A = \frac{2^3 \times 7^4}{3^2 \times 7^2 \times 2^3 \times 3^3} = \frac{7^2}{3^5}$$

Il n'est normalement pas nécessaire d'aller plus loin. (à tout hasard, $A = \frac{49}{243}$).

2 Il faut réduire petit à petit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} B &= \frac{3 - \frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{4}{15} - \frac{1}{10}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} : \frac{1 + \frac{2}{5}}{2 - \frac{1}{5}} \\ &= \frac{\frac{12}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{8}{4} + \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{8}{30} - \frac{3}{30}}{\frac{4}{6} - \frac{1}{6}} : \frac{\frac{5}{10} + \frac{2}{5}}{\frac{10}{5} - \frac{1}{5}} \\ &= \frac{\frac{11}{4}}{\frac{9}{4}} \times \frac{\frac{5}{30}}{\frac{3}{6}} : \frac{\frac{7}{5}}{\frac{9}{5}} \\ &= \frac{11}{9} \times \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} : \frac{7}{9} = \frac{11}{9} \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{7} \\ &= \frac{11 \times 9}{9 \times 3 \times 7} = \frac{11}{21}. \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

19 Radicaux

Enoncé
p. 45

Lycée Henri IV, Paris

$$\begin{aligned} 1 \quad C &= \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{12} \\ &= 3\sqrt{3} - 2 \times 5\sqrt{3} + 3 \times 2\sqrt{3} \\ &= (3 - 10 + 6)\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad D &= \sqrt{\frac{6,3}{2,8}} \times \sqrt{\frac{18}{0,72}} \\ &= \sqrt{\frac{63}{28}} \times \sqrt{\frac{18 \times 100}{72}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4}} \times \sqrt{\frac{100}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4}} \times \sqrt{25} \\ &= \frac{3}{2} \times 5 \\ &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

20 Radicaux

Enoncé
p. 45

Lycée Charlemagne, Paris

1 On utilise la quantité conjuguée $\sqrt{5} - 2$ pour simplifier le dénominateur :

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{\sqrt{5} + 2} \\ &= \frac{3(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \\ &= \frac{3(\sqrt{5} - 2)}{5 - 4} = 3\sqrt{5} - 6 = \sqrt{45} - 6 \end{aligned}$$

2 De même que ci-dessus :

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} - 1} \\ &= \frac{(2\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} \\ &= \frac{10 + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3}{5 - 1} \\ &= \frac{13 + 5\sqrt{5}}{4} = \frac{13}{4} + \sqrt{\frac{125}{16}} \end{aligned}$$

LES NOMBRES • CHAP. 2

21 Calculs algébriques

Lycée Jean Zay, Orléans

Enoncé
p. 45

$$\begin{aligned}
 A &= 18 \left(\frac{-1}{3} \right)^3 \frac{5}{2} - 4 \frac{-1}{3} \left(\frac{5}{2} \right)^2 - \left(\frac{5}{2} \right)^3 \\
 &= 18 \times \frac{-1}{3^3} \times \frac{5}{2} + 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{5^2}{2^2} - \frac{5^3}{2^3} \\
 &= \frac{-3^2 \times 2 \times 5}{3^3 \times 2} + 4 \frac{5^2}{3 \times 2^2} - \frac{5^3}{2^3} \\
 &= -\frac{5}{3} + \frac{25}{3} - \frac{125}{8} \\
 &= \frac{20}{3} - \frac{125}{8} \\
 &= \frac{20 \times 8 - 125 \times 3}{24} \\
 &= \frac{160 - 375}{24} \\
 &= -\frac{215}{24}
 \end{aligned}$$

22 Radicaux

Lycée Louis le Grand, Paris

Enoncé
p. 45

Il faut commencer par se « débarrasser » du radical au dénominateur.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + 8\sqrt{2} \\
 &= \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} + 8\sqrt{2} \\
 &= \frac{2 - 2\sqrt{2} + 1}{2 - 1} + 8\sqrt{2} \\
 &= 3 - 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} \\
 &= 3 + 6\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

N'essayez pas d'aller plus loin, et *surtout* ne donnez pas de résultat approximatif calculé à la machine !

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

23 Calcul algébrique

Enoncé
p. 45

Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

1

$$\begin{aligned}\frac{\frac{2}{7} + \frac{5}{21}}{\frac{5}{9} - \frac{1}{3}} &= \frac{\frac{6}{21} + \frac{5}{21}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{9}} \\ &= \frac{\frac{11}{21}}{\frac{2}{9}} \\ &= \frac{9 \times 11}{21 \times 2} = \frac{3 \times 3 \times 11}{3 \times 7 \times 2} \\ &= \frac{33}{14}\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}\frac{(2^{23})^{15}}{2^{1000}} &= 2^{23 \times 15 - 1000} \\ &= 2^{-655}\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{10} + \frac{10}{10} - \frac{5}{10}\right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{9}{10} \\ &= \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 5} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

4 On peut commencer par écrire :

$$0,06 = \frac{6}{100} = \frac{3}{50} = \frac{3}{2 \times 5^2}$$

d'où :

$$(0,06)^4 = \frac{3^4}{2^4 \times 5^8}$$

De plus :

$$1,6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} = \frac{2^3}{5}$$

d'où :

$$(1,6)^{-3} = \frac{2^{-9}}{5^{-3}} = \frac{5^3}{2^9}$$

De même :

$$0,000\,2 = \frac{2}{10\,000} = \frac{2}{10^4} = \frac{2}{2^4 \times 5^4} = \frac{1}{2^3 \times 5^4}$$

LES NOMBRES • CHAP. 2

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

et donc :

$$(0,000\ 2)^{-10} = \left(\frac{1}{2^3 \times 5^4} \right)^{-10} = 2^{30} \times 5^{40}$$

On peut donc calculer :

$$\begin{aligned} \frac{(0,06)^4 \times (1,6)^{-3}}{30 \times (0,000\ 2)^{-10}} &= \frac{3^4}{2^4 \times 5^8} \times \frac{5^3}{2^9} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{2^{30} \times 5^{40}} \\ &= \frac{3^4 \times 5^3}{2^4 \times 5^8 \times 2^9 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2^{30} \times 5^{40}} \\ &= \frac{3^3}{2^{44} \times 5^{46}} \text{ (en simplifiant)} \end{aligned}$$

On peut encore simplifier en remarquant :

$$\begin{aligned} \frac{3^3}{2^{44} \times 5^{46}} &= \frac{2^2 \times 3^3}{2^{46} \times 5^{46}} \\ &= \frac{4 \times 27}{10^{46}} \\ &= 108 \times 10^{-46} = 1,08 \times 10^{-44} \end{aligned}$$

24 Radicaux

➔ **Enoncé**
p. 46

Lycée André Malraux, Biarritz

- 1** Il s'agit d'un produit remarquable :

$$(3 - \sqrt{11})^2 = 9 - 6\sqrt{11} + 11 = 20 - 6\sqrt{11}$$

- 2** $3^2 = 9$ et $(\sqrt{11})^2 = 11$, donc :

$$3 < \sqrt{11}.$$

On en déduit :

$$3 - \sqrt{11} < 0.$$

- 3** Comme

$$(3 - \sqrt{11})^2 = 20 - 6\sqrt{11},$$

on sait que :

$$\sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = (3 - \sqrt{11})$$

ou

$$\sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = -(3 - \sqrt{11}).$$

Comme $3 - \sqrt{11} < 0$, la racine carrée de $(20 - 6\sqrt{11})$ (qui doit être positive) est donc : $-(3 - \sqrt{11}) = \sqrt{11} - 3$.

25 Calculs algébriques

Enoncé
p. 46

Lycée Blaise Pascal, Orsay

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{5}{6}} \\ &= \frac{\frac{15}{30} - \frac{10}{30} + \frac{12}{30} + \frac{5}{30}}{\frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{12}{30} - \frac{25}{30}} \\ &= \frac{\frac{22}{30}}{\frac{-12}{30}} \\ &= -\frac{22}{12} \\ &= -\frac{11}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(5^2 \times 10^{-5})^3}{(5 \times 10^{-3})^5} \times \left(\frac{10^2}{5}\right)^2 \\ &= \frac{5^6 \times 10^{-15}}{5^5 \times 10^{-15}} \times \frac{10^4}{5^2} \\ &= 5 \times \frac{(5 \times 2)^4}{5^2} \\ &= \frac{5 \times 5^4 \times 2^4}{5^2} \\ &= 5^3 \cdot 2^4. \end{aligned}$$

$$C = 2^{23} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{24} = \frac{2^{23}}{2^{24}} = \frac{1}{2}.$$

$$D = \left(\frac{2}{3}\right)^{108} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{107} = \left(\frac{2}{3}\right)^{108} : \left(\frac{2}{3}\right)^{107} = \frac{2}{3}.$$

$$a = 0,000\,073\,654 = 7,365\,4 \cdot 10^{-5}.$$

$$b = 9\,325\,000 = 9,325 \cdot 10^6.$$

$$c = 0,023 \times 10^{-5} = 2,3 \cdot 10^{-2} \times 10^{-5} = 2,3 \cdot 10^{-7}.$$

$$d = 19,402 \times 10^2 = 1,940\,2 \cdot 10^3.$$

26 Moyennes

Enoncé
p. 46

Lycée Condorcet, Paris

$$1 \quad A = \frac{\sqrt{7} + 4\sqrt{7}}{2} = \frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

$$G = \sqrt{\sqrt{7} \times 4\sqrt{7}} = \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}.$$

$$\frac{2}{H} = \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{4\sqrt{7}} = \frac{4}{4\sqrt{7}} + \frac{1}{4\sqrt{7}} = \frac{5}{4\sqrt{7}}.$$

$$\text{donc } \frac{H}{2} = \frac{4\sqrt{7}}{5} \text{ et } H = \frac{8\sqrt{7}}{5}.$$

On peut comparer facilement en les mettant au même dénominateur :

$$H = \frac{16\sqrt{7}}{10}, A = \frac{25\sqrt{7}}{10} \text{ et } G = \frac{20\sqrt{7}}{10}.$$

On obtient :

$$H < G < A.$$

Remarque : en fait, comme nous allons encore le voir au b), cet ordre ne dépend pas des réels a et b que l'on a choisis (démonstration plutôt diffi-

LES NOMBRES • CHAP. 2

cile). A s'appelle la moyenne *arithmétique* de a et b ; G est la moyenne *géométrique* des deux nombres; H est leur moyenne *harmonique*.

2

$$\begin{array}{l} A = \frac{2^4 + 2^2 \times 3^{-2}}{2} \\ = 2^3 + 2 \times 3^{-2} \\ = 8 + \frac{2}{9} \\ = \frac{74}{9}. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} G = \sqrt{2^4 \cdot 2^2 \cdot 3^{-2}} \\ = \sqrt{2^6 \cdot 3^{-2}} \\ = 2^3 \cdot 3^{-1} \\ = \frac{8}{3}. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{2}{H} = \frac{1}{2^4} + \frac{3^2}{2^2} \\ = \frac{1}{2^4} + \frac{3^2 \times 2^2}{2^4} \\ = \frac{1 + 9 \times 4}{2^4} \\ = \frac{37}{16}. \end{array} \right.$$

On obtient :

$$H = \frac{32}{37}.$$

On voit sans peine que A est supérieur à $G = \frac{24}{9}$.

Réduisons G et H au même dénominateur : $G = \frac{296}{37 \times 3}$ et

$H = \frac{96}{37 \times 3}$, il vient $G > H$. De nouveau,

$$A > G > H.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

27 Radicaux

Lycée Hoche, Versailles

Enoncé
p. 46

1

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{50} - 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{18}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{25 \times 2} - 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{9 \times 2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= (5 - 3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2})\sqrt{2} \\ &= \frac{9}{4}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

CORRIGÉS

$$\begin{aligned} J &= 7\sqrt{\frac{3}{7}} \times \sqrt{\frac{30}{49}} \\ &= 7\sqrt{\frac{3}{7}} \times \frac{\sqrt{3 \times 10}}{7} \\ &= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{10}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{70}}{7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} \times (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + 3 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{6 \times 3} + \sqrt{6 \times 2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3 - 2} \\ &= \sqrt{2 \times 3 \times 3} + \sqrt{3 \times 2 \times 2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \times \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \right) \times \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right) + \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 2 \times \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} + 3 + 2\sqrt{2} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 2 \times \sqrt{9 - 8} + 3 + 2\sqrt{2} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 2 + 3 + 2\sqrt{2} \\ &= 8. \end{aligned}$$

2 On veut calculer $Y = \sqrt{17 - 4\sqrt{13}}$

$$(2 - \sqrt{13})^2 = 4 - 4\sqrt{13} + 13 = 17 - 4\sqrt{13}.$$

⚠ ATTENTION

Il serait tentant de répondre que la racine de $17 - 4\sqrt{13}$ est $2 - \sqrt{13}$.
Mais attention ! 13 est supérieur à 4, donc $\sqrt{13}$ est supérieur à 2.
 $2 - \sqrt{13}$ est donc négatif !

Il faut répondre : $Y = \sqrt{13} - 2$.

LES NOMBRES • CHAP. 2

28 Puissances

Enoncé
p. 47

Lycée Hoche, Versailles

On simplifie les puissances, puis les fractions :

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{a^3}{c}\right)^2 : \frac{[(a^7)^5 b^{-2} (c^{-3})^{-2}]^{-1}}{[ab^2(c^{-2})^{-3}]^2} \\ &= \frac{a^6}{c^2} : \frac{(a^{35} b^{-2} c^6)^{-1}}{(ab^2 c^6)^2} \\ &= \frac{a^6}{c^2} : \frac{a^{-35} b^2 c^{-6}}{a^2 b^4 c^{12}} \\ &= \frac{a^6}{c^2} \times \frac{a^2 b^4 c^{12}}{a^{-35} b^2 c^{-6}} \\ &= a^{43} b^2 c^{16}. \end{aligned}$$

29 Fractions

Enoncé
p. 47

Lycée Louis le Grand, Paris

1 Il faut réduire les deux fractions au même dénominateur :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{n}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n+3-n}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

2 Du résultat précédent, il vient :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right).$$

Si on applique cette formule à $n = 10$, on obtient :

$$\frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{11 \times 12 \times 13} \right).$$

En l'appliquant à $n = 11$:

$$\frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11 \times 12 \times 13} - \frac{1}{12 \times 13 \times 14} \right).$$

Si on additionne ces deux formules membre à membre, on voit que les termes

$$\frac{1}{11 \times 12 \times 13}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

vont s'annuler. Appliquons de nouveau la formule à $n = 12$:

$$\frac{1}{12 \times 13 \times 14 \times 15} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{12 \times 13 \times 14} - \frac{1}{13 \times 14 \times 15} \right).$$

Nous constatons que si nous ajoutons cette formule aux deux autres, le terme $\frac{1}{12 \times 13 \times 14}$ disparaît.

Finalement, si nous répétons l'opération jusqu'à $n = 19$ et que nous simplifions, il ne restera que le tout premier terme $\frac{1}{10 \times 11 \times 12}$ ainsi que le tout dernier, qui est le $\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ avec $n = 19$.

Il vient (attention aux signes et au facteur $\frac{1}{3}$!) :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{20 \times 21 \times 22} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5 \times 2 \times 11 \times 4 \times 3} - \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 7 \times 2 \times 11} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{7-1}{20 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{1}{3} \frac{6}{20 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{2}{20 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{1}{10 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{1}{4\,620}. \end{aligned}$$

30 Arithmétique

Enoncé
p. 47

Nouveau programme

- 1 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Exprimons la somme S des trois entiers consécutifs, n , $n+1$ et $n+2$:

$$S = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n+1).$$

S est bien un multiple de 3.

- 2 Trois multiples consécutifs de 3 s'écrivent sous la forme $3n$, $3(n+1)$ et $3(n+2)$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Considérons leur somme S :

$$S = 3n + 3n + 3 + 3n + 6 = 9n + 9 = 9(n+1).$$

S est bien multiple de 9.

LES NOMBRES • CHAP. 2

- 3** $\forall n \in \mathbb{Z}$, n , $n + 1$, $n + 2$ et $n + 3$ sont quatre entiers consécutifs. Leur somme S s'exprime par $S = 4n + 6$ et n'est pas un multiple de 4. En effet, pour s'en convaincre, il suffit de choisir $n = 0$...

31 Arithmétique

→ Enoncé
p. 47

Nouveau programme

Si a divise $n + 4$ alors a divise $2(n + 4)$.

Si a divise $2n - 3$ alors a divise $-(2n - 3)$.

Ainsi a divise $2(n + 4) - (2n - 3) = 11$ donc a est bien un diviseur de 11.

32 Arithmétique

→ Enoncé
p. 48

Nouveau programme

$$x^2 - y^2 = 5 \iff (x - y)(x + y) = 5.$$

Or $5 = -1 \times (-5) = 1 \times 5 = 5 \times 1 = -5 \times (-1)$, d'où :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = 5 &\iff \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \\ &\text{ou} \quad \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - y = -5 \\ x + y = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \\ &\text{ou} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

33 Arithmétique

→ Enoncé
p. 48

Nouveau programme

Si $n - 4$ divise $3n + 24$, $n - 4$ divise $n - 4$ donc $-3(n - 4)$ et par conséquent $n - 4$ divise $3n + 24 - 3(n - 4) = 36$ donc $n - 4$ est un diviseur de 36.

Or l'ensemble des diviseurs de 36 est :

$$\mathcal{D}(36) = \{-1; -2; -3; -4; -6; -9; -12; -36; 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 36\}.$$

Ainsi $n \in \{3; 2; 1; 0; -2; -5; -8; -32; 5; 6; 7; 8; 10; 13; 16; 40\}$.

Réciproquement, on vérifie aisément (avec un tableur par exemple) que toutes ses valeurs de n conviennent.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

34 Diviseurs

→ Enoncé
p. 48

Nouveau programme

- 1 « Consécutifs » signifie que les deux entiers s'écrivent, par exemple, n et $n + 1$. On a $n(n + 1) = n^2 + n$.

On procède par disjonction de cas :

Si n est pair, alors n^2 aussi et donc $n^2 + n$ est pair comme somme de deux entiers impairs.

Si n est impair, alors n^2 aussi donc $n^2 + n$ est pair car somme de deux entiers pairs.

Comme on est nécessairement dans l'un des deux cas, la propriété est démontrée. On pouvait raisonner directement sur le produit en disant que si n est pair, alors $n(n + 1)$ est multiple de n donc de 2. Si n est impair, alors $n + 1$ est pair, donc $n(n + 1)$ est multiple de $n + 1$, donc de 2.

- 2 Supposons que ni n , ni $n + 1$, ni $n + 2$ ne soient multiples de 3. L'écart entre les multiples de 3 qui encadrent ces trois nombres est donc supérieur ou égal à 4 (écart $(n + 3) - (n - 1)$). Or l'écart entre deux multiples de 3 consécutifs n'est que... de 3.

On a une contradiction, donc soit n , soit $n + 1$, soit $n + 2$ est multiple de 3, et donc 3 est diviseur de $n(n + 1)(n + 2)$.

35 Nombres premiers

→ Enoncé
p. 48

Nouveau programme

- 1 Soit k un entier compris entre 1 et n . p_k divise le produit $p_1 \times \dots \times p_n$, donc si p_k divisait a , alors p_k serait diviseur de $a - p_1 \times \dots \times p_n = 1$.

Or 1 n'a pas de diviseur premier, à part lui-même...

Conclusion : aucun des p_k n'est diviseur de a .

- 2 Euclide raisonne par l'absurde, c'est-à-dire qu'il suppose que son résultat est faux, en espérant aboutir à une contradiction. Il suppose que l'ensemble des nombres premiers est fini, et qu'on peut énumérer tous les nombres premiers : $p_1, p_2, \dots, p_n$.

D'après la première question, a n'admet aucun diviseur premier.

Or on voit que $a \geq 2$, donc a admet nécessairement un diviseur premier. Nous avons une contradiction. L'ensemble des nombres premiers est donc infini.

LES NOMBRES • CHAP. 2

► POUR ALLER PLUS LOIN

Pourquoi un entier $a \geq 2$ admet-il toujours au moins un diviseur premier ?

La démonstration est difficile. Nous empruntons une méthode appelée par Fermat : la *descente infinie* (tout un programme !)

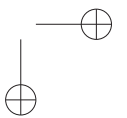
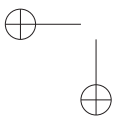
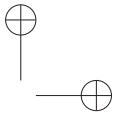
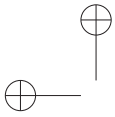
Supposons, par l'absurde, que a n'ait pas de diviseur premier. Alors a n'est pas premier (car a divise lui-même) donc on peut décomposer $a = bc$ avec $2 \leq b < a$, $2 \leq c < a$. Mais alors, ni b ni c ne peuvent avoir de diviseur premier (car il diviserait a).

On a donc la propriété suivante : Si $a \geq 2$ n'a pas de diviseur premier, on peut trouver un entier $a > b \geq 2$ qui n'a pas de diviseur premier. Or, si on applique la propriété à b , on trouve ainsi une infinité d'entiers naturels, chacun strictement plus petit que le précédent, ce qui n'est pas possible car il n'y a que a entiers naturels strictement inférieurs à a .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Chapitre 3

Équations, inéquations

Plan du chapitre

1. Comment écrire un intervalle ?
2. Opérations permises sur les inégalités
3. Utiliser les carrés et les produits croisés
4. Tableaux de signes
5. Utiliser le signe de la différence
6. Résolution graphique d'une inéquation

Exercice type

Lycée Alain, Le Vésinet

Exprimer par un intervalle :

- 1 $x > 2$
- 2 $x \leq -3$
- 3 $-1 < x \leq 5$
- 4 $x > 2$ et $x < 6$
- 5 $x < 2$ ou $x \geq 4$

Voir corrigé page 74

1 Comment écrire un intervalle ?

Définition 1 : Intervalles

L'intervalle $[a; b]$ est l'ensemble des réels compris entre a et b . $[a; b]$ contient a et b , alors que $]a; b[$ ne contient ni a , ni b .

Définition 2 : Bornes

Un intervalle a toujours *deux* bornes : $[1, 3]$ contient tous les réels compris entre 1 et 3. $] -\infty, 2]$ contient tous les réels compris entre $-\infty$ et 2, ou plus simplement tous les réels inférieurs ou égaux à 2 ($-\infty$ est une borne conventionnelle). Dans l'écriture, on sépare les deux bornes par une virgule ou par un point-virgule s'il risque d'y avoir une ambiguïté. Par exemple, on écrira $[1, 2; 3]$ plutôt que $[1, 2, 3]$ car on pourrait confondre avec $[1; 2, 3]$.

Définition 3 : Crochets

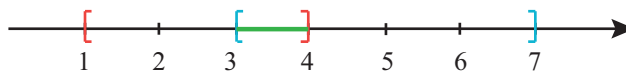
Le sens des crochets indique si la borne est contenue ou non dans l'intervalle. Si le crochet est tourné vers l'intérieur, on « prend » la borne. Par exemple, $] - 7, - 3]$ contient -3 mais ne contient pas -7 . Comme les bornes $-\infty$ et $+\infty$ sont de pures conventions, elles sont toujours exclues de l'intervalle.

Définition 4 : Réunion

L'ensemble $[1,3] \cup [5,6]$ contient les éléments de $[1,3]$ et ceux de $[5,6]$. Autrement dit, il contient tous les réels qui sont dans $[1,3]$ *ou* dans $[5,6]$. Remarque : cet ensemble n'est pas lui-même un intervalle.

Définition 5 : Intersection

$[1,4] \cap [3,7]$ contient les réels qui sont dans les deux intervalles à la fois, c'est-à-dire les réels qui sont dans $[1,4]$ *et* dans $[3,7]$. Concrètement, il s'agit des points compris entre 3 et 4, comme le confirme le schéma suivant, on l'on a grisé la partie commune aux deux intervalles :



$$[1,4] \cap [3,7] = [3,4]$$

2 Opérations permises sur les inégalités

On est amené, pour comparer ou encadrer des nombres, à effectuer des opérations sur les inégalités, par exemple pour passer de $2x < 6$ à $x < 3$. Certaines opérations ne posent aucun problème. Pour d'autres, il faut changer le sens de l'inégalité. D'autres enfin ne s'appliquent que si les nombres concernés vérifient une condition de signe. Concrètement, on peut :

- *Ajouter un même réel à une inégalité* ou ajouter deux inégalités de même sens membre à membre. Si l'une des inégalités était large, l'inégalité obtenue est large. Par exemple, si $x + 7 \geq 5$, on peut ajouter -7 aux deux membres et obtenir : $x \geq -2$.
- *Multiplier les deux membres par un réel.*
S'il est positif, on garde le sens, s'il est négatif on change le sens de l'inégalité. Par exemple, si $7x \leq -3$, on peut diviser par 7 les deux membres :

$$x \leq -\frac{3}{7}$$

Le sens ne change pas car 7 est positif.

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

- *Élever les deux membres de l'inégalité au carré.*
ou au contraire passer à la racine sans changer le sens de l'inégalité, à condition que les deux membres soient positifs. Si $x > 5$, on peut écrire $x^2 > 25$. Attention, si l'on considère l'encadrement $-2 < x < 5$, on ne peut pas procéder simplement et écrire $4 < x^2 < 25$, car x pourrait par exemple être égal à 0 ou 1. Le meilleur encadrement possible est : $0 \leq x < 25$.
- *Inverser les deux membres en changeant le sens de l'inégalité, mais seulement à condition que les deux membres aient le même signe !* (et qu'ils soient non nuls). Par exemple, $-5 < -3$ donc $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{3}$.

⚠ ATTENTION

L'équivalent de l'inégalité $x \geq 5$ n'est pas $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$, mais $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$ (car on sait que l'inverse d'un nombre positif est positif).

3 Utiliser les carrés et les produits croisés

On sait que, pour deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

(Propriété dite des produits « en croix » ou « croisés »).

Lorsque a, b, c et d sont positifs, on peut utiliser ces produits croisés avec une inégalité :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} &\iff ad < bc \\ \frac{a}{b} > \frac{c}{d} &\iff ad > bc \\ \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} &\iff ad \leq bc \\ \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} &\iff ad \geq bc \end{aligned}$$

Exemple : montrons que $\frac{23}{5} > \frac{7}{2}$. Il suffit de constater que
 $23 \times 2 = 46 > 5 \times 7 = 35$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 Tableaux de signes

- Pour résoudre une inéquation produit, on détermine le signe de chaque facteur que l'on résume dans un tableau de signes. La règle des signes permet de conclure.

Exemple : résoudre l'inéquation $(x - 2)(6 - 2x)(x + 4) \geq 0$.

$$\begin{aligned} x - 2 \geq 0 &\iff x \geq 2 \\ 6 - 2x \geq 0 &\iff x \leq 3 \\ x + 4 \geq 0 &\iff x \geq -4 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes :

x	$+\infty$	-4	2	3	$+\infty$	
$x - 2$		$-$	$-$	0	$+$	$+$
$6 - 2x$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x + 4$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
Produit		$+$	0	$-$	0	$-$

D'où $\mathcal{S} =] -\infty ; -4] \cup [2 ; 3]$

- La méthode est la même pour une inéquation quotient mais il faut être vigilant avec les valeurs interdites qui sont les nombres qui annulent le dénominateur.

Exemple : résoudre l'inéquation $x \geq \frac{9}{x}$.

Valeurs interdites : $x = 0$.

Résolution :

$$\begin{aligned} x \geq \frac{9}{x} &\iff \frac{x^2}{x} - \frac{9}{x} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x-3)(x+3)}{x} \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes :

x	$+\infty$	-3	0	3	$+\infty$		
$x - 3$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 3$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
Quotient		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

D'où $\mathcal{S} = [-3 ; -0 [\cup [3 ; +\infty [$

Attention à exclusion de l'ensemble des solutions les valeurs interdites.

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

5 Utiliser le signe de la différence

Pour comparer deux nombres x et y , on peut étudier le signe de leur différence $x - y$:

$$\begin{cases} \text{Si } x - y > 0, \text{ alors } x > y \\ \text{Si } x - y < 0, \text{ alors } x < y \end{cases}$$

Exemple : on veut résoudre l'inéquation : $\frac{1}{x} < 2$. Il serait maladroit d'utiliser les produits croisés, car on ne connaît pas le signe de x . Vous pouvez vérifier qu'on obtiendrait : $\frac{1}{2} < x$ ce qui est faux car, par exemple, -1 est solution de $\frac{1}{x} < 2$ mais ne vérifie pas $\frac{1}{2} < x$. Il faut au contraire :

- 1 Écrire la différence : $\frac{1}{x} - 2$;
- 2 Réduire au même dénominateur : $\frac{1 - 2x}{x}$;
- 3 Utiliser un tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x		$-$	0	$+$
$1 - 2x$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{1 - 2x}{x}$	$-$	$+$	0	$-$

Il suffit de lire dans le tableau où sont situés les réels tels que $\frac{1 - 2x}{x} < 0$:

$$S =]-\infty, 0[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

6 Résolution graphique d'une inéquation

Pour résoudre *graphiquement* une inéquation du type $f(x) \leq g(x)$, on trace la courbe des deux fonctions (soit « à la main », soit à l'aide de la calculatrice). Il suffit de lire sur l'axe des abscisses les valeurs de x pour lesquelles la courbe de f est au-dessus de celle de g . Habituellement, l'ensemble de ces valeurs est un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Par exemple, la figure page ci-contre montre que :

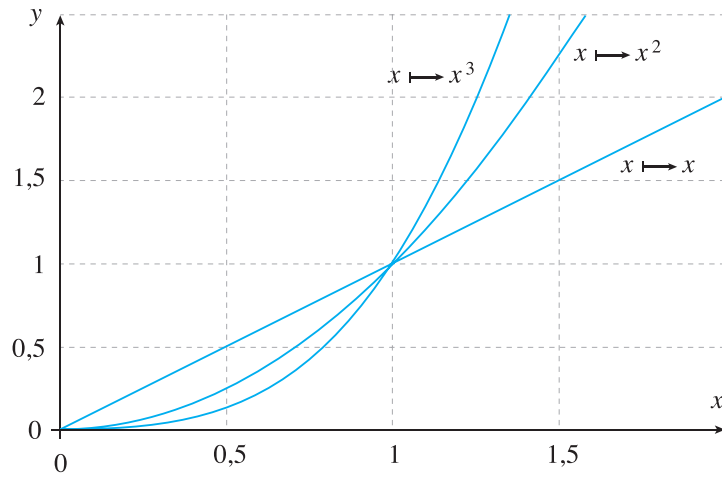
- Si $0 < x < 1$, alors $x^3 < x^2 < x$.
- Si $x > 1$, alors $x < x^2 < x^3$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

COURS



➡ Solution de l'exercice type

Lycée Alain, Le Vésinet

- 1 $]2, +\infty[$
- 2 $] -\infty, -3]$
- 3 $] -1,5]$
- 4 $]2,6[$
- 5 $] -\infty, 2[\cup [4, +\infty[$

Voir énoncé page 69

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

1 V/F Intervalles

5 min

→ Corrigé
p. 87

Vrai ou faux ?

- a** Si $0 \leq x \leq 3$, alors $x \in]0; 3[$.
- b** Si $x > 4$, alors $x \in]4; +\infty[$.
- c** Si $x \in]-\infty; 2] \cap [0; 4]$ alors $x \geq 0$ et $x \leq 2$.
- d** Si $x \in]-\infty; 4] \cap [0; 2]$ alors $x \leq 4$ et $x > 2$.
- e** Si $x \in [0; 1] \cup [2; 3]$ alors $x \in [0; 1]$ et $x \in [2; 3]$.

2 QCM Ensemble des solutions

5 min

→ Corrigé
p. 87

Dans quels cas l'ensemble des solutions est-il correct ?

- | | |
|--------------------------------|---|
| a $3x - 7 = 0$ | $S = \left\{ \frac{7}{3} \right\}$ |
| b $3x - 7 = 0$ | $S = \{2, 33\}$ |
| c $(x - 5)(2x + 1) = 0$ | $S = \left\{ -5; -\frac{1}{2} \right\}$ |
| d $x^2 - 8 = 0$ | $S = \{2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\}$ |

3 QCM Inéquations

6 min

→ Corrigé
p. 87

Dans quels cas les inéquations proposées ont-elles les mêmes solutions dans $\mathbb{R}$?

- | | | |
|--|----|---------------------------------|
| a $x(x - 3) < x(2x + 1)$ | et | $(x - 3) < (2x + 1)$ |
| b $3 - x < 5$ | et | $x > 2$ |
| c $x < 2$ | et | $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ |
| d $(x^2 + 2)(x - 1) > 0$ | et | $2(x - 1) > 0$ |
| e $(x - 3)^2 \geq (2x + 1)^2$ | et | $x - 3 \geq 2x + 1$ |
| f $\frac{x}{x - 2} \leq \frac{2x + 1}{x + 3}$ | et | $x(x + 3) \leq (x - 2)(2x + 1)$ |

4 V/F Étude graphique

4 min

→ Corrigé
p. 88

On a représenté page suivante la fonction f et la fonction affine

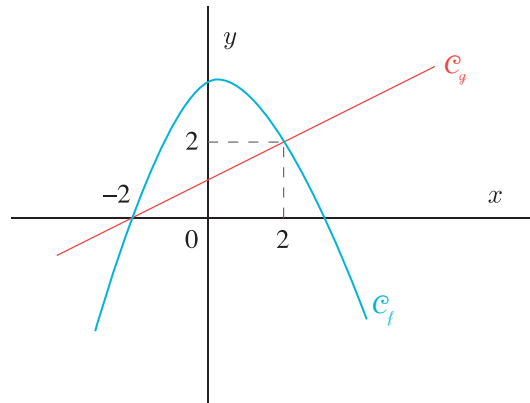
$$g : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1.$$

- a** L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est $[-2; 2]$.
- b** L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est $\{-2; 2\}$.
- c** L'ensemble des solutions de $f(x) < g(x)$ est $] -2; 2[$.
- d** L'ensemble des solutions de $f(x) \geq g(x)$ est $[-2; 2]$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Développements et factorisations

5 Développement ou factorisation ?



10 min

Corrigé
p. 88

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables x, y : nombres
Début :
  Lire x
  Affecter à y la valeur x - 2
  Affecter à y la valeur y2
  Affecter à y la valeur y - 4
  Afficher y
Fin
```

- 1 Expliquer l'égalité suivante :

$$y = (x - 2)^2 - 4.$$

- 2 Expliquer pourquoi l'algorithme suivant affiche le même résultat que le premier quand on saisit la même valeur de x :

```
Variables x : nombre
Début :
  Lire x
  Affecter à x la valeur x*(x - 4)
  Afficher x
Fin
```

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

6 Un calcul astucieux



15 min

Corrigé
p. 88

Lycée Hoche, Versailles

- 1 Développer $(3x + \sqrt{2})^3$.
- 2 Calculer astucieusement $X = 875\,683^2 - (875\,684 \times 875\,682)$.
- 3 Factoriser le mieux possible :

$$E = (2x - 3)^2 + (3 - 2x)(x - 1) - 6 + 4x ;$$

$$F = (a + 2)^2 - 4(5a - 3)^2 ;$$

$$G = a^4 - 1.$$

7 Factorisations



25 min

Corrigé
p. 89

Lycée Chateaubriand, Rennes

Factoriser chacune des expressions suivantes :

- 1 $f(x) = 3(x - 2)(x^2 + 1) - (6x^2 - 5)(x - 2)$.
- 2 $f(a) = 16a^4 - 9$.
- 3 $f(x) = x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) + (x + 2)(1 - x)$.
- 4 $f(x) = (6x - 3)^2 - (2x - 1)$.

Équations

8 Équations



20 min

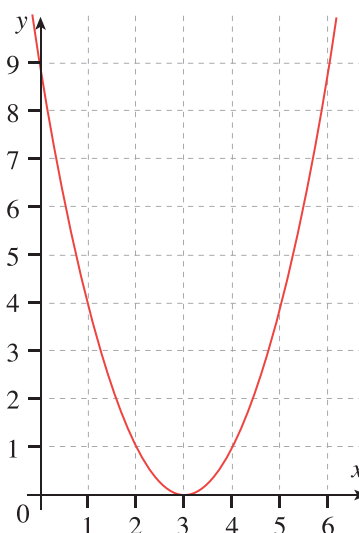
Corrigé
p. 90

Lycée Paul Lapie, Courbevoie

Soit f la fonction qui à tout nombre réel x fait correspondre $f(x)$ tel que $f(x) = (x - 3)^2$.

On donne sa courbe représentative ci-contre.

- 1 Lire sur le graphique les solutions des équations :
 - (a) $(x - 3)^2 = 4$.
 - (b) $(x - 3)^2 = 2$.
 - (c) $(x - 3)^2 = -1$.
- 2 Résoudre les mêmes équations en détaillant les calculs, nommer S l'ensemble des solutions.



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

9 Équations



15 min

Corrigé
p. 91

Lycée Foch, Rodez

Soit l'expression $f(x) = 15x^2 + 11x - 12$.

- 1 Vérifier que $f(x) = (3x + 4)(5x - 3)$.
- 2 En choisissant la plus appropriée des deux formes de $f(x)$, résoudre chacune des équations suivantes où x est l'inconnue réelle :
 - (a) $f(x) = 0$.
 - (b) $f(x) = 15x^2$.
 - (c) $f(x) = -12$.
 - (d) $f(x) = 5x - 3$.
 - (e) $f(x) = 14x^2 + 11x + 4$.

10 Bien choisir son taxi



20 min

Corrigé
p. 92

Lycée Victor Duruy, Paris

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo avec

Deux chauffeurs de taxi pratiquent des tarifs différents :

- Tarif A : 5 € de prise en charge et 0,40 € par kilomètre parcouru.
 - Tarif B : pas de frais de prise en charge mais 0,60 € du kilomètre.
- 1 (a) Un client veut parcourir 8 km. Quel taxi doit-il prendre pour payer le moins cher ?
(b) Même question pour un client désirant parcourir 30 km.
 - 2 Exprimer $A(x)$, prix payé au taxi A et $B(x)$, prix payé au taxi B, en fonction du nombre x de kilomètres parcourus.
 - 3 (a) Dans un repère orthonormal, représenter graphiquement les fonctions :
 $x \mapsto A(x)$ et $x \mapsto B(x)$ pour $0 \leq x \leq 40$. On note $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ leurs représentations respectives.
(b) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection, et interpréter par une phrase.
 - 4 En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :
 - (a) Pour quelles longueurs de trajets vaut-il mieux prendre le taxi A ?
 - (b) Un client a 12 € en poche. Quel taxi doit-il prendre pour aller le plus loin possible ? Quelle distance pourra-t-il ainsi parcourir ?

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

11 Équations



15 min

Corrigé
p. 94

Lycée Blaise Pascal, Orsay

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $\frac{5x+3}{4} - \frac{x-9}{3} = \frac{x}{2} + 5.$

2 $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0.$

3 $\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x-4} = 2 - \frac{2}{x-4}.$

12 Équations



30 min

Corrigé
p. 95

Lycée Lambert, Mulhouse

Résoudre algébriquement :

1 $7(2x+4) - 5(4x-3) = \frac{2}{5} - \frac{3x-5}{2}.$

2 $(3x-2)(2x-5) + 2(x-5)(7-3x) = 0.$

3 $(5x+3)(4x-2) = 2(x-9).$

4 $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 9(4x-1)^2.$

5 $(2-x)(5x+3) + (x-2)(3-x) - (2-x) = 0.$

Inéquations

13 Inéquations



20 min

Corrigé
p. 97

Lycée Colbert, Paris

La courbe ($\mathcal{C}$) page suivante est la représentation graphique de la fonction f , définie pour tout $x \neq -1$ par :

$$f(x) = \frac{-3}{x+1}.$$

Sa courbe représentative est donnée ci-dessous :

- 1 Déterminer par le calcul l'ensemble des solutions de :

$$\frac{-3}{x+1} \geq 3.$$

Indiquer comment le graphique permet de retrouver ces résultats.

- 2 En utilisant le graphique, donner l'ensemble des réels x vérifiant :

$$-1 < \frac{-3}{x+1} < 1.$$

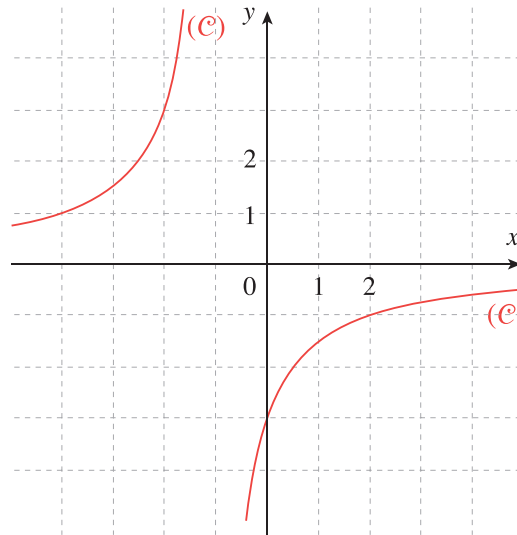
COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- 3 Sur le même dessin, représenter la droite d'équation $y = 1 - x$. En déduire graphiquement l'ensemble des solutions de $\frac{-3}{x+1} \geq 1 - x$. Retrouver ce résultat par le calcul.



14 Inéquations



15 min

Corrigé
p. 99

Lycée Montesquieu, Le Mans

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- 1 $(x + 6)(x - 3) - 2x + 6 \geq 0$.
- 2 $\frac{x + 3}{1 - x} \geq 2$.
- 3 $25x^2 + 4 \geq 0$.
- 4 $25x^2 - 4 \geq 0$.

15 Inéquations



15 min

Corrigé
p. 100

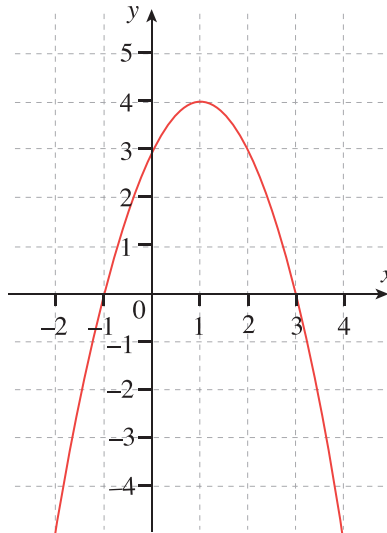
Lycée Auguste Renoir, Cagnes-sur-Mer

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; I, J)$. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

On donne la courbe représentative de f ci-dessous :



- 1 Vérifier que $f(x) = 4 - (x - 1)^2$ puis factoriser $f(x)$.
- 2 En déduire la résolution de l'inéquation $f(x) > 0$.
- 3 Résoudre graphiquement $f(x) > 0$ et vérifier le résultat précédent.

16 Inéquations



10 min

→ Corrigé
p. 101

Lycée Carnot, Dijon

Résoudre l'inéquation :

$$(2x + 5)^2 \leq (3x + 2)^2.$$

17 Inéquations



15 min

→ Corrigé
p. 102

Lycée Saint-Jean, Limoges

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- 1 $(2x + 1)^2 - x^2 \geq 0$.
- 2 $(3x + 2)^2 - 2(3x + 2)(x + 1) + (x + 1)^2 \leq 0$.

18 Inéquations



15 min

→ Corrigé
p. 102

Lycée Descartes, Antony

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- 1 $x^3 - x^2 \geq 4x - 4$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

2 $\frac{x+2}{x^2-1} < 0.$

3 $x^2 \geq 16x.$

19 Inéquations



30 min

Corrigé
p. 103

Lycée Camille Claudel, Troyes

- 1 (a) Soit f la fonction définie sur $]0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Compléter le tableau de valeurs (donner les résultats à 0,01 près) :

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$										

- (b) Tracer $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f , sur le graphique page suivante (en fin d'énoncé).

- (c) Soit g la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = -\frac{8}{\sqrt{2}}x + 4 + \sqrt{2}.$$

Comment qualifie-t-on cette fonction ? Quel est son sens de variation ?

- (d) Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	0	0,25	0,5
$g(x)$			

Tracer la courbe représentative de g dans le même repère que $\mathcal{C}_f$.

- (e) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) > f(x)$ sur $]0 ; 1]$.

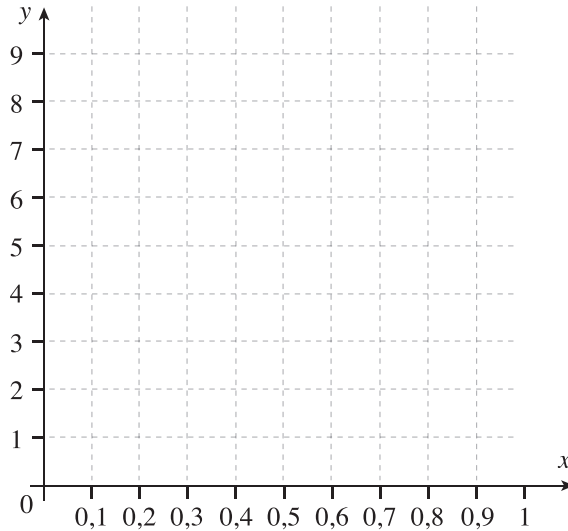
- 2 (a) Montrer que $g(x) > f(x)$ équivaut sur $]0 ; 1]$ à l'inéquation :

$$\frac{8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} < 0.$$

- (b) Développer l'expression $P(x) = -8 \left(x - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x \right).$

- (c) En déduire les valeurs exactes des solutions de $g(x) > f(x).$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

20 Inéquations



20 min

Corrigé
p. 106

Lycée Jacques Monod, Clamart

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $(x + 1)(3 - 2x) < 0$, puis $(x + 1)(2 - x) > x^2 - 1$.

2 $\frac{2x - 7}{1 - 5x} < 3$.

21 Inéquations



15 min

Corrigé
p. 107

Lycée Stanislas, Paris

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $x^2 + 5x + 9 < (x - 1)x + 12$.

2 $2 < \frac{x - 3}{x - 5} < 3$.

22 Inéquations



20 min

Corrigé
p. 109

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $\frac{3x + 1}{4} > \frac{5x + 1}{6}$.

2 $(x - 4)^2 \leq -1$.

INTERROS

3 $2(x - 1) - 3(x + 1) > 4(x - 2).$

4 $x(-2x - 3)^4 \geq 0.$

5 $\frac{x - 1}{4} - 5 \leq \frac{2x - 3}{2} + \frac{3}{4}.$

23 Inéquations



20 min

Corrigé
p. 109

Lycée Murat, Issoire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + \sqrt{3})^2 - 5.$$

1 Développer $f(x)$.

2 Factoriser $f(x)$.

3 Donner les valeurs exactes de $f(\sqrt{2})$, $f(0)$, $f(\sqrt{5} - \sqrt{3})$, $f(-\sqrt{3})$.

4 Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 0$.

5 Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.

6 Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \leq -5$.

7 Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \leq -6$.

24 Tableaux de signes



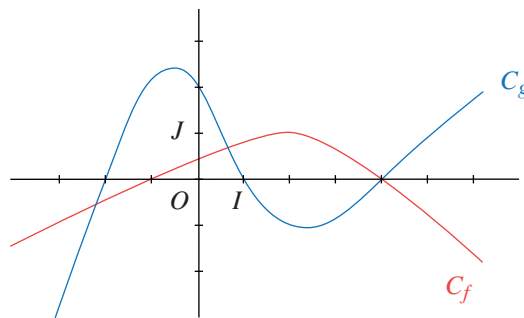
10 min

Corrigé
p. 111

Lycée Jean Zay, Orléans

À partir du graphique suivant, déterminer les tableaux de signes de f et g , et

résoudre l'inéquation : $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$.



ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

25 Inéquations



30 min

Corrigé
p. 111

Lycée Jean-Baptiste Say, Paris

Résoudre les inéquations :

- 1 $(3x + 1)(2 - 4x) \leq 0$ dans $\mathbb{R}$.
- 2 $\left(\frac{1}{2}x - 7\right)^2 < (3x + 1)^2$ dans $\mathbb{R}$.
- 3 $\frac{-2(x-1)}{(7-x)} \geq 0$ dans $\mathbb{R} - \{7\}$.
- 4 $\frac{x^2}{1-2x} < -1$ dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
- 5 $\frac{x}{x(5-x)^2} \leq \frac{3x^2}{x(5-x)^2}$ dans $\mathbb{R} - \{0 ; 5\}$.

26 Inéquations



30 min

Corrigé
p. 114

Lycée Victor Hugo, Poitiers

Soit f la fonction définie pour tout $x \neq 2$ par

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}.$$

- 1 Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal (O, I, J) .
- 2 Construire dans le même repère, la courbe représentative (C_g) de la fonction g définie par

$$g(x) = x^2 + x - 6.$$

- 3 Résoudre graphiquement :

$$\frac{3x+1}{x-2} \leq x^2 + x - 6$$

puis retrouver les résultats par le calcul.

27 Inéquations



15 min

Corrigé
p. 116

Lycée Hélène Boucher, Paris

- 1 Montrer que pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}.$$

- 2 Montrer que pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$,

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 2.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

3 En déduire que, pour $x \geq -\frac{1}{2}$,

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq 2x^2,$$

puis que :

$$1-x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1-x+2x^2.$$

28 Inéquations



15 min

Corrigé
p. 117

Lycée Lacordaire, Marseille

On donne l'expression $A(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

1 Factoriser $A(x)$ en commençant par écrire que :

$$A(x) = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4.$$

2 En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation :

$$\frac{(x-1)^2 - 2x + 2}{x^3 + 3x^2 - 4} \geq 0.$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

1 V/F Intervalles

Enoncé
p. 75

- a** FAUX. L'intervalle est : $[0; 3]$ (inégalités larges).
- b** VRAI. Si $x > 4$, alors $x \in]4; +\infty[$.
- c** VRAI. x doit appartenir aux deux intervalles. On a donc, d'une part : $x \leq 2$ et $x \leq 4$, donc $x \leq 2$, et de l'autre : $x \geq 0$.
- d** FAUX. On doit avoir $x \in [0; 2]$ donc $x \leq 2$.
- e** FAUX. Les deux conditions sont d'ailleurs incompatibles. Il faudrait dire : « Si $x \in [0; 1] \cup [2; 3]$ alors $x \in [0; 1]$ ou $x \in [2; 3]$. »

2 QCM Ensemble des solutions

Enoncé
p. 75

- a** Oui. $3x - 7 = 0 \iff 3x = 7 \iff x = \frac{7}{3}$.
- b** Non. On doit donner la solution exacte. 2,33 est une approximation de la solution à 0,01 près.
- c** Non. Le principe est : « un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul ». Les solutions sont donc 5 et $-\frac{1}{2}$.
- d** Oui. Les solutions sont $\sqrt{8}$ et $-\sqrt{8}$.
On remarque : $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

3 QCM Inéquations

Enoncé
p. 75

- a** Non. Si x est négatif, il faut changer le sens de l'inégalité.
- b** Non. En ajoutant $x - 5$ aux deux membres, on obtient $x > -2$ et non $x > 2$.
- c** Non. Par exemple, $-3 < 2$ mais $\frac{1}{-3} < \frac{1}{2}$. Les inégalités changent de sens en passant à l'inverse *si les deux membres ont le même signe* !
- d** Oui. Quelles que soient les valeurs de x , $(x^2 + 2) > 0$ et $2 > 0$, donc les deux inéquations ont les mêmes solutions que $x - 1 > 0$.
- e** Non. En prenant la racine carrée des deux membres (positifs) d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente et de même sens. Cependant, la racine carrée de $(x - 3)^2$ doit être positive. Il s'agit donc de $|x - 3|$, et non de $x - 3$ en général. Par exemple, pour $x = 0$, on a bien $(x - 3)^2 \geq (2x + 1)^2$ (car $9 \geq 1$) mais $x - 3 = -3$ et $2x + 1 = 1$, donc $x - 3 < 2x + 1$.
- f** Non, car on ne connaît pas les signes de $x - 2$ et de $x + 3$. On constate par exemple que 0 est solution de la première inéquation mais pas de la seconde.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 V/F Étude graphique

Enoncé
p. 75

- a) Faux. Les deux courbes se coupent en deux points exactement, d'abscisses -2 et 2 . $[-2; 2]$ est un intervalle, qui contient *tous* les réels entre -2 et 2 .
- b) Oui. En effet, $\{-2; 2\}$ représente bien l'ensemble constitué des deux nombres -2 et 2 .
- c) Non. Au contraire, sur cet intervalle, la courbe de g est strictement au-dessous de celle de f , on aura donc $f(x) > g(x)$.
- d) Oui. L'inégalité est large, il faut donc inclure -2 et $+2$.

5 Développement ou factorisation ?

Enoncé
p. 76

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

- 1 Regardons étape par étape ce que fait l'algorithme :

Étape	Instruction	Valeur de y
1	Affecter à y la valeur $x - 2$	$y = x - 2$
2	Affecter à y la valeur y^2	$y = (x - 2)^2$
3	Affecter à y la valeur $y - 4$	$y = (x - 2)^2 - 4$

La valeur de y affichée par l'algorithme est donc bien $y = (x - 2)^2 - 4$.

- 2 Si on factorise l'expression de y en fonction de x , on obtient :

$$\begin{aligned}
 (x - 2)^2 - 4 &= (x - 2)^2 - 2^2 \quad \text{qui est de la forme } a^2 - b^2 \\
 &= [(x - 2) + 2][(x - 2) - 2] \\
 &\quad \text{car } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \\
 &= x(x - 4).
 \end{aligned}$$

Ainsi, après avoir saisi la valeur de x , pour afficher le même résultat que l'algorithme initial, il suffit de calculer $x(x - 4)$.

Dans l'algorithme proposé ici, il n'a pas été jugé nécessaire de faire intervenir deux variables (x et y) car le fait d'affecter à x la valeur $x(x - 4)$ suffit.

6 Un calcul astucieux

Enoncé
p. 77

Lycée Hoche, Versailles

- 1 On développe :

$$\begin{aligned}
 (3x + \sqrt{2})^3 &= (3x + \sqrt{2})^2 \times (3x + \sqrt{2}) \\
 &= (9x^2 + 6x\sqrt{2} + 2) \times (3x + \sqrt{2}) \\
 &= 27x^3 + 9x^2\sqrt{2} + 18x^2\sqrt{2} + 12x + 6x + 2\sqrt{2} \\
 &= 27x^3 + 27x^2\sqrt{2} + 18x + 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

- 2** Posons $N = 875\,683$. On doit calculer $X = N^2 - (N + 1)(N - 1)$, ce qui donne facilement :

$$X = N^2 - (N^2 - 1) = 1.$$

- 3** Le facteur commun $(2x - 3)$ apparaît dans E :

$$\begin{aligned} E &= (2x - 3)^2 + (3 - 2x)(x - 1) - 6 + 4x \\ &= (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x - 1) + 2(2x - 3) \\ &= (2x - 3)[(2x - 3) - (x - 1) + 2] \\ &= (2x - 3)(2x - 3 - x + 1 + 2) \\ &= (2x - 3)x. \end{aligned}$$

F est la différence de deux carrés :

$$\begin{aligned} F &= (a + 2)^2 - 4(5a - 3)^2 \\ &= (a + 2)^2 - [2(5a - 3)]^2 \\ &= [(a + 2) - 2(5a - 3)][(a + 2) + 2(5a - 3)] \\ &= (-9a + 8)(11a - 4). \end{aligned}$$

G est également la différence de deux carrés :

$$G = a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1).$$

7 Factorisations

→ **Énoncé**
p. 77

Lycée Chateaubriand, Rennes

- 1** $f(x) = 3(x - 2)(x^2 + 1) - (6x^2 - 5)(x - 2)$
 $= (x - 2)[3(x^2 + 1) - (6x^2 - 5)]$
 $= (x - 2)[3x^2 + 3 - 6x^2 + 5]$
 $= (x - 2)[-3x^2 + 8]$
 $= (x - 2)(\sqrt{8} - x\sqrt{3})(\sqrt{8} + x\sqrt{3}).$
- 2** $16a^4 - 9 = (4a^2 - 3)(4a^2 + 3) = (2a - \sqrt{3})(2a + \sqrt{3})(4a^2 + 3).$
- 3** On utilise le produit remarquable : $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Il vient :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) + (x + 2)(1 - x) \\ &= (x - 1)^2 - 7(x - 1) + (x + 2)(1 - x) \\ &= (x - 1)[(x - 1) - 7 - (x + 2)] \\ &= (x - 1)[x - 1 - 7 - x - 2] \\ &= -10(x - 1). \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Remarque : bizarrement, on obtient le même résultat en développant :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 7x + 7 + x + 2 - x^2 - 2x = -10x + 10 = -10(x - 1).$$

Mais c'est exceptionnel ! Ça marche seulement parce que les coefficients des x^2 se compensent. Le simple développement échoue, par exemple, si on modifie un peu la formule, par exemple :

$$x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) + (3x + 2)(1 - x) = -2x^2 - 8x + 10.$$

Alors que la factorisation par $(x - 1)$ donne :

$$x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) - (3x + 2)(x - 1) = -2(x - 1)(5 + x).$$

- 4 Pour ne pas tomber dans le piège, il faut se souvenir de $(ab)^2 = a^2b^2$. Comme $6x - 3 = 3(2x - 1)$, on aura $(6x - 3)^2 = 9(2x - 1)^2$ (et non pas $3(2x - 1)^2$!). Les calculs donnent :

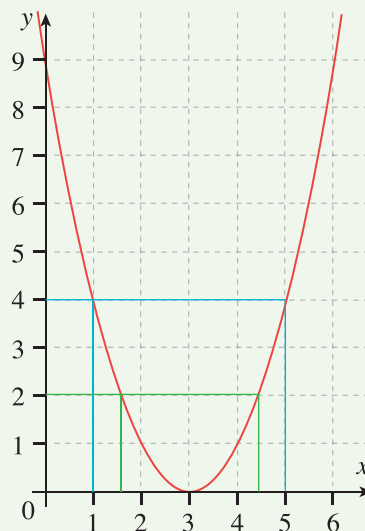
$$\begin{aligned} f(x) &= (6x - 3)^2 - (2x - 1) \\ &= 9(2x - 1)^2 - (2x - 1) \\ &= (2x - 1)[9(2x - 1) - 1] \\ &= (2x - 1)(18x - 9 - 1) \\ &= (2x - 1)(18x - 10) \\ &= 2(2x - 1)(9x - 5). \end{aligned}$$

8 Équations

Lycée Paul Lapie, Courbevoie

Enoncé
p. 77

- 1 On détermine sur la figure les points d'ordonnées 4, 2 ou -1.



- (a) Il y a deux points d'ordonnée 4, d'abscisses : 1 et 5.

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(b) Il y a deux points d'ordonnée 2. L'un a une abscisse comprise entre 1 et 2, l'autre a une abscisse comprise entre 4 et 5.

(c) Aucun point de la courbe n'a une ordonnée négative.

$$\begin{aligned} 2 \quad (a) \quad (x-3)^2 = 4 &\iff (x-3)^2 - 4 = 0 \\ &\iff (x-3)^2 - 2^2 = 0 \\ &\iff (x-3-2)(x-3+2) = 0 \\ &\iff (x-5)(x-1) = 0 \end{aligned}$$

On a donc deux solutions :

$$S = \{1; 5\}.$$

(b) De la même façon :

$$\begin{aligned} (x-3)^2 = 2 &\iff (x-3)^2 - 2 = 0 \\ &\iff (x-3)^2 - \sqrt{2}^2 = 0 \\ &\iff (x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2}) = 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$S = \{3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}\}.$$

(c) Un carré étant toujours positif ou nul, l'équation :

$$(x-3)^2 = -1$$

n'a pas de solution et $S = \emptyset$.

9 Équations

➔ Enoncé
p. 78

Lycée Foch, Rodez

1 Il suffit de développer l'expression :

$$(3x+4)(5x-3) = 15x^2 - 9x + 20x - 12 = 15x^2 + 11x - 12 = f(x).$$

2 (a) $f(x) = 0 \iff (3x+4)(5x-3) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc $3x+4=0$ ou $5x-3=0$. On obtient les deux solutions :

$$S = \left\{ \frac{-4}{3}, \frac{3}{5} \right\}.$$

(b) $f(x) = 15x^2 \iff 15x^2 + 11x - 12 = 15x^2 \iff 11x - 12 = 0$.
D'où une seule solution :

$$S = \left\{ \frac{12}{11} \right\}.$$

(c) $f(x) = -12 \iff 15x^2 + 11x - 12 = -12 \iff 15x^2 + 11x = 0$
 $\iff x(15x + 11) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, d'où $x = 0$ ou $15x + 11 = 0$. Il vient :

$$S = \left\{ 0 ; \frac{-11}{15} \right\}.$$

- (d) On reconnaît la présence de $5x - 3$ des deux côtés du symbole « = », il suffit donc de factoriser par $5x - 3$:

$$\begin{aligned} f(x) = 5x - 3 &\iff (3x + 4)(5x - 3) = 5x - 3 \\ &\iff (3x + 4)(5x - 3) - (5x - 3) = 0 \\ &\iff (5x - 3)[(3x + 4) - 1] = 0 \\ &\iff (5x - 3)(3x + 3) = 0 \\ &\iff 3(5x - 3)(x + 1) = 0 \end{aligned}$$

Là encore, on utilise le résultat sur les produits nuls, ce qui donne $5x - 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$. Il vient :

$$S = \left\{ -1 ; \frac{3}{5} \right\}.$$

- (e) $f(x) = 14x^2 + 11x + 4 \iff 15x^2 + 11x - 12 = 14x^2 + 11x + 4$
 $\iff x^2 - 16 = 0$
 $\iff (x - 4)(x + 4) = 0$ (produit remarquable)

L'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{-4 ; +4\}.$$

10 Bien choisir son taxi

 **Enoncé**
p. 78

Lycée Victor Duruy, Paris

-  **1** (a) Avec le tarif A, 8 km coûtent :

$$5 + 8 \times 0,40 = 5 + 3,20 = 8,20 \text{ €}.$$

Avec le tarif B, le même trajet revient à : $8 \times 0,60 = 4,80 \text{ €}$.

Il vaut donc mieux utiliser le taxi B.

- (b) Pour 30 km, le tarif A coûte :

$$5 + 30 \times 0,40 = 5 + 12 = 17 \text{ €},$$

alors que le tarif B revient à : $30 \times 0,60 = 18 \text{ €}$.

Il vaut donc mieux prendre le taxi A.

- 2** Dans le cas général, pour x kilomètres, le tarif A revient à :

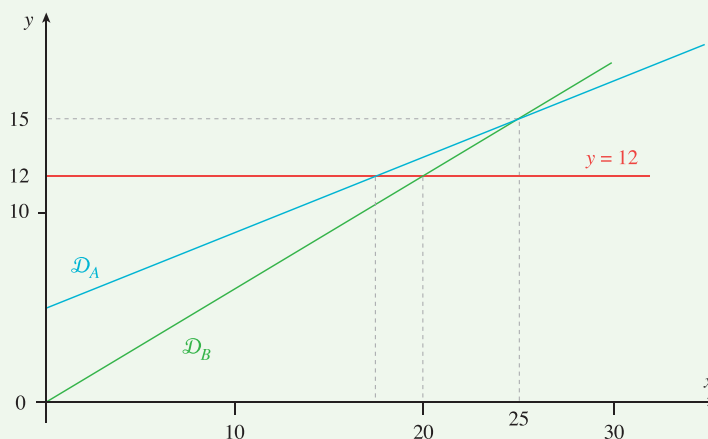
$$A(x) = 5 + 0,40x$$

et le tarif B :

$$B(x) = 0,60x.$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

- 3 (a)** Il s'agit de deux fonctions affines (la seconde est même linéaire), donc $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ sont deux droites. D'après nos calculs, $\mathcal{D}_A$ passe par le point de coordonnées (30 ; 17) et, par exemple (0 ; 5) ; $\mathcal{D}_B$ passe par le point de coordonnées (30 ; 18) et (0 ; 0). On obtient la représentation :



- (b)** Les coordonnées de l'intersection sont données par le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 5 + 0,40 \cdot x \\ y = 0,60 \cdot x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,60x = 5 + 0,40 \cdot x \\ y = 0,60x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,20x = 5 \\ y = 0,60 \cdot x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{0,20} = 25 \\ y = 0,60 \times 25 = 15 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour 25 km, les deux tarifs sont équivalents (on paiera 15 € dans les deux cas).

- 4 (a)** À droite du point d'intersection (c'est-à-dire pour des trajets de plus de 25 km), la droite $\mathcal{D}_A$ est en-dessous de la droite $\mathcal{D}_B$, le taxi A est donc moins cher.
- (b)** On utilise la droite horizontale, d'équation $y = 12$ pour lire sur le graphique, pour chaque tarif, les distances correspondant à 12 €. La droite horizontale coupe $\mathcal{D}_A$ à gauche du point où elle coupe $\mathcal{D}_B$. On parcourt donc plus de kilomètres avec le tarif B. D'après le graphique, le tarif B permet de parcourir 20 kilomètres. C'est moins de 25 : on est bien dans le domaine où le tarif B est moins cher (plus de kilomètres pour le même prix).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Équations

Enoncé
p. 79

Lycée Blaise Pascal, Orsay

$$\begin{aligned} 1 \quad & \frac{5x+3}{4} - \frac{x-9}{3} = \frac{x}{2} + 5 \\ & \frac{15x+9}{12} - \frac{4x-36}{12} = \frac{6x}{12} + \frac{60}{12} \\ & 15x+9-4x+36 = 6x+60 \\ & 5x = 15 \\ & x = 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $S = \{3\}$.

$$\begin{aligned} 2 \quad & (4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0 \\ & ((4x^2 - 3x - 18) + (4x^2 + 3x))((4x^2 - 3x - 18) - (4x^2 + 3x)) = 0 \\ & (4x^2 - 3x - 18 + 4x^2 + 3x)(4x^2 - 3x - 18 - 4x^2 - 3x) = 0 \\ & (8x^2 - 18)(-6x - 18) = 0 \\ & 2(4x^2 - 9)(-6)(x + 3) = 0 \\ & (-12)(2x - 3)(2x + 3)(x + 3) = 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul quand l'un des facteurs est nul.

On obtient l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ -3 ; -\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} \right\}.$$

3 Il faut déjà remarquer que les valeurs 4 et 5, qui annulent les dénominateurs, ne sont pas autorisées...

$$\begin{aligned} & \frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x-4} = 2 - \frac{2}{x-4} \\ \Rightarrow & \frac{x-4}{x-5} = -\frac{x-6}{x-4} + 2 - \frac{2}{x-4} \\ & = -\frac{x-6}{x-4} + \frac{2x-8}{x-4} - \frac{2}{x-4} \\ & = \frac{-x+6+2x-8-2}{x-4} \\ & = \frac{x-4}{x-4} \\ & = 1 \\ \Rightarrow & x-4 = x-5 \\ \Rightarrow & -4 = -5 \end{aligned}$$

Ceci n'est visiblement pas vrai, il n'y a pas de solution : $S = \emptyset$.

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

12 Équations

Enoncé
p. 79

Lycée Lambert, Mulhouse

Insistons encore :

MÉTHODE

Toute équation du premier degré se ramène à la forme $ax + b = 0$
Pour une équation du second degré, on rassemble tous les termes dans le même membre de l'équation et *on factorise*, pour se retrouver dans le cas d'un produit nul de facteurs du premier degré.

- 1 Si vous ne voyez pas de facteur commun, c'est normal, regardez mieux :
il n'y a pas de x^2 , il s'agit d'une simple équation du premier degré.
Il suffit donc d'effectuer le développement suivant :

$$\begin{aligned} 7(2x + 4) - 5(4x - 3) &= \frac{2}{5} - \frac{3x - 5}{2} \\ \Leftrightarrow 14x + 28 - 20x + 15 &= \frac{4}{10} - \frac{15x - 25}{10} \\ \Leftrightarrow -6x + 43 &= \frac{29 - 15x}{10} \\ \Leftrightarrow -60x + 430 &= 29 - 15x \\ \Leftrightarrow -45x &= -401 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{401}{45} \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions :

$$S = \left\{ \frac{401}{45} \right\}.$$

- 2 Là non plus, pas de facteur commun évident, et pas de produit remarquable. Il faut se résoudre (la mort dans l'âme) ... à développer :

$$\begin{aligned} (3x - 2)(2x - 5) + 2(x - 5)(7 - 3x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x^2 - 15x - 4x + 10 + (2x - 10)(7 - 3x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x^2 - 19x + 10 + 14x - 6x^2 - 70 + 30x &= 0 \\ \Leftrightarrow 25x - 60 &= 0 \end{aligned}$$

On comprend mieux pourquoi il fallait développer. L'équation est en fait du premier degré (un peu camouflé, il est vrai). L'unique solution est :

$$\frac{60}{25} = \frac{12}{5}.$$

D'où :

$$S = \left\{ \frac{12}{5} \right\}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

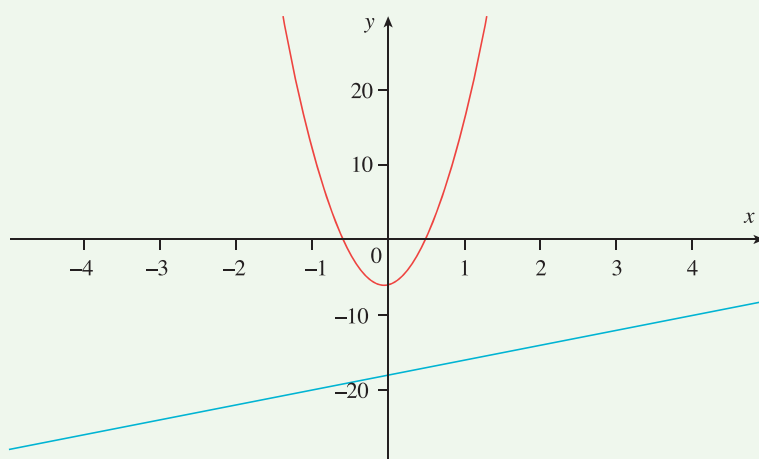
- 3 Décidément, pas de chance, toujours pas de facteur commun à l'horizon. Développons, pour voir :

$$(5x + 3)(4x - 2) = 2(x - 9) \iff 20x^2 - 10x + 12x - 6 = 2x - 18 \\ \iff 20x^2 + 12 = 0$$

Comme un carré est toujours positif, l'expression $20x^2 + 12$ ne vaut jamais zéro, il n'y a donc pas de solution :

$$S = \emptyset.$$

Sur le graphique ci-dessous, nous voyons les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto (5x + 3)(4x - 2)$ (parabole) et $x \mapsto 2(x - 9)$ (droite). On constate en effet que ces deux courbes n'ont pas de point d'intersection.



- 4 On rassemble tous les termes du même côté du symbole « = » :

$$9(4x - 1)^2 - (3x - \frac{1}{2})^2 = 0.$$

Il faut reconnaître que $9(4x - 1)^2$ est un carré. Comme $9 = 3^2$, on a :

$$9(4x - 1)^2 = [3(4x - 1)]^2 = (12x - 3)^2.$$

L'équation se ramène donc à :

$$(12x - 3)^2 - \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Il s'agit de la différence de deux carrés, que l'on factorise :

$$\left(12x - 3 + 3x - \frac{1}{2}\right)\left(12x - 3 - 3x + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

ou encore :

$$\left(15x - \frac{7}{2}\right)\left(9x - \frac{5}{2}\right) = 0.$$

Ce produit est nul si et seulement si $15x - \frac{7}{2} = 0$ ou $9x - \frac{5}{2} = 0$.

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

La première équation donne la solution $\frac{7}{30}$, la seconde $\frac{5}{18}$.

D'où les solutions :

$$S = \left\{ \frac{7}{30} ; \frac{5}{18} \right\}.$$

5 Enfin une équation avec un beau facteur commun $(2 - x)$!

$$\begin{aligned} & (2 - x)(5x + 3) + (x - 2)(3 - x) - (2 - x) = 0 \\ \iff & (2 - x)[(5x + 3) - (3 - x) - 1] = 0 \\ \iff & (2 - x)(5x + 3 - 3 + x - 1) = 0 \\ \iff & (2 - x)(6x - 1) = 0 \end{aligned}$$

On s'est une nouvelle fois ramené au cas d'un produit nul, les deux solutions sont 2 et $\frac{1}{6}$:

$$S = \left\{ \frac{1}{6} ; 2 \right\}.$$

13 Inéquations

Lycée Colbert, Paris

Enoncé
p. 79

1 On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{-3}{1+x} \geq 3 & \iff \frac{-3}{1+x} \geq \frac{3(1+x)}{1+x} \\ & \iff \frac{-3 - 3(1+x)}{1+x} \geq 0 \\ & \iff \frac{-3(1+1+x)}{1+x} \geq 0 \\ & \iff \frac{-3(2+x)}{1+x} \geq 0 \end{aligned}$$

On dresse un tableau de signes :

x	$+\infty$	-2	-1	$+\infty$
$2+x$	$-$	0	$+$	$+$
$-3(2+x)$	$+$	0	$-$	$-$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{-3(2+x)}{x+1}$	$-$	0	$+$	$-$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

D'après le tableau, l'ensemble des solutions est donc :

$$S = [-2 ; -1[.$$

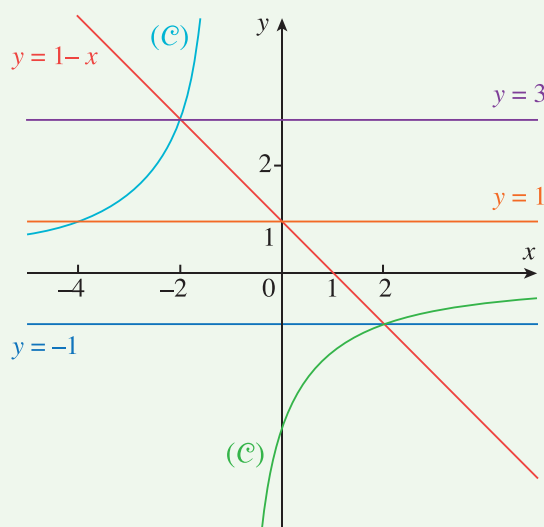
On retrouve graphiquement ce résultat en plaçant sur la figure la droite d'équation $y = 3$. Les solutions sont les abscisses des points de $(\mathcal{C})$ qui sont situés au-dessus de cette droite (voir figure à la fin du corrigé). Il s'agit effectivement des points d'abscisses comprises entre -2 et -1 (on exclut -1 car f n'est pas définie en -1).

- 2** Sur la figure, on représente les droites horizontales $y = 1$ et $y = -1$. On cherche les abscisses des points de $(\mathcal{C})$ qui sont dans la bande délimitée par ces deux droites. On lit l'ensemble des solutions sur la figure :

$$S =]-\infty ; -4[\cup]2 ; +\infty[.$$

- 3** On cherche les abscisses des points de la courbe qui sont au-dessus de la droite d'équation $y = 1 - x$. On lit sur le dessin l'ensemble des solutions :

$$S = [-2 ; -1[\cup]2 ; +\infty[$$



Retrouvons ce résultat par le calcul :

$$\begin{aligned} \frac{-3}{x+1} &\geq 1-x \iff \frac{-3}{x+1} - (1-x) \geq 0 \\ &\iff \frac{-3 - (x+1)(1-x)}{x+1} \geq 0 \\ &\iff \frac{x^2 - 4}{x+1} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x-2)(x+2)}{x+1} \geq 0. \end{aligned}$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

En faisant le tableau de signe de $\frac{(x-2)(x+2)}{x+1}$ on retrouve le résultat obtenu précédemment par lecture graphique.

14 Inéquations

Enoncé
p. 80

Lycée Montesquieu, Le Mans

1 On commence par factoriser l'expression :

$$\begin{aligned}(x+6)(x-3) - 2x + 6 &\geq 0 \iff (x+6)(x-3) - 2(x-3) \geq 0 \\ &\iff (x-3)[(x+6) - 2] \geq 0 \\ &\iff (x-3)(x+4) \geq 0\end{aligned}$$

On utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$
$x-3$	$-$		0	$+$
$(x-3)(x+4)$	$+$	0	$-$	$+$

On conclut :

$$S =]-\infty; -4] \cup [3; +\infty[.$$

2 On remarque qu'il faudra exclure la valeur 1 (à cause du dénominateur). Surtout pas de produits en croix, il faut réduire au même dénominateur puis rassembler l'expression dans le même membre.

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{1-x} \geq 2 &\iff \frac{x+3}{1-x} \geq \frac{2(1-x)}{(1-x)} \\ &\iff \frac{x+3}{1-x} - \frac{2(1-x)}{(1-x)} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x+3) - 2(1-x)}{1-x} \geq 0 \\ &\iff \frac{x+3-2+2x}{1-x} \geq 0 \\ &\iff \frac{3x+1}{1-x} \geq 0\end{aligned}$$

Les valeurs importantes sont $\frac{-1}{3}$ et 1, on utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{3}$	1	$+\infty$
$3x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{3x+1}{1-x}$	$-$	0	$+$	$-$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

On obtient :

$$S = \left[\frac{-1}{3} ; 1 \right[.$$

3 Ici, pas de calcul à faire : quel que soit le réel x , son carré x^2 est positif, donc $25x^2 + 4 \geq 0$. L'ensemble des solutions est donc $\mathbb{R}$.

4 On reconnaît un produit remarquable :

$$25x^2 - 4 = (5x - 2)(5x + 2).$$

Cette expression s'annule en $\frac{2}{5}$ et $-\frac{2}{5}$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$5x - 2$		-	- 0 +	
$5x + 2$		- 0 +	+	
$25x^2 - 4$		+ 0 -	0 +	

D'où :

$$S = \left] -\infty ; -\frac{2}{5} \right] \cup \left[\frac{2}{5} ; +\infty \right[.$$

15 Inéquations

➔ **Énoncé**
p. 80

Lycée Auguste Renoir, Cagnes-sur-Mer

1 Il suffit de développer :

$$4 - (x - 1)^2 = 4 - (x^2 - 2x + 1) = 4 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x + 3.$$

On reconnaît dans $f(x) = 4 - (x - 1)^2$ la différence de deux carrés, ce qui permet de factoriser :

$$\begin{aligned} f(x) &= [2 - (x - 1)](2 + (x - 1)) \\ &= (3 - x)(1 + x). \end{aligned}$$

On peut dresser un tableau de signes :

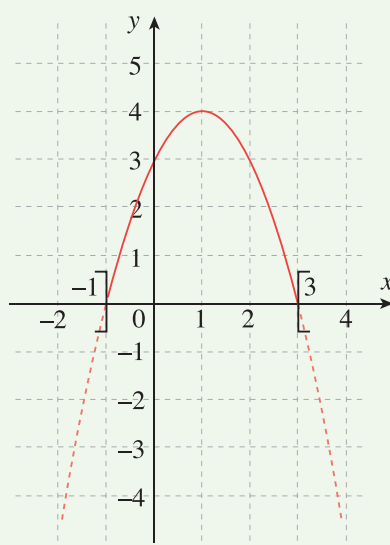
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x + 1$		- 0 +	+	
$3 - x$		+	+ 0 -	
$(3 - x)(x + 1)$		- 0 +	0 -	

On conclut :

$$S =] -1 ; 3[.$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

- 2 Pour résoudre graphiquement l'inéquation, on fait apparaître sur la figure les points d'ordonnée strictement positive. Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation.



On retrouve bien l'intervalle $] -1 ; 3[$.

16 Inéquations

Lycée Carnot, Dijon

→ Enoncé
p. 81

Pour résoudre cette inéquation, on passe tout dans le même membre et on factorise :

$$\begin{aligned}(2x + 5)^2 - (3x + 2)^2 &\leq 0 \\ ((2x + 5) + (3x + 2))((2x + 5) - (3x + 2)) &\leq 0 \\ (5x + 7)(-x + 3) &\leq 0\end{aligned}$$

Dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	3	$+\infty$	
$5x + 7$	$-$	0	$+$	$+$	
$-x + 3$	$+$		$+$	0	$-$
$(5x + 7)(-x + 3)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit : $S = \left] -\infty ; -\frac{7}{5} \right] \cup [3 ; +\infty[$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

17 Inéquations

Enoncé
p. 81

Lycée Saint-Jean, Limoges

$$\begin{aligned} 1 \quad & (2x + 1)^2 - x^2 \geq 0 \\ & ((2x + 1) + x)((2x + 1) - x) \geq 0 \\ & (3x + 1)(x + 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Utilisez éventuellement un tableau de signes pour trouver :

$$S =] - \infty ; -1] \cup [-\frac{1}{3} ; +\infty[.$$

2 Attention ! Il s'agit en fait du développement du produit remarquable :

$$[(3x + 2) - (x + 1)]^2.$$

C'est un carré, il n'est donc négatif (au sens large) que lorsqu'il vaut zéro. D'où :

$$(3x + 2) - (x + 1) = 0 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion : } S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

18 Inéquations

Enoncé
p. 81

Lycée Descartes, Antony

1 Les deux membres étant constitués de sommes et de produits, pas de problème de définition : le domaine est $\mathbb{R}$. Il y a un x^3 , il faut être prudent. Étant donnée la façon dont sont disposés les deux membres de l'inéquation, il faut penser à factoriser chacun d'entre eux :

$$x^2(x - 1) \geq 4(x - 1).$$

On passe tout dans le même membre, et on obtient :

$$x^2(x - 1) - 4(x - 1) \geq 0$$

$$(x - 1)(x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x + 2) \geq 0$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$x - 1$		-	0	+	+
$x - 2$		-	-	0	+
$x + 2$		-	0	+	+
produit		-	0	+	+

On en déduit :

$$S = [-2 ; 1] \cup [2 ; +\infty[.$$

2 Il faut ôter de l'ensemble de définition les valeurs qui annulent le dénominateur. Factorisons celui-ci : $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. L'inéquation

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Il ne reste qu'à étudier le signe de $\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$:

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x-1$	—	—	—	0	+
$x+1$	—	—	0	+	+
$x+2$	—	0	+	+	+
$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$	—	0	+	—	+

On en déduit : $S =]-\infty; -2[\cup]-1; 1[$.

3 On passe $16x$ à gauche et on factorise :

$$x^2 - 16x \geq 0 \iff x(x - 16) \geq 0$$

En s'aidant au besoin d'un tableau de signes, on obtient :

$$S =]-\infty; 0] \cup [16; +\infty[.$$

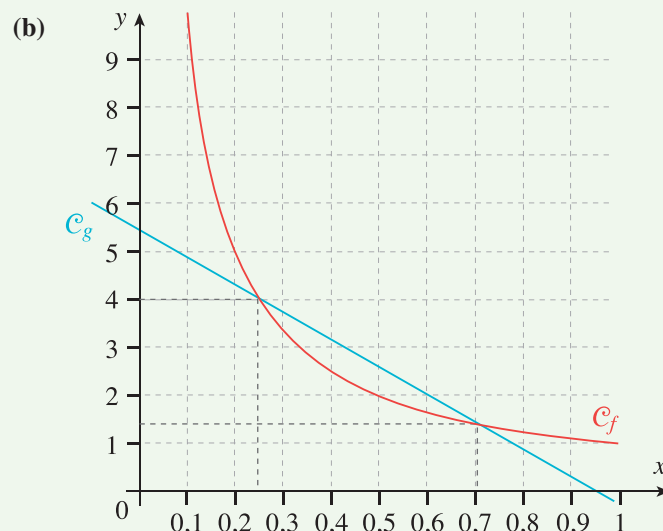
19 Inéquations

➔ **Énoncé**
p. 82

Lycée Camille Claudel, Troyes

1 (a)

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$	10	5	3,33	2,5	2	1,67	1,43	1,25	1,11	1



(c) Ne vous laissez pas éblouir par tous ces radicaux (les racines carrées). g est une simple fonction... affine, de la forme $g(x) = ax + b$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Ici $a = -\frac{8}{\sqrt{2}}$ et $b = 4 + \sqrt{2}$. Comme le coefficient directeur a est strictement négatif, la fonction g est strictement décroissante. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est une droite (c'est pour cela que l'on vous demande de calculer seulement trois images ; en fait, deux suffiraient).

(d)

x	0	0,25	0,5
$g(x)$	$4 + \sqrt{2} \approx 5,41$	4	$4 - \sqrt{2} \approx 2,59$

(e) Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points. Le premier a visiblement pour ordonnée 4. Son abscisse se trouve dans le tableau de valeurs de g : elle vaut 0,25. (On peut se contenter de lire cette abscisse sur le graphique).

Le deuxième point d'intersection a pour abscisse 0,7 (l'ordonnée n'a pas d'importance). Si vous avez fait un dessin très précis, vous pouvez vous rendre compte que l'abscisse de ce point d'intersection est très légèrement plus grande que 0,7. Mais ne trichez pas (le calcul exact est fait à la fin de l'exercice) !

La lecture graphique donne 0,25 et 0,7 comme abscisses pour les points d'intersection.

La courbe $\mathcal{C}_f$ passe en-dessous de la droite $\mathcal{C}_g$ entre ces deux points. On obtient pour ensemble des solutions de $g(x) > f(x)$:

$$S =]0,25 ; 0,7[.$$

2 (a) On calcule :

$$\begin{aligned} g(x) > f(x) &\iff -\frac{8}{\sqrt{2}}x + 4 + \sqrt{2} > \frac{1}{x} \\ &\iff \frac{-8x + 4\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x} > 0 \\ &\iff \frac{-8x^2 + 4x\sqrt{2} + 2x}{x\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}} > 0 \\ &\iff \frac{-8x^2 + 4x\sqrt{2} + 2x - \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} > 0 \\ &\iff \frac{-8x^2 + 2x(2\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} > 0 \\ &\iff \frac{8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} < 0 \end{aligned}$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(b) On développe :

$$\begin{aligned} P(x) &= -8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) \\ &= (-8x + 2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) \\ &= 8x^2 - 8x\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 2x \\ &= 8x^2 - 4x\sqrt{2} - 2x + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

On reconnaît dans :

$$P(x) = 8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}$$

le numérateur de :

$$\frac{8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}}{x\sqrt{2}}.$$

(c) L'inéquation $g(x) > f(x)$ devient donc :

$$\frac{-8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)}{x\sqrt{2}} < 0.$$

Ne perdons pas de vue que cette inéquation est à résoudre sur $]0; 1]$.

On a donc $x\sqrt{2} > 0$, et on peut simplifier l'inéquation en :

$$-8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) < 0.$$

L'expression s'annule pour $x = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Il s'agit des abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$:

$$\frac{1}{4} = 0,25 \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71.$$

On dresse un tableau de signes :

x	0 $\frac{1}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1				
$-8\left(x - \frac{1}{4}\right)$	+ 0 -			-	
$\frac{\sqrt{2}}{2} - x$	+	+ 0 -			
$P(x)$	+ 0 - 0 +				

D'après le tableau :

$$S = \left] \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[.$$

20 Inéquations

Enoncé
p. 83

Lycée Jacques Monod, Clamart

- 1 Pour vérifier le signe d'un produit, on peut utiliser un tableau de signes :

x	$+\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$3 - 2x$	$+$	$+$	0	$-$
$(x + 1)(3 - 2x)$	$-$	0	$+$	$-$

On lit dans le tableau l'ensemble des solutions de $(x + 1)(3 - 2x) < 0$:

$$S =]-\infty ; -1[\cup \left] \frac{3}{2} ; +\infty \right[.$$

Résolution de $(x + 1)(2 - x) > x^2 - 1$.

Rappelez-vous le grand principe : ne jamais développer, à moins de ne pas pouvoir faire autrement.

Ici, le produit remarquable $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ vous tend les bras, et il n'y a plus qu'à factoriser par $(x + 1)$:

$$\begin{aligned}(x + 1)(2 - x) &> (x - 1)(x + 1) \\ \iff (x + 1)(2 - x) - (x - 1)(x + 1) &> 0 \\ \iff (x + 1)(3 - 2x) &> 0\end{aligned}$$

Ça devrait vous rappeler quelque chose ... D'après le tableau de signes ci-dessus, l'ensemble des solutions est :

$$S' = \left] -1 ; \frac{3}{2} \right[.$$

- 2 On résout, non sur $\mathbb{R}$, mais sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}$ à cause du dénominateur. Si vous avez envie d'effectuer des « produits en croix », résistez à vos pulsions : vous ne connaissez pas le signe du dénominateur, et donc on ne sait pas ce qui arrivera au sens de l'inégalité après multiplication (en fait, on peut faire une discussion, mais c'est assez lourd). La meilleure méthode est une réduction au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{2x - 7}{1 - 5x} < 3 &\iff \frac{2x - 7}{1 - 5x} < \frac{3 - 15x}{1 - 5x} \\ &\iff \frac{2x - 7}{1 - 5x} - \frac{3 - 15x}{1 - 5x} < 0 \\ &\iff \frac{(2x - 7) - (3 - 15x)}{1 - 5x} < 0 \\ &\iff \frac{17x - 10}{1 - 5x} < 0\end{aligned}$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

On dresse un tableau de signes. Pour connaître l'ordre des valeurs importantes : $\frac{10}{17}$ et $\frac{1}{5}$, vous pouvez vous référer à votre calculatrice, ou (mieux !), utiliser les produits en croix (ici, vous connaissez les signes) :

$$5 \times 10 > 17 \text{ donc } \frac{10}{17} > \frac{1}{5}.$$

Voici le tableau de signes :

x	$+\infty$	$\frac{1}{5}$	$\frac{10}{17}$	$+\infty$
$17x - 10$	—	—	0	+
$1 - 5x$	+	0	—	—
$\frac{17x - 10}{1 - 5x}$	—	+	0	—

L'ensemble des solutions est donc :

$$S =]-\infty ; \frac{1}{5}[\cup \left] \frac{10}{17} ; +\infty \right[.$$

21 Inéquations

Lycée Stanislas, Paris

Enoncé
p. 83

1 $x^2 + 5x + 9 < (x - 1)x + 12$

$$x^2 + 5x + 9 < x^2 - x + 12$$

$$5x + x < 12 - 9$$

$$6x < 3$$

$$x < \frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions est donc : $S =]-\infty ; \frac{1}{2}[$.

2 Il faut d'abord résoudre chaque partie de l'inéquation indépendamment, après avoir remarqué que la valeur 5 n'est pas autorisée.

$$\begin{aligned} 2 < \frac{x-3}{x-5} &\iff \frac{2x-10}{x-5} < \frac{x-3}{x-5} \\ &\iff \frac{2x-10}{x-5} - \frac{x-3}{x-5} < 0 \\ &\iff \frac{2x-10-x+3}{x-5} < 0 \\ &\iff \frac{x-7}{x-5} < 0 \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On construit un tableau de signes :

x	$-\infty$	5	7	$+\infty$
$x - 7$	—	—	0	+
$x - 5$	—	0	+	+
$\frac{x - 7}{x - 5}$	+	—	0	+

La première inégalité n'est donc vérifiée que si : $5 < x < 7$.

$$\begin{aligned}
 \frac{x - 3}{x - 5} < 3 &\iff \frac{x - 3}{x - 5} < \frac{3x - 15}{x - 5} \\
 &\iff 0 < \frac{3x - 15}{x - 5} - \frac{x - 3}{x - 5} \\
 &\iff 0 < \frac{3x - 15 - x + 3}{x - 5} \\
 &\iff 0 < \frac{2x - 12}{x - 5} \\
 &\iff 0 < \frac{x - 6}{x - 5}
 \end{aligned}$$

Là encore, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	5	6	$+\infty$
$x - 6$	—	—	0	+
$x - 5$	—	0	+	+
$\frac{x - 6}{x - 5}$	+	—	0	+

La deuxième inégalité n'est vérifiée que si : $x < 5$ ou $x > 6$

Les deux inégalités ne sont donc vérifiées en même temps que si $x > 6$ et $x < 7$, donc l'ensemble des solutions est :

$$S =]6 ; 7[.$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

22 Inéquations

Enoncé
p. 83

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

$$\begin{aligned} 1 \quad \frac{3x+1}{4} > \frac{5x+1}{6} &\iff \frac{3x+1}{4} \times 12 > \frac{5x+1}{6} \times 12 \\ &\iff 9x+3 > 10x+2 \\ &\iff 1 > x \end{aligned}$$

D'où $S =]-\infty ; 1[$.

2 Un carré, positif, ne peut jamais être plus petit que -1 , il n'y a donc pas de solution. $S = \emptyset$.

3 On développe :

$$\begin{aligned} 2x-2-3x-3 &> 4x-8 \\ 2x-3x-4x &> 2+3-8 \\ -5x &> -3 \\ x &< \frac{3}{5} \end{aligned}$$

D'où $S = \left] -\infty ; \frac{3}{5} \right[$.

4 $(-2x-3)^4$ est toujours positif. S'il n'est pas nul, il faut que x soit positif pour que le produit $x(-2x-3)^4$ soit supérieur à 0. Si $(-2x-3)^4 = 0$, c'est que $-2x-3 = 0$, et donc $x = -\frac{3}{2}$. On obtient :

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\} \cup [0 ; +\infty[.$$

5 On réduit toutes les fractions au dénominateur 4 :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{4} - \frac{20}{4} &\leq \frac{4x-6}{4} + \frac{3}{4} \\ x-1-20 &\leq 4x-6+3 \\ -21+6-3 &\leq 4x-x \\ -18 &\leq 3x \\ -6 &\leq x \end{aligned}$$

D'où : $S = [-6 ; +\infty[$.

23 Inéquations

Enoncé
p. 84

Lycée Murat, Issoire

$$1 \quad f(x) = x^2 + 2x\sqrt{3} + 3 - 5 = x^2 + 2x\sqrt{3} - 2.$$

2 On reconnaît une expression du type $A^2 - B^2$:

$$f(x) = (x + \sqrt{3} + \sqrt{5})(x + \sqrt{3} - \sqrt{5}).$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 On utilise la forme développée pour calculer :

- $f(\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{6} - 2 = 2\sqrt{6}$.
- $f(0) = -2$.

La forme factorisée est plus adaptée pour calculer :

$$f(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = 0.$$

Enfin, la forme de l'énoncé permet de voir facilement :

$$f(-\sqrt{3}) = -5.$$

4 On doit résoudre :

$$(x + \sqrt{3} + \sqrt{5})(x + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = 0.$$

Un produit s'annule lorsqu'au moins l'un de ses facteurs est nul, d'où deux solutions :

$$S = \{\sqrt{5} - \sqrt{3}; -\sqrt{5} - \sqrt{3}\}.$$

5 On se sert de l'étude précédente pour dresser un tableau de signes. On note au passage que $-\sqrt{5} - \sqrt{3} < \sqrt{5} - \sqrt{3}$ (car $-\sqrt{5} < \sqrt{5}$).

x	$-\infty$	$-\sqrt{5} - \sqrt{3}$	$\sqrt{5} - \sqrt{3}$	$+\infty$
$x + \sqrt{3} + \sqrt{5}$	—	0	+	+
$x + \sqrt{3} - \sqrt{5}$	—	—	0	+
$f(x)$	+	0	—	+

D'après le tableau :

$$S =]-\infty; -\sqrt{5} - \sqrt{3}] \cup [\sqrt{5} - \sqrt{3}; +\infty[.$$

6 L'inéquation $(x + \sqrt{3})^2 - 5 \leq -5$ s'écrit :

$$(x + \sqrt{3})^2 \leq 0.$$

Le carré d'un réel est toujours positif ou nul.

On ne peut avoir $(x + \sqrt{3})^2 \leq 0$ qu'à la seule condition : $(x + \sqrt{3})^2 = 0$.
D'où une solution unique :

$$S = \{-\sqrt{3}\}.$$

7 S'il y avait une solution x , on aurait $(x + \sqrt{3})^2 \leq -1$, ce qui est impossible (car un carré est toujours positif). D'où $S = \emptyset$.

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

24 Tableaux de signes

Enoncé
p. 84

Lycée Jean Zay, Orléans

D'après le graphique, $f(x)$ s'annule si $x = -1$ et si $x = 4$. On dresse le tableau de signes :

x	-1	4
$f(x)$	$-$	$+$

De la même façon, on dresse le tableau de signes de g :

x	-2	1	4
$g(x)$	$-$	$+$	$-$

Le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'est défini que si $g(x) \neq 0$. En combinant les deux tableaux de signes précédents, on en déduit celui du quotient :

x	-2	-1	1	4
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$g(x)$	$-$	$+$	0	$+$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+$	$-$	$+$	$-$

On lit directement dans le tableau de signe que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ est $S =]-\infty ; -2[\cup [-1 ; 1[$.

25 Inéquations

Enoncé
p. 85

Lycée Jean-Baptiste Say, Paris

- 1 L'expression $(3x + 1)(2 - 4x)$ est un produit, qui s'annule si $3x + 1 = 0$ ou si $2 - 4x = 0$, donc pour $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{2}$.

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$3x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$2 - 4x$	$+$	$+$	0	$-$
$(3x + 1)(2 - 4x)$	$-$	0	$+$	$-$

D'après le tableau de signes, $(3x + 1)(2 - 4x) \leq 0$ pour $x \leq -\frac{1}{3}$ et $x \geq \frac{1}{2}$, d'où l'ensemble des solutions :

$$S =]-\infty ; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2} ; +\infty[.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

- 2** On utilise la méthode habituelle : on rassemble tous les termes dans le même membre, et on résout :

$$0 < (3x + 1)^2 - \left(\frac{1}{2}x - 7\right)^2.$$

Le membre de droite est la différence de deux carrés, on factorise :

$$0 < \left[(3x + 1) + \left(\frac{1}{2}x - 7\right)\right] \left[(3x + 1) - \left(\frac{1}{2}x - 7\right)\right].$$

On obtient :

$$0 < \left(\frac{7}{2}x - 6\right) \left(\frac{5}{2}x + 8\right).$$

Le produit s'annule si $\frac{7}{2}x - 6 = 0$ ou si $\frac{5}{2}x + 8 = 0$, donc pour $x = \frac{12}{7}$ ou $x = -\frac{16}{5}$. On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{16}{5}$	$\frac{12}{7}$	$+\infty$
$\frac{7}{2}x - 6$	-		- 0 +	
$\frac{5}{2}x + 8$	- 0 +			+
$\left(\frac{7}{2}x - 6\right)\left(\frac{5}{2}x + 8\right)$	+ 0 -		0 +	

D'après le tableau de signes, $\left(\frac{7}{2}x - 6\right) \left(\frac{5}{2}x + 8\right) > 0$ pour $x < -\frac{16}{5}$ ou $x > \frac{12}{7}$, d'où l'ensemble des solutions : $S =]-\infty ; -\frac{16}{5}[\cup]\frac{12}{7} ; +\infty[$.

- 3** Du point de vue du signe, un quotient se comporte comme un produit. Il faut en plus tenir compte de l'ensemble de définition. Le numérateur s'annule en 1, le dénominateur en 7, dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$-2(x - 1)$	+	0	—	—
$7 - x$	+	+	0	—
$\frac{-2(x - 1)}{(7 - x)}$	+	0	—	+

(Attention à la présence du -2 pour le signe du numérateur !)

On conclut :

$$S =]-\infty ; 1] \cup]7 ; +\infty[.$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

4

MÉTHODE

Quand on résout une inéquation où x apparaît au dénominateur, le grand principe est de tout rassembler dans le même membre et de mettre les différents termes au même dénominateur, et de ne pas faire de produits « en croix ».

On a ici :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{1-2x} < -1 &\iff \frac{x^2}{1-2x} + 1 < 0 \\ &\iff \frac{x^2 + 1 - 2x}{1-2x} < 0 \\ &\iff \frac{(x-1)^2}{1-2x} < 0\end{aligned}$$

On a le choix entre deux méthodes. La meilleure est probablement le tableau de signes. Ce n'est peut-être pas la façon la plus « frime », mais c'est certainement la plus sûre :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	0	+
$1-2x$	+	0	-	-
$\frac{(x-1)^2}{1-2x}$	+	-	0	-

D'où l'ensemble des solutions :

$$S = \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[\cup] 1 ; +\infty[.$$

Autre méthode : le numérateur est un carré, toujours positif, donc la fraction est négative lorsque $1-2x$ est négatif, donc pour $x \geq \frac{1}{2}$.

On doit enlever les valeurs $\frac{1}{2}$ (où la fraction n'est pas définie), et 1 (où

la fraction s'annule), d'où l'ensemble :

$$S = \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[\setminus \{1\}.$$

(c'est le même ensemble que celui que nous avons trouvé).

5

Même si des x apparaissent au dénominateur, on a tout de même le droit de simplifier les fractions avant de commencer d'autres calculs, d'où l'inéquation :

$$\frac{1}{(5-x)^2} \leq \frac{3x}{(5-x)^2}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Ne pas oublier que, même si la valeur 0 ne semble plus intervenir, nous continuons à résoudre l'inéquation dans $\mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$. La valeur 0 ne doit pas apparaître dans l'ensemble des solutions.

Ici, le dénominateur est strictement positif, quelle que soit la valeur de x . On peut donc simplifier et résoudre :

$$1 \leq 3x.$$

La « simplification » revient à multiplier les deux membres par $(5 - x)^2$. Comme $(5 - x)^2 > 0$, le sens de l'inégalité ne change pas. Noter que $x = 5$ est exclu de l'ensemble de définition, (c'est ce qui permet d'affirmer $(5 - x)^2 > 0$ et pas seulement $(5 - x)^2 \geq 0$).

On obtient donc $x \geq \frac{1}{3}$. Pensez à retirer la valeur 5 (0 ne convient pas de toute façon); l'ensemble des solutions est donc :

$$S = \left[\frac{1}{3}; +\infty \right[\setminus \{5\} = \left[\frac{1}{3}; 5 \right[\cup]5; +\infty[.$$

26 Inéquations

Enoncé
p. 85

Lycée Victor Hugo, Poitiers

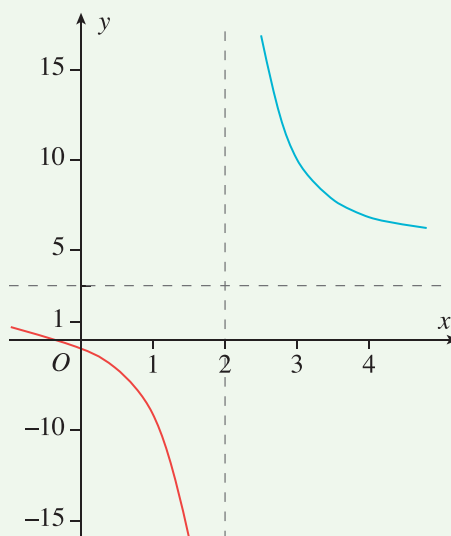
- 1 On commence par donner l'ensemble de définition de f . Au vu du dénominateur, on écrit :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Avant de tracer la courbe, on peut calculer quelques valeurs :

x	0	0,5	1	1,5	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	-0,5	-5/3	-4	-11	17	10	23/3	6,5

Traçons maintenant la courbe représentative :



ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

- 2** La courbe de la fonction $x \mapsto x^2 + x - 6$ est une parabole. Pour trouver son sommet, il faut commencer la factorisation de l'expression :

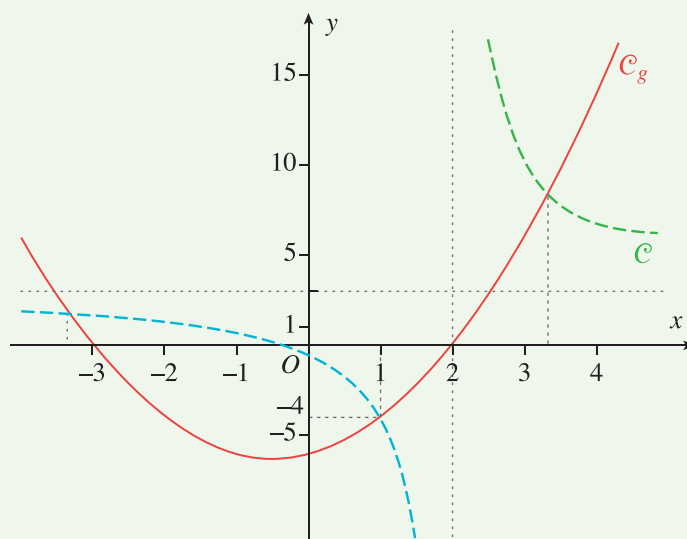
$$g(x) = x^2 + x - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6.$$

Ceci fait apparaître que $g(x)$ est minimum quand le carré $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ est le plus petit possible, c'est-à-dire nul, donc quand $x = -\frac{1}{2}$.

Le sommet de la parabole a donc comme coordonnées : $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.

On calcule quelques valeurs avant de tracer la courbe ci-dessous :

x	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-6	-6	-4	0	6	14



- 3** D'après le graphique, la courbe de g est « au-dessus » de celle de f pour $x \in]-\infty ; -3,3] \cup [1 ; 2[\cup [3,3 ; +\infty[$.

(Attention ! f n'est pas définie en 2. Notez bien que l'on vous demande une lecture graphique, alors pas de surenchère de précision !)

On peut aussi retrouver ce résultat par le calcul :

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{x-2} \leq x^2 + x - 6 &\iff \frac{3x+1}{x-2} \leq \frac{(x^2 + x - 6)(x-2)}{x-2} \\ &\iff 0 \leq \frac{x^3 + x^2 - 6x - 2x^2 - 2x + 12}{x-2} - \frac{3x+1}{x-2} \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{x^3 - x^2 - 11x + 11}{x - 2} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{x^2(x - 1) - 11(x - 1)}{x - 2} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{(x^2 - 11)(x - 1)}{x - 2} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{(x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11})(x - 1)}{x - 2} \end{aligned}$$

Pour résoudre cette inéquation, il ne reste plus qu'à dresser un tableau de signes.

x	$-\infty$	$-\sqrt{11}$	1	2	$\sqrt{11}$	$+\infty$
$x - \sqrt{11}$	—		—	—	0	+
$x + \sqrt{11}$	—	0	+	+	+	+
$x - 1$	—	—	0	+	+	+
$x - 2$	—	—	—	0	+	+
fraction	+	0	—	0	+	+

L'ensemble des solutions est confirmé :

$$S =]-\infty ; -\sqrt{11}] \cup [1 ; 2[\cup [\sqrt{11} ; +\infty[.$$

27 Inéquations

Enoncé
p. 85

Lycée Hélène Boucher, Paris

1 Il suffit de simplifier le deuxième membre :

$$\begin{aligned} 1 - x + \frac{x^2}{1 + x} &= \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 + x} + \frac{x^2}{1 + x} \\ &= \frac{1 - x^2}{1 + x} + \frac{x^2}{1 + x} \\ &= \frac{1}{1 + x} \end{aligned}$$

2 Si $x \geq -\frac{1}{2}$, il est clair que $x + 1 > 0$, donc $\frac{1}{1 + x} \geq 0$. De plus on a :

$$\begin{aligned} x \geq -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow x + 1 \geq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x + 1} \leq 2 \text{ puisque } x + 1 > 0. \end{aligned}$$

On a pu passer aux inverses dans l'inégalité car les deux membres étaient strictement positifs ! D'où le résultat :

$$0 \leq \frac{1}{1 + x} \leq 2.$$

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

- 3** L'encadrement précédent peut être multiplié par x^2 , réel positif. L'ordre n'est pas modifié :

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq 2x^2.$$

On en déduit :

$$1-x \leq 1-x + \frac{x^2}{1+x} \leq 1-x + 2x^2 \quad (\text{en ajoutant } 1-x).$$

Or, d'après la première question :

$$1-x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

donc :

$$1-x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1-x + 2x^2.$$

28 Inéquations

Enoncé
p. 86

Lycée Lacordaire, Marseille

$$\begin{aligned} 1 \quad A(x) &= x^3 - x^2 + 4x^2 - 4 \\ &= x^2(x-1) + 4(x^2-1) \\ &= x^2(x-1) + 4(x+1)(x-1) \\ &= (x-1)[x^2 + 4(x+1)] \\ &= (x-1)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x-1)(x+2)^2. \end{aligned}$$

- 2** Factorisons le numérateur :

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 2x + 2 &= (x-1)^2 - 2(x-1) \\ &= (x-1)(x-1-2) \\ &= (x-1)(x-3) \end{aligned}$$

L'inéquation devient donc :

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+2)^2} \geq 0.$$

L'inéquation est définie seulement sur $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ (à cause du dénominateur). Maintenant que nous avons éliminé 1, nous pouvons simplifier la fraction :

$$\frac{x-3}{(x+2)^2} \geq 0.$$

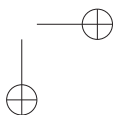
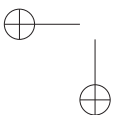
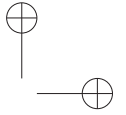
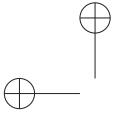
Le dénominateur étant toujours strictement positif pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$, on se ramène à $x-3 \geq 0$, donc $x \geq 3$. Un coup d'œil suffit à vérifier que les valeurs interdites ne posent pas de problème :

$$S = [3; +\infty[.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Chapitre

4

Configurations du plan

Plan du chapitre

1. Le triangle
2. Projections, symétries et translations
3. Le cercle
4. Trigonométrie

Exercice type

Lycée Janson de Sailly, Paris

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et C un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B . Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[OA]$. La droite (CJ) coupe (OI) en K .

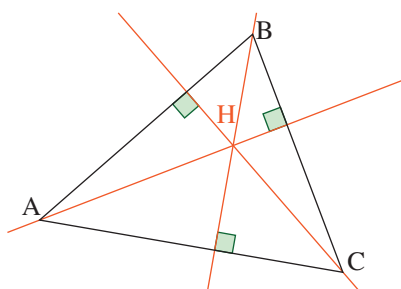
- 1 Montrer que (OI) et (BC) sont perpendiculaires. Que dire de BCK ?
- 2 Montrer que $COKA$ est un parallélogramme.
- 3 Montrer que O est le centre de gravité de BCK .

Voir corrigé page 129

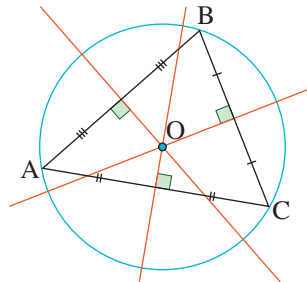
1 Le triangle

Dans un triangle (non aplati), nous avons les propriétés suivantes :

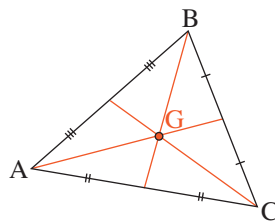
- Les trois hauteurs sont concourantes. Le point de concours H s'appelle l'*orthocentre* du triangle.



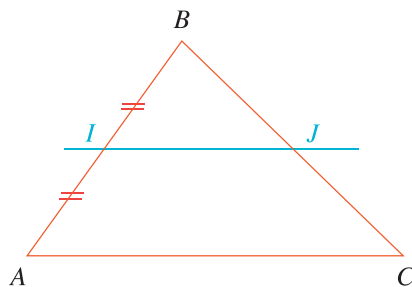
- Les trois médiatrices des côtés sont concourantes. Le point de concours O est le *centre* du cercle circonscrit.



- Les trois médianes sont concourantes. Le point de concours G est le *centre de gravité* (situé aux deux-tiers de chaque médiane).



- Si une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.
- Si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.

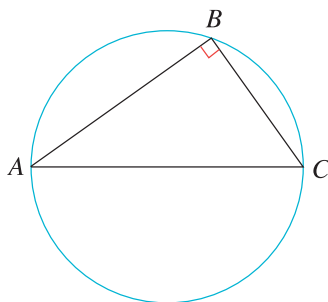


Si I est le milieu de $[AB]$ et si $(IJ) \parallel (AC)$, alors J est le milieu de $[BC]$.

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

1.1 Le triangle rectangle

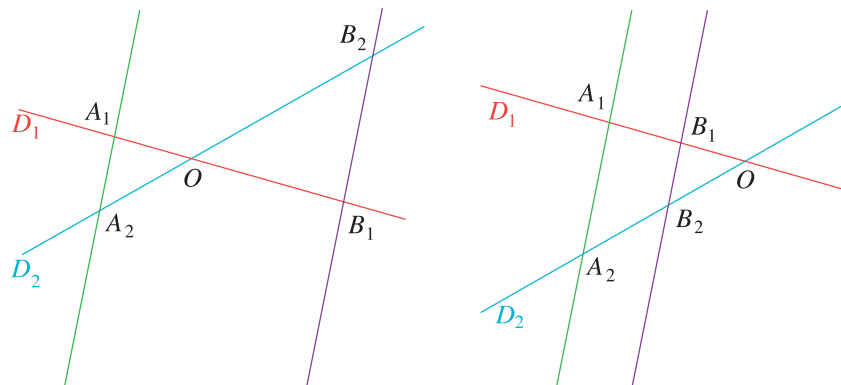
- Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit.
- (Réciproque) Si B appartient au cercle de diamètre $[AC]$, alors le triangle ABC est rectangle en B .



1.2 Le théorème de Thalès

Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en O . Soient deux droites parallèles ne passant pas par O qui coupent D_1 respectivement en A_1 et B_1 , et D_2 respectivement en A_2 et B_2 .

On a deux configurations possibles :



Alors :

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}.$$

Remarque : ne cherchez pas à apprendre ces formules par cœur. Vous risquez la catastrophe si les noms des points ne sont pas les mêmes dans votre énoncé. Faites plutôt une figure, remarquez bien quels sont les triangles semblables, quelles sont les longueurs proportionnelles, quels sont les angles égaux, et n'oubliez pas de citer le nom de Thalès.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1.3 La réciproque du théorème de Thalès

Théorème 1

Si D_1 et D_2 sont deux droites sécantes en O .

A_1 et B_1 deux points de D_1 , distincts de O .

A_2 et B_2 deux points de D_2 , distincts de O .

Si

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1}$$

et si les points O, A_1, B_1 et les points O, A_2, B_2 sont alignés dans le même ordre, alors les droites (A_1A_2) et (B_1B_2) sont parallèles.

Remarque : on est alors dans une des deux configurations de Thalès. On peut en déduire :

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}.$$

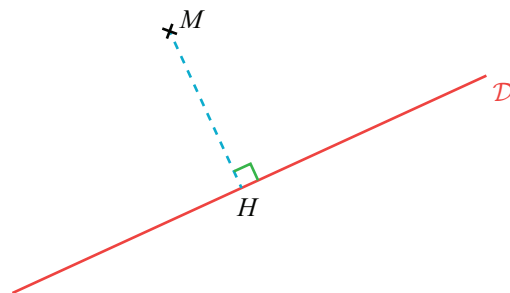
2 Projections, symétries et translations

2.1 Projection orthogonale

Définition 1

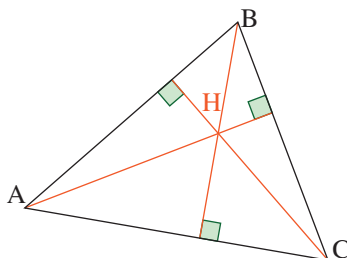
Soient $\mathcal{D}$ une droite et M un point du plan, il existe une unique droite D' passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{D}$. La droite D' coupe $\mathcal{D}$ au point H .

Le point H est le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$.



CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

Par exemple, dans un triangle, les « pieds » des hauteurs sont les projetés orthogonaux de chaque sommet sur le côté opposé :



Si A est un point de D , alors le triangle AHM est rectangle en H . D'après le théorème de Pythagore,

$$AM^2 = AH^2 + HM^2.$$

comme $AH^2 \geq 0$, on constate que :

- $AM^2 \geq HM^2$, donc $AM \geq HM$: la distance entre M et un point de D est toujours supérieure ou égale à HM ;
- $AM = HM$ si et seulement si $AH^2 = HM^2 - AM^2 = 0$, c'est-à-dire $AH = 0$, et donc $A = H$.

On peut ainsi caractériser le projeté orthogonal par la distance au point M :

Propriété 1

Le projeté orthogonal H de M sur D est le point de D qui est le plus proche de M .

2.2 Symétrie orthogonale d'axe Δ

Définition 2

On considère deux points distincts A et A' et une droite (Δ) .

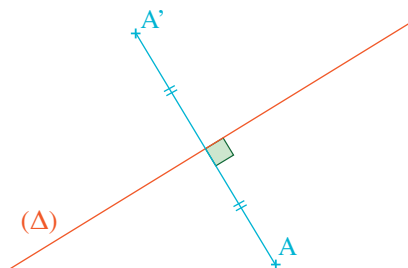
On dit que les points A et A' sont symétriques par rapport à (Δ) si (Δ) est la médiatrice du segment $[AA']$.

Dans le cas où les points A et A' sont confondus, A et A' sont symétriques par rapport à toute droite passant par A .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Propriétés 2

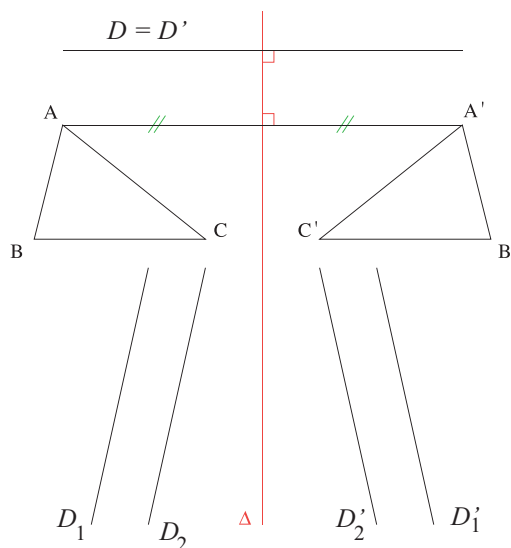
Dans une symétrie d'axe Δ ,

- la droite Δ est invariante point par point ;
- toute droite perpendiculaire à Δ est globalement invariante ;
- les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

(voir illustration page suivante)

Remarque : ne pas confondre la propriété : « les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles » (valable pour toutes les transformations que vous connaissez) et : « l'image d'une droite est une droite parallèle » (ce qui n'est vrai, sauf cas particuliers, que pour les symétries centrales et les translations).

Dans le cas d'une symétrie d'axe Δ , par exemple, si D_1 et D_2 sont deux droites parallèles, que D'_1 est l'image de D_1 et D'_2 l'image de D_2 , alors $D'_1 \parallel D'_2$. Pourtant, comme on peut le voir sur la figure, il n'y a pas de raison que D_1 et D'_1 soient parallèles.



CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

2.3 Symétrie de centre O

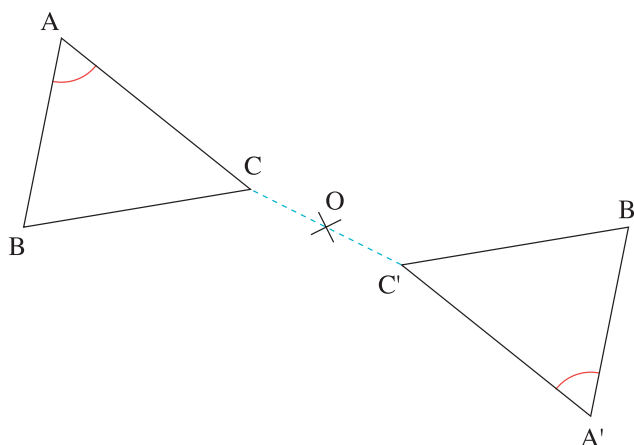
Définition 3

On considère deux points distincts A et A' et un troisième point O .
 A' est le symétrique de A par rapport à O si O est le milieu de $[AA']$.
 Si A et A' sont confondus, ils sont symétriques par rapport à A lui-même.

Propriétés 3

Dans une symétrie centrale,

- les angles sont conservés ;
- l'image d'une droite est une droite parallèle ;
- le centre de symétrie est l'unique point invariant ;
- les droites qui passent par le centre de symétrie sont globalement invariantes.



2.4 Propriétés communes aux symétries

Les symétries orthogonales (ou axiales) et les symétries centrales vérifient les propriétés suivantes (A' , B' , C' désignent les images des points A , B et C).

- Des points alignés ont pour images des points alignés.
- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- Conservation des distances : $AB = A'B'$.
- L'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.
- L'image d'un cercle de centre A est le cercle de centre A' , de même rayon (vient de la conservation des distances).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- Conservation du parallélisme : les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- Conservation des angles : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.
- Conservation de l'orthogonalité : les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires (vient de la conservation des angles).

Remarque : un *point invariant* est un point qui est sa propre image (la transformation ne le change pas, ne le fait pas « varier »).
Si une droite a pour image elle-même, on dit qu'elle est *globalement invariante*.
Si de plus tous ses points sont invariants, on dit que la droite est *invariante point par point*.

3 Le cercle

Définition 4

Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tels que :

$$OM = r.$$

Remarque : on dit que tous les points d'un cercle sont *équidistants* de son centre.

Définition 5 : tangente à un cercle

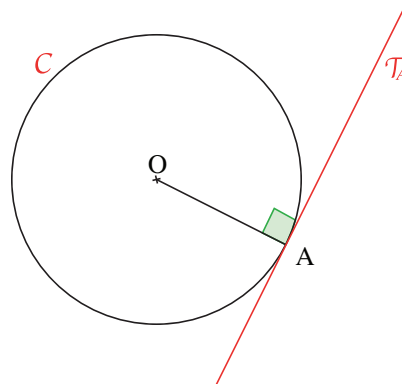
Soit C un cercle de centre O , et soit A un point appartenant à C .

On appelle *tangente à C au point A* l'unique droite dont l'intersection avec C est le point A .

Propriété 4

Soit C un cercle de centre O . Soient A un point de C et $\mathcal{T}_A$ la tangente à C au point A .

Alors, (OA) est perpendiculaire à $\mathcal{T}_A$.



CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

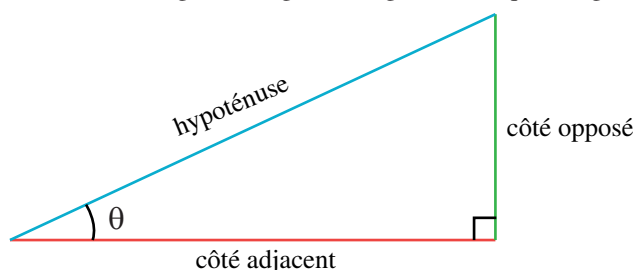
Le point A est ici le projeté orthogonal du centre O sur la tangente.

Inversement, si on projette orthogonalement un point O sur une droite D au point A , le cercle de centre O et passant par A est alors tangent à la droite D au point A .

4 Trigonométrie

4.1 Formule fondamentale

On considère dans un triangle rectangle, un angle θ autre que l'angle droit.



Le cosinus, le sinus et la tangente de θ sont donnés par :

$$\cos \theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \sin \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Notons que $\cos \theta$ et $\sin \theta$ sont des éléments de $]0,1[$, car l'hypoténuse est le plus grand des trois côtés. En revanche, $\tan \theta$ peut prendre n'importe quelle valeur strictement positive.

On peut exprimer les longueurs des côtés à partir de l'hypoténuse : $AB = BC \cos(\theta)$ et $AC = BC \sin(\theta)$.

Or d'après le d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, c'est-à-dire $BC^2(\cos \theta)^2 + BC^2(\sin \theta)^2 = BC^2$. En simplifiant par BC , on obtient la relation fondamentale :

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1.$$

Supposons, par exemple, qu'on connaisse $\sin \theta = \frac{1}{3}$.

À l'aide de la formule $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$, on peut retrouver :

$$(\cos \theta)^2 = 1 - (\sin \theta)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

$$\text{donc } \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (car } \cos \theta \geq 0 \text{)} \text{ et } \tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4.2 Quelques valeurs exactes

- *Angle de 45°* : on considère un triangle ABC rectangle en A et isocèle tel que :

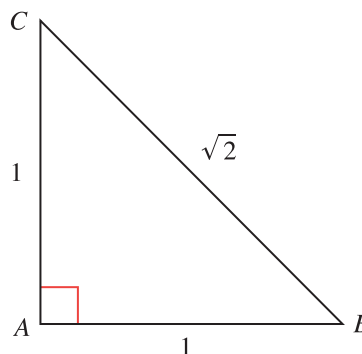
$$AB = AC = 1.$$

Alors $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$.

D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2,$$

donc $BC = \sqrt{2}$.



Il vient :

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

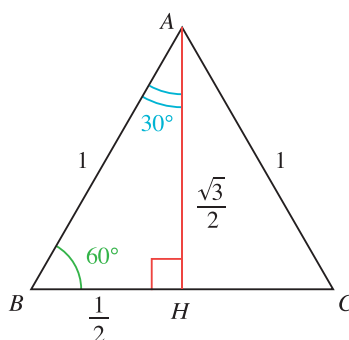
$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On en déduit que $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- *Angles de 30° et 60°* : on considère un triangle ABC équilatéral de côté 1 et H le milieu de $[BC]$. Vous savez que, comme ABC est équilatéral, (AH) est également la hauteur issue de A , la médiatrice de $[BC]$, et la bissectrice de $\widehat{BAC}$. En particulier :

$$\widehat{HAB} = \frac{1}{2} \widehat{CAB} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

$$\widehat{ABH} = \widehat{ABC} = 60^\circ.$$



En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABH , rectangle en H , il vient :

$$BA^2 = BH^2 + AH^2 \iff 1 = \frac{1}{4} + AH^2 \iff \frac{3}{4} = AH^2 \iff \frac{\sqrt{3}}{2} = AH.$$

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

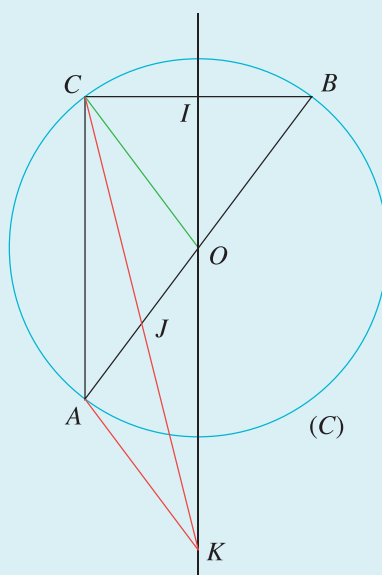
Dans ce même triangle ABH , on a :

$$\begin{aligned}\cos 60^\circ &= \cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \\ \sin 60^\circ &= \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30^\circ &= \cos \hat{A} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 30^\circ &= \sin \hat{A} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice type

Lycée Janson de Sailly, Paris

- 1** Dans le triangle ABC , $IB = IC$ et $OB = OC$ donc (IO) est la médiatrice de $[BC]$. Ainsi, (IO) est perpendiculaire à (BC) .
 K appartenant à la médiatrice de $[BC]$, on a $KB = KC$ et donc BCK est isocèle en K .



- 2** Les droites (OI) et (AC) sont parallèles, donc les triangles ACJ et OJK sont en configuration de Thalès. Il vient :

$$\frac{JK}{JC} = \frac{JO}{JA} = 1$$

(car $JO = JA$), donc $JK = JC$ et J est le milieu de $[CK]$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➡ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Janson de Sailly, Paris

Les diagonales de $COKA$ se coupent en leur milieu J donc $COKA$ est un parallélogramme.

Autre méthode : Dans le triangle ABC , (OI) joint le milieu O de $[AB]$ et le milieu I de $[BC]$, donc $(OI) \parallel (AC)$. De là, la translation qui transforme C en A transforme O en un point M qui est aligné d'une part avec O et I , et de l'autre aligné avec J et C (car J est le milieu de $[OA]$) et donc de $[CM]$. On en déduit que M et K sont confondus.

- 3 J est le milieu de $[CK]$, donc (BJ) est une médiane de BCK . I est le milieu de $[BC]$ donc (IK) est une autre médiane de BCK . Ces deux médianes se coupent en O , donc O est le centre de gravité de BCK (intersection des médianes).

Voir énoncé page 119

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

1 V/F Propriétés du triangle

5 min

Corrigé
p. 136

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

Dans un triangle :

- ☐ a Le centre de gravité est l'intersection des médiatrices.
- ☐ b L'orthocentre est l'intersection des hauteurs.
- ☐ c Si l'un des côtés est le diamètre d'un cercle, alors le triangle est rectangle.

2 V/F Propriétés du cercle

5 min

Corrigé
p. 136

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O . A et B sont deux points de $\mathcal{C}$.

- ☐ a Le triangle OAB est équilatéral.
- ☐ b Si A et B sont diamétralement opposés alors les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et B sont parallèles.

3 Démontrer la perpendicularité



10 min

Corrigé
p. 136

Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

BAC est un triangle rectangle en A . H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. I est un point de $[AH]$. La droite parallèle à (AB) passant par I coupe (BC) en J et (AC) en K . Démontrer que (CI) est perpendiculaire à (AJ) .

4 Théorème de Thalès



15 min

Corrigé
p. 137

Lycée Kléber, Strasbourg

$ABCD$ est un trapèze avec $(AB) \parallel (CD)$. Par E , intersection des diagonales (AC) et (BD) , on mène Δ , parallèle à (AD) et qui coupe $[DC]$ en F , ainsi que Δ' , parallèle à (BC) et qui coupe $[DC]$ en G .

- 1 Faire une figure.
- 2 Montrer que $GC = DF$.

5 Aire d'un triangle



20 min

Corrigé
p. 138

Lycée Raspail, Paris

Soit ABC un triangle rectangle en A . Soit M un point de $[AB]$. La parallèle à (AC) passant par M coupe $[BC]$ en N ; la parallèle à (AB) passant par N coupe $[AC]$ en P . On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC .

- 1 Montrer que $APNM$ est un rectangle.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- 2 On pose $x = \frac{AM}{AB}$. Donner l'aire de PNC en fonction de x et $\mathcal{A}$.
- 3 Donner l'aire de MBN en fonction de x et $\mathcal{A}$.
- 4 Exprimer l'aire du rectangle $AMNP$ en fonction de x et $\mathcal{A}$.
- 5 Résoudre l'inéquation $2x(1-x) \geq \frac{1}{2}$ et montrer que l'aire du rectangle est maximum quand M est le milieu de $[AB]$.

6 À l'intérieur d'un cercle



15 min

Corrigé
p. 139

Lycée Français, Bruxelles

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O , de rayon R , et $[AB]$ un diamètre. Soit M un point de $\mathcal{C}$, distinct de A , m le milieu de $[AM]$ et N le symétrique de m par rapport à O .

- 1 Montrer que m appartient au cercle de diamètre $[AO]$.
- 2 Montrer que N appartient au cercle de diamètre $[BO]$.

7 Thalès et Pythagore



20 min

Corrigé
p. 140

Lycée Pasteur, Strasbourg

Les points A , B , C et D sont alignés, dans cet ordre, de sorte que $AB = BC = CD = 4$ cm. On note (C_1) , (C_2) , (C_3) les cercles de diamètre $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et O_1 , O_2 et O_3 leurs centres respectifs. Soit (C_4) le cercle de diamètre $[AO_3]$ et T un des points d'intersection des cercles (C_3) et (C_4) .

- 1 Faire une figure.
- 2 Prouver que la droite (AT) est tangente au cercle (C_3) .
- 3 La droite (AT) coupe le cercle (C_2) en P et Q . Soit I le milieu du segment $[PQ]$.
 - (a) Montrer que les droites (O_2I) et (AT) sont perpendiculaires.
 - (b) Calculer la longueur O_2I .
 - (c) En déduire la longueur PQ .

8 Aire de rectangles



15 min

Corrigé
p. 141

Lycée Chateaubriand, Rennes

Un triangle ABC de hauteur $[AH]$ est tel que $AB = 5$, $BC = 8$, et $AH = 4$ (unité : le cm). Construire ce triangle.

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Par un point K de $[AH]$, on mène la parallèle à (BC) . Elle coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N . P et Q sont les projetés orthogonaux de M et N sur (BC) . On note $AK = x$.

- 1 Calculer en fonction de x l'aire $a(x)$ du rectangle $MNPQ$.
- 2 Pour quelle valeur de x ce rectangle a-t-il une aire maximale ? Quel est ce maximum ?

9 La formule des sinus

★★

20 min

Corrigé
p. 142

Lycée Louis-le-Grand, Paris

ABC est un triangle quelconque.

- 1 En utilisant la hauteur issue de B et les notations usuelles $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, montrer que l'aire S du triangle vérifie :

$$S = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}.$$

- 2 Écrire deux autres formules analogues (sans démonstration).
- 3 En déduire :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2S}.$$

10 Avec deux cercles

★★

15 min

Corrigé
p. 142

Lycée Louis-le-Grand, Paris

Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants en A et B . Soient P et Q les points diamétralement opposés à A sur chacun des cercles. Faire une figure et montrer que P , B et Q sont alignés.

11 À la recherche d'une aire

★★

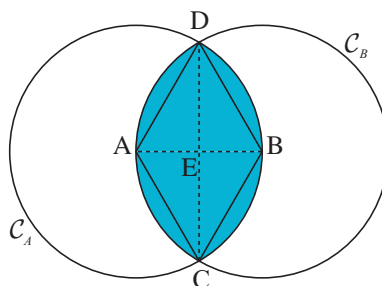
15 min

Corrigé
p. 143

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Soient $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ deux cercles de centres respectifs A et B et de rayon 3 cm tels que $\mathcal{C}_A$ passe par B et $\mathcal{C}_B$ par A .

On note C et D les points d'intersection de ces deux cercles et E l'intersection de (CD) et (AB) .



On souhaite calculer l'aire du domaine coloré.

- 1 Montrer que le domaine coloré est symétrique par rapport à E .
- 2 En vous aidant de la nature du triangle ABD , déterminer son aire.
- 3 Calculer l'aire exacte, en cm^2 , du secteur angulaire $\widehat{ABD}$ à l'intérieur de $\mathcal{C}_A$.
- 4 En déduire l'aire exacte du domaine coloré, puis en donner une valeur approchée au dixième.

12 Théorème de Thalès



15 min

Corrigé
p. 144

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$. Une droite Δ parallèle à (AI) coupe (BC) , (CA) et (AB) , respectivement en A' , B' et C' . Montrer :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB'}{AC'}.$$

13 Une formule avec des sinus



15 min

Corrigé
p. 146

Lycée Henri IV, Paris

Un triangle ABC est tel que la hauteur issue de A a une longueur qui est la somme des longueurs des deux autres hauteurs. Montrer :

$$\frac{1}{\sin \widehat{A}} = \frac{1}{\sin \widehat{B}} + \frac{1}{\sin \widehat{C}}.$$

14 Théorème de Thalès



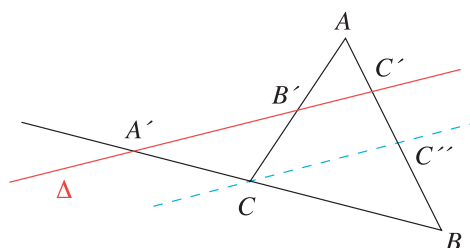
15 min

Corrigé
p. 147

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

On considère la figure ci-contre, où (CC'') et Δ sont parallèles. ABC est un triangle quelconque, et Δ est une transversale quelconque. Montrer que :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$



15 Étude d'une configuration



15 min

Corrigé
p. 148

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

A, B, C sont trois points sur un cercle de centre O . D est le point diamétralement opposé à A sur le cercle. I est le milieu de $[BC]$ et $[AM]$, $[BN]$, $[CP]$

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

les trois hauteurs du triangle ABC . H est l'orthocentre de ABC et (AM) recoupe le cercle en H' .

- 1 Justifier que $\widehat{ABD}$, $\widehat{AH'D}$, $\widehat{ACD}$ sont trois angles droits.
- 2 Montrer que $BDCH$ est un parallélogramme et que I est le milieu de $[DH]$.
- 3 Montrer que M est le milieu de $[HH']$.

16 Jouer au géomètre



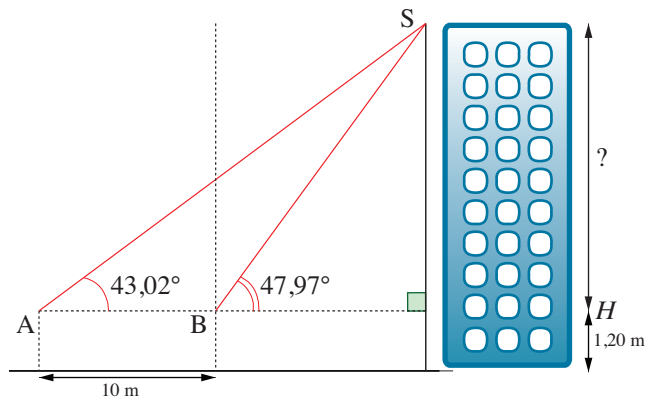
20 min

Corrigé
p. 149

Lycée Jacques Decour, Paris



Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo avec



Afin de mesurer la hauteur d'un bâtiment de sommet S , deux géomètres disposent leurs appareils de mesure en A et B . Les mesures qu'ils connaissent sont reportées sur le schéma ci-dessus.

Déterminer la hauteur du bâtiment (arrondie au mètre).

Indication : exprimer BH de deux façons différentes.

17 Théorème de Thalès



40 min

Corrigé
p. 150

Lycée Louis-le-Grand, Paris

$ABCD$ est un carré. $E \in (AB)$, $F \in (BC)$, $G \in (CD)$, $H \in (AD)$ tels qu'on ait (EG) perpendiculaire à (FH) .

- 1 Soit I , intersection de (EG) et (BC) , et J , celle de (FH) et (AB) . Montrer que (EF) et (IJ) sont perpendiculaires.
- 2 Comment choisir (EG) et (FH) pour que $EFGH$ soit un carré ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Propriétés du triangle

Enoncé
p. 131

- a** Faux. C'est l'intersection des médianes (droites qui lient un sommet et le milieu du côté opposé).
- b** Vrai. Une hauteur passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé.
- c** Faux. N'importe quel segment est le diamètre d'un cercle (et d'un seul). Cependant, si le troisième sommet se trouve sur ce cercle, alors le triangle est rectangle.

2 V/F Propriétés du cercle

Enoncé
p. 131

- a** Faux. Si A et B sont sur un même cercle de centre O , alors $OA = OB$ donc OAB est isocèle, mais il existe des configurations où $AB \neq OA$, auquel cas OAB n'est pas équilatéral.
- b** Vrai. Si A et B sont diamétralement opposés alors $[AB]$ est un diamètre de C . Les tangentes à C en A et B sont perpendiculaires respectivement à $[OA]$ et $[OB]$, donc au diamètre $[AB]$. Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles, donc les tangentes sont bien parallèles.

3 Démontrer la perpendicularité

Enoncé
p. 131

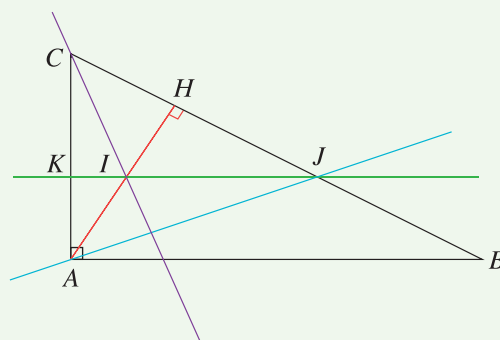
Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

On considère le triangle AJC .

(AH) est la hauteur issue de A .

Comme (JK) et (AB) sont parallèles et que (AB) et (AC) sont perpendiculaires, on en déduit que (JK) et (AC) sont perpendiculaires. (JK) est donc une hauteur de AJC .

Finalement, I étant l'intersection des deux hauteurs (JK) et (AH) , I est donc l'orthocentre du triangle AJC . En particulier, (CI) est une hauteur donc (CI) et (AJ) sont perpendiculaires.



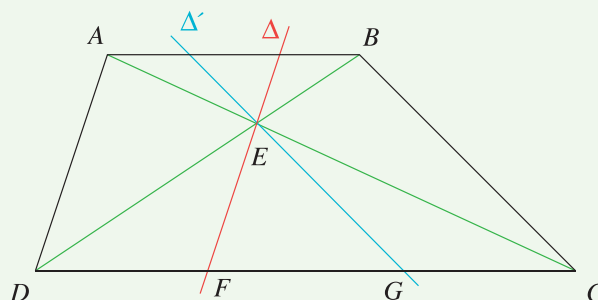
CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

4 Théorème de Thalès

Enoncé
p. 131

Lycée Kléber, Strasbourg

1



2 Les triangles ACD et EFC sont en configuration de Thalès, donc :

$$\frac{DF}{DC} = \frac{AE}{AC}, \text{ d'où } \frac{ED}{BE} = \frac{EC}{AE} \text{ (en inversant).}$$

En fait, l'énoncé classique du théorème donne seulement l'égalité :

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{AC}.$$

Mais :

$$\frac{DF}{DC} = \frac{DC - FC}{CD} = 1 - \frac{FC}{CD}$$

et

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AC - EC}{AC} = 1 - \frac{EC}{AC}.$$

On a donc bien :

$$\frac{DF}{DC} = \frac{AE}{AC}.$$

Les triangles CDE et ABE sont en configuration de Thalès, donc :

$$\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{EC}.$$

Or :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AE + EC}{AE} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

et :

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BE + ED}{BE} = 1 + \frac{ED}{BE}.$$

On en déduit :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BE}$$

et en inversant :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BD}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Enfin, les triangles DGE et DCB étant en configuration de Thalès, il vient comme ci-dessus :

$$\frac{BE}{BD} = \frac{CG}{CD}.$$

En rassemblant nos résultats, il vient :

$$\frac{DF}{CD} = \frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BD} = \frac{CG}{CD}$$

et donc $GC = DF$.

5 Aire d'un triangle

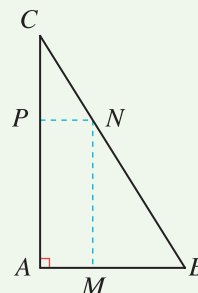
Enoncé
p. 131

Lycée Raspail, Paris

- 1 $\begin{cases} (AP) \parallel (MN) & \text{car } (AP) = (AC) \text{ et } (AC) \parallel (MN) \\ (PN) \parallel (AM) & \text{car } (AM) = (AB) \text{ et } (PN) \parallel (AB) \end{cases}$

donc $APNM$ est un parallélogramme.

De plus, il y a un angle droit en A ,
donc $APNM$ est un rectangle.



- 2 Comme $(NP) \parallel (AB)$, le théorème de Thalès donne, dans le triangle ABC :

$$\frac{CP}{CA} = \frac{PN}{AB} \quad \text{soit} \quad \frac{CP}{CA} = \frac{AM}{AB} = x \text{ car } PN = AM.$$

Donc $CP = x \times CA$ et $AM = x \times AB$. CPN est rectangle en P , donc :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(PNC) &= \frac{1}{2} CP \times PN \\ &= \frac{1}{2} CP \times AM \\ &= \frac{1}{2} \times x \times CA \times x \times AB \\ &= x^2 \times \mathcal{A} \text{ car } \mathcal{A} = \frac{1}{2} CA \times AB. \end{aligned}$$

- 3 $\begin{aligned} BM &= AB - AM & \text{et} & & MN &= AP \\ &= (1-x)AB & & & &= AC - CP \\ & & & & &= (1-x)AC. \end{aligned}$

Par suite :

$$\text{Aire}(BNM) = \frac{1}{2} BM \times MN = \frac{1}{2} (1-x)^2 \times \mathcal{A}.$$

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}
 4 \quad \text{Aire}(AMNP) &= \mathcal{A} - \text{Aire}(CPN) - \text{Aire}(BNM) \\
 &= \mathcal{A} - x^2\mathcal{A} - (1-x)^2\mathcal{A} \\
 &= (1-x^2 - (1-x)^2)\mathcal{A} \\
 &= (1-x^2 - 1 + 2x - x^2)\mathcal{A} \\
 &= 2x(1-x)\mathcal{A}.
 \end{aligned}$$

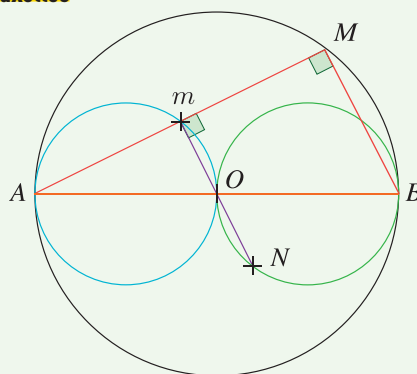
$$\begin{aligned}
 5 \quad 2x(1-x) &\geq \frac{1}{2} \iff x(1-x) \geq \frac{1}{4} \\
 &\iff x - x^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \\
 &\iff -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \\
 &\iff x - \frac{1}{2} = 0 \text{ (car un carré ne peut être négatif)} \\
 &\iff x = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

L'aire du rectangle est maximale quand $x = \frac{1}{2}$, donc quand M est le milieu de $[AB]$.

6 À l'intérieur d'un cercle

Lycée Français, Bruxelles

→ Enoncé
p. 132



- 1 Pour montrer que m appartient au cercle de diamètre $[AO]$, il suffit de montrer que AOm est rectangle en m .
Dans le triangle AMB , O est le milieu de $[AB]$ et m est le milieu de $[AM]$, donc la droite (Om) est parallèle à (MB) (théorème de Thalès).
Or M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, donc AMB est rectangle en M .
On a $(Om) \parallel (MB)$ et $(MB) \perp (AM)$ donc $(Om) \perp (AM)$, ce qui montre que AOm est bien rectangle en m , et donc m est sur le cercle de diamètre $[AO]$.

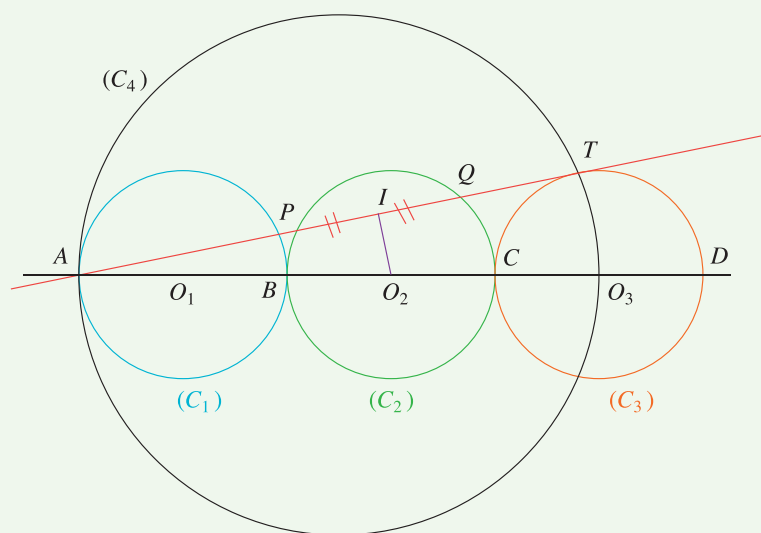
- 2 Comme O est le milieu de $[AB]$, les cercles de diamètre $[OA]$ et $[OB]$ sont symétriques par rapport à O . Or N est le symétrique de m par rapport à O , donc N appartient au cercle de diamètre $[OB]$.

7 Thalès et Pythagore

Lycée Pasteur, Strasbourg

Enoncé
p. 132

1



- 2 T est sur le cercle de diamètre $[AO_3]$ donc ATO_3 est rectangle en T . La droite (AT) est donc perpendiculaire à (O_3T) , qui est un rayon de (C_3) . C'est donc la tangente à (C_3) issue de T .
- 3 (a) P et Q sont deux points du cercle (C_2) de centre O_2 donc $PO_2 = QO_2$, et O_2 appartient à la médiatrice de $[PQ]$. Comme I est le milieu de $[PQ]$, on en déduit que (O_2I) est la médiatrice de $[PQ]$, et comme $(PQ) = (AT)$, (O_2I) et (AT) sont perpendiculaires.
- (b) Comme (O_2I) et (O_3T) sont toutes deux perpendiculaires à (AT) , elles sont parallèles, et les triangles AO_2I et AO_3T sont dans une configuration de Thalès. En particulier :

$$\frac{O_2I}{O_3T} = \frac{AO_2}{AO_3}.$$

$O_3T = 2$ (rayon de (C_3)) ; $AO_2 = AB + BO_2 = 4 + 2 = 6$ et $AO_3 = 10$, d'où :

$$O_2I = O_3T \times \frac{AO_2}{AO_3} = 2 \times \frac{6}{10} = 1,2.$$

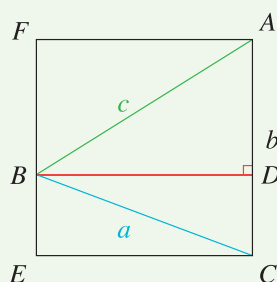
Cette dernière écriture fait apparaître que $a(x)$ est toujours inférieure à 8, avec égalité si $(x - 2)^2 = 0$, c'est-à-dire si $x = 2$. L'aire du rectangle atteint alors son maximum : $a(2) = 8$.

9 La formule des sinus

Enoncé
p. 133

Lycée Louis-le-Grand, Paris

1



À partir de $[AC]$, on construit un carré $ACEF$ tel que $B \in [EF]$. Appelons D le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC .

En considérant tour à tour le triangle ABD et le rectangle $ADBF$, puis le triangle BCD et le rectangle $BECD$, on montre facilement que l'aire du carré $ACEF$ vaut le double de l'aire de ABC . On peut calculer la longueur du côté du carré en prenant la longueur de la hauteur issue de B dans ABC . Dans le triangle ABD , on peut écrire $BD = AB \sin \hat{A}$ donc $BD = c \sin \hat{A}$. Finalement, l'aire du carré est :

$$BD \times AC = c \sin \hat{A} \times b$$

et donc l'aire du triangle ABC est :

$$S = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}.$$

2 De même, $S = \frac{ab \sin \hat{C}}{2}$ et $S = \frac{ac \sin \hat{B}}{2}$.

3 Il n'y a qu'à remplacer successivement S par chacune des formules trouvées plus haut pour démontrer le résultat. Par exemple,

$$\frac{abc}{2S} = \frac{abc}{bc \sin \hat{A}} = \frac{a}{\sin \hat{A}}.$$

10 Avec deux cercles

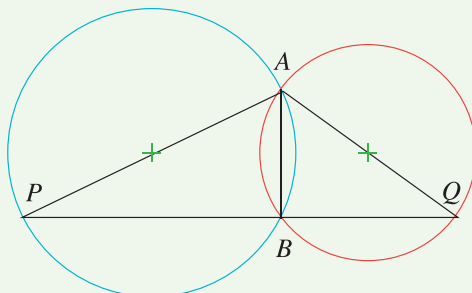
Enoncé
p. 133

Lycée Louis-le-Grand, Paris

B appartenant au cercle de diamètre $[AP]$, le triangle ABP est rectangle en B , donc $(BP) \perp (AB)$. B appartenant au cercle de diamètre $[AQ]$, ABQ est rectangle en B , donc $(BQ) \perp (AB)$. On en déduit que (BP) et (BQ)

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

sont parallèles, donc confondues, puisqu'elles contiennent toutes les deux le point B .



Conclusion : B , P et Q sont alignés.

11 À la recherche d'une aire

Enoncé
p. 133

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

- 1 C et D sont sur $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ donc :

$$AD = AC = BD = BC.$$

Ainsi, $ABCD$ est un losange ; ses diagonales se coupent donc perpendiculairement en leur milieu E .

De plus, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon donc l'image de $\mathcal{C}_A$ par la symétrie de centre E est un cercle de centre le symétrique de A , donc B , et de rayon 3 cm ; c'est $\mathcal{C}_B$.

La figure est donc bien symétrique par rapport à E .

- 2 Le triangle ABD est équilatéral (car $AB = AD = BD$) donc son aire est :

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{AB \times ED}{2} = \frac{AB}{2} \times ED = \frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

Rappel : dans un triangle équilatéral de côté a , chaque hauteur mesure $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (on peut le démontrer à l'aide du théorème de Pythagore).

- 3 Le secteur angulaire $\widehat{ABD}$ à l'intérieur de $\mathcal{C}_A$ est le domaine coloré sur le schéma ci-dessous.

C'est une part du disque de centre B et de rayon 3 cm. Son angle est $\widehat{ABD} = 60^\circ$ car ABD est équilatéral. Pour déterminer son aire, nous allons utiliser le schéma suivant (proportionnalité) :

$$\begin{array}{l} \pi r^2 \longrightarrow 360^\circ \\ ? \longrightarrow 60^\circ \end{array}$$

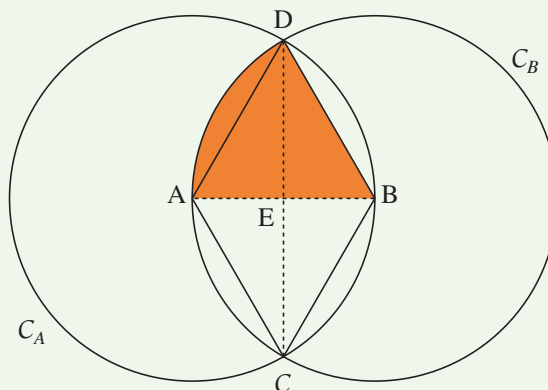
60° est le sixième de 360° donc :

$$\mathcal{A}_{\widehat{ABD}} = \frac{1}{6} \times \pi \times 3^2 = \frac{3\pi}{2} \text{ cm}^2.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



4 Notons $\mathcal{A}$ l'aire cherchée. Pour des raisons de symétrie, on a :

$$\begin{aligned} 4\mathcal{A}_{ABD} - 2\mathcal{A}_{ABD} &= 4 \times \frac{3\pi}{2} - 2 \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \\ &= 6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 \quad (\text{valeur exacte}) \\ &\approx 11,1 \text{ cm}^2 \quad (\text{valeur approchée au dixième}). \end{aligned}$$

12 Théorème de Thalès

Enoncé
p. 134

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Telle quelle, l'égalité est assez difficile à comprendre, mais on peut la transformer en :

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{AB'}{AC}.$$

Ce qui fait apparaître des rapports de longueurs entre des points *alignés*. Il suffit d'appliquer correctement le théorème de Thalès.

En considérant les triangles AIC et $B'CA'$, en configuration de Thalès, où $(AI) \parallel (B'A')$:

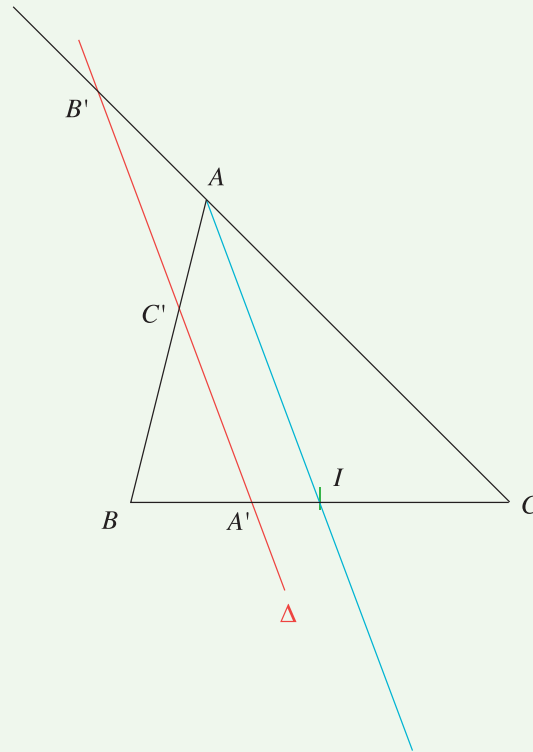
$$\frac{CA}{CB'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{AI}{B'A'}.$$

Comme les points C , A et B' sont alignés dans cet ordre, on a :

$$CB' = CA + AB'$$

$$\text{De même, } CA' = CI + IA'$$

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4



Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}\frac{CA}{CB'} &= \frac{CI}{CA'} \\ \frac{CB'}{CA} &= \frac{CA'}{CI} \quad (\text{en inversant les quotients}) \\ \frac{CA + AB'}{CA} &= \frac{CI + IA'}{CI} \\ 1 + \frac{AB'}{CA} &= 1 + \frac{IA'}{CI} \\ \frac{AB'}{AC} &= \frac{IA'}{IC}. \quad (1)\end{aligned}$$

I est le milieu de $[BC]$, donc $IC = BI$, d'où :

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{IA'}{BI}.$$

Les triangles $BC'A'$ et BAI sont également en configuration de Thalès, où $(C'A') \parallel (AI)$, donc :

$$\frac{BA'}{BI} = \frac{BC'}{BA} = \frac{A'C'}{IA'}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Comme les points B , A' et I sont alignés dans cet ordre, on a :

$$BI = BA' + A'I$$

$$\text{De même, } BA = BC' + C'A.$$

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{BA'}{BI} &= \frac{BC'}{BA} \\ \frac{BA' + A'I - A'I}{BA' + A'I} &= \frac{BC' + C'A - C'A}{BC' + C'A} \\ 1 - \frac{A'I}{BA' + A'I} &= 1 - \frac{C'A}{BC' + C'A} \\ 1 - \frac{A'I}{BI} &= 1 - \frac{C'A}{BA} \\ \frac{A'I}{BI} &= \frac{C'A}{BA}. \quad (2) \end{aligned}$$

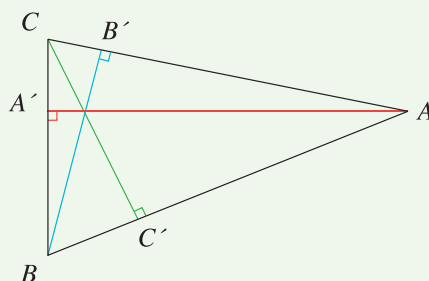
Les égalités (1) et (2) entraînent :

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{AB}.$$

13 Une formule avec des sinus

Lycée Henri IV, Paris

Enoncé
p. 134



Notons h_A la hauteur issue de A , h_C celle issue de C et h_B celle issue de B , et notons A' , B' et C' les pieds des hauteurs issues de A , B , et C .

En considérant le triangle ABA' , rectangle en A' , on constate :

$$\sin \widehat{B} = \frac{h_A}{AB}.$$

En considérant le triangle ACA' , rectangle en A' , on a :

$$\sin \widehat{C} = \frac{h_A}{AC}.$$

Dans le triangle ACC' , rectangle en C' , on a :

$$\sin \widehat{A} = \frac{h_C}{AC}.$$

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

Dans le triangle ABB' , rectangle en B' , on a :

$$\sin \widehat{A} = \frac{h_B}{AB}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \widehat{B}} + \frac{1}{\sin \widehat{C}} &= \frac{AB}{h_A} + \frac{AC}{h_A} \\ &= \frac{1}{h_A} \left(\frac{h_B}{\sin \widehat{A}} + \frac{h_C}{\sin \widehat{A}} \right) \\ &= \frac{1}{h_A \sin \widehat{A}} \times (h_B + h_C) \\ &= \frac{1}{h_A \sin \widehat{A}} \times h_A \\ &= \frac{1}{\sin \widehat{A}}. \end{aligned}$$

14 Théorème de Thalès

Enoncé
p. 134

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Il suffit d'appliquer correctement le théorème de Thalès à deux endroits de la figure. On remarque que les triangles $A'BC'$ et CBC'' sont en configuration de Thalès, où $(CC'') \parallel (A'C')$, donc :

$$\frac{BC}{BA'} = \frac{BC''}{BC'} = \frac{CC''}{A'C'}.$$

Comme les points B , C et A' sont alignés dans cet ordre, on a :

$$BA' = BC + CA'.$$

$$\text{De même, } BC' = BC'' + C''C'.$$

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{BC}{BA'} &= \frac{BC''}{BC'} \\ \frac{BC + CA' - CA'}{BC + CA'} &= \frac{BC'' + C''C' - C''C'}{BC'' + C''C'} \\ 1 - \frac{CA'}{BA'} &= 1 - \frac{C''C'}{BC'} \\ \frac{CA'}{BA'} &= \frac{C''C'}{BC'} \\ \frac{BA'}{CA'} &= \frac{BC'}{C''C'} \quad (\text{en prenant les inverses}) \quad (1) \end{aligned}$$

De même, les triangles $AB'C'$ et ACC'' sont en configuration de Thalès, où $(B'C') \parallel (CC'')$, donc :

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{AC''} = \frac{B'C'}{CC''}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Comme les points A , B' et C sont alignés dans cet ordre, on a :

$$AC = AB' + B'C.$$

$$\text{De même, } AC'' = AC' + C'C''.$$

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{AB'}{AC} &= \frac{AC'}{AC''} \\ \frac{AC}{AB'} &= \frac{AC''}{AC'} \quad (\text{en inversant les quotients}) \\ \frac{AB' + B'C}{AB'} &= \frac{AC' + C'C''}{AC'} \\ 1 + \frac{B'C}{AB'} &= 1 + \frac{C'C''}{AC'} \\ \frac{B'C}{AB'} &= \frac{C'C''}{AC'} \quad (2) \end{aligned}$$

Des égalités (1) et (2), on déduit :

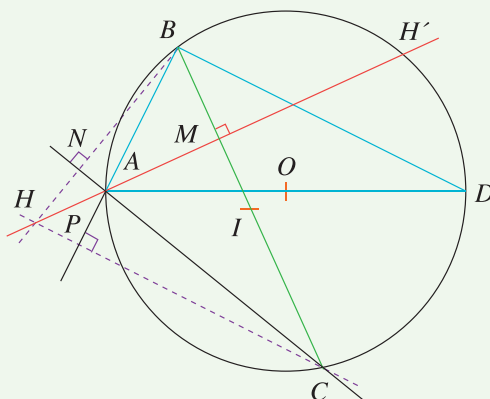
$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = \frac{C'B}{C'C''} \times \frac{C'C''}{C'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

15 Étude d'une configuration

Enoncé
p. 134

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

- 1 $[AD]$ est un diamètre du cercle donc $\widehat{ABD}$, $\widehat{AH'D}$ et $\widehat{ACD}$ sont des angles droits.



- 2 D'après le résultat précédent, (CD) et (AC) sont perpendiculaires. En outre (BH) est perpendiculaire à (AC) , puisque c'est une hauteur du triangle ABC . On en déduit que $(CD) \parallel (BH)$.
De même, on a vu que (BD) et (AB) sont perpendiculaires. Or (CH) est perpendiculaire à (AB) , comme hauteur de ABC .

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

Il vient $(BD) \parallel (CH)$.

De là, on a : $(CD) \parallel (BH)$ et $(BD) \parallel (CH)$, donc $BDCH$ est un parallélogramme.

$BDCH$ est un parallélogramme, donc ses diagonales ont même milieu. I est le milieu de $[BC]$, donc I est le milieu de $[DH]$.

- 3** M , pied de la hauteur issue de A , appartient à (BC) , donc $(MI) \perp (BC)$.
On a donc : $(MI) \perp (AM)$. Or, puisque $\widehat{AH'D}$ est droit, $(AM) \perp (H'D)$. D'où $(MI) \parallel (H'D)$. Or, I est le milieu de $[HD]$, donc en appliquant le théorème de Thalès, M est le milieu de $[HH']$.

16 Jouer au géomètre

Lycée Jacques Decour, Paris

➔ Enoncé
p. 135



Dans le triangle AHS rectangle en H :

$$\tan(43,02^\circ) = \frac{SH}{AH}$$

donc :

$$SH = AH \times \tan(43,02^\circ).$$

Dans le triangle BHS rectangle en H :

$$\tan(47,97^\circ) = \frac{SH}{BH}$$

donc :

$$SH = BH \times \tan(47,97^\circ).$$

Ainsi,

$$AH \times \tan(43,02^\circ) = BH \times \tan(47,97^\circ).$$

De plus,

$$AH = 10 + BH$$

donc, l'égalité devient :

$$(10 + BH) \times \tan(43,02^\circ) = BH \times \tan(47,97^\circ)$$

ou encore :

$$10 \tan(43,02^\circ) = BH (\tan 47,97^\circ - \tan 43,02^\circ)$$

et donc :

$$BH = \frac{10 \tan 43,02^\circ}{\tan 47,97^\circ - \tan 43,02^\circ} \approx 52,94.$$

Pour connaître SH , on prend la deuxième égalité :

$$SH = BH \times \tan(47,97^\circ) \approx 58,73.$$

Ainsi, la hauteur du bâtiment est :

$$58,7 + 1,2 \approx 60\text{m}.$$

COURS

INTERROS

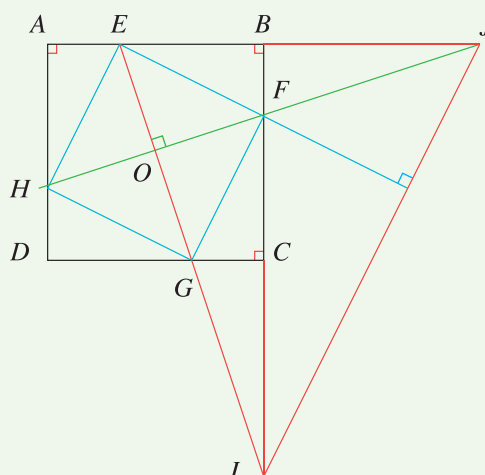
CORRIGÉS

17 Théorème de Thalès

Enoncé
p. 135

Lycée Louis-le-Grand, Paris

- 1 Il faut considérer les hauteurs du triangle EIJ . (AB) et (BC) (donc (BI)) sont perpendiculaires, ce qui fait de (BI) une hauteur de EIJ . (EG) et (HF) sont perpendiculaires, donc $(EI) \perp (FJ)$ et (FJ) est une deuxième hauteur de EIJ . Sachant que (BI) et (FJ) se coupent en F , F est l'orthocentre de EIJ , et donc (EF) , hauteur, est perpendiculaire à (IJ) .
- 2 Notons K l'intersection des diagonales de $EFGH$. Si l'on suppose que $EFGH$ est un carré, K est le milieu de $[EG]$ et de $[FH]$. Montrons que K est le milieu de $[AC]$. En appelant S la symétrie de centre K , on constate que $S(H) = F$. L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle, donc l'image de (AD) , droite contenant H , est une droite parallèle qui passe par F , c'est-à-dire (BC) . De même, $S(E) = G$, et on montre que l'image de (AB) est (DC) . A est l'intersection de (AD) et (AB) , donc $S(A)$ est l'intersection de (BC) et (DC) . Il vient $S(A) = C$, donc K est le milieu de $[AC]$, et K est le centre du carré $ABCD$.



Dans un deuxième temps, supposons que (EG) et (FH) se coupent au centre de $ABCD$, que nous notons O , et montrons que $EFGH$ est un carré.

Montrons que O est le milieu des diagonales de $EFGH$.

Les triangles AOH et OFC sont en configuration de Thalès, donc

$$\frac{OF}{OH} = \frac{OC}{OA} = 1.$$

Ce qui montre que $OF = OH$, donc O est le milieu de $[FH]$.

De même, O est le milieu de $[EG]$.

On sait désormais que $EFGH$ est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires. C'est donc un losange.

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Pour prouver que c'est un carré, nous allons démontrer que ses diagonales ont même longueur.

Les triangles EBI et GCI sont en configuration de Thalès, où $(EB) \parallel (GC)$, donc :

$$\frac{IG}{IE} = \frac{IC}{IB} = \frac{GC}{EB}.$$

Comme les points I , G et E sont alignés dans cet ordre, on a :

$$IE = IG + GE.$$

$$\text{De même, } IB = IC + CB.$$

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{IG}{IE} &= \frac{IC}{IB} \\ \frac{IG + GE - GE}{IG + GE} &= \frac{IC + CB - CB}{IC + CB} \\ 1 - \frac{GE}{IE} &= 1 - \frac{CB}{IB} \\ \frac{EG}{EI} &= \frac{BC}{BI}. \end{aligned}$$

De même, les triangles JAH et JBH sont en configuration de Thalès, où $(AH) \parallel (BH)$, donc, de la même façon que précédemment, on montre que :

$$\frac{HF}{HJ} = \frac{AB}{AJ}.$$

On en déduit les égalités :

$$EG = BC \times \frac{EI}{BI} \text{ et } HF = BA \times \frac{HJ}{AJ}.$$

En calculant l'aire du triangle EIJ de deux façons différentes, on obtient (entre autres) l'égalité :

$$OJ \times EI = BI \times EJ$$

et donc

$$\frac{EI}{BI} = \frac{EJ}{OJ}.$$

Il vient :

$$EG = BC \times \frac{EJ}{OJ}.$$

Observons le triangle EOJ rectangle en O .

$$\text{On peut écrire } \cos \widehat{EJO} = \frac{OJ}{EJ}.$$

Dans le triangle AHJ , rectangle en A , on peut écrire $\cos \widehat{AJH} = \frac{AJ}{JH}$.

$$\widehat{EJO} = \widehat{AJH}, \text{ donc } \frac{OJ}{EJ} = \frac{AJ}{JH} \text{ et :}$$

$$\frac{EJ}{OJ} = \frac{JH}{AJ}.$$

CORRIGÉS

En utilisant que $BC = AB$, on écrit :

$$EG = BC \times \frac{JH}{AJ} = AB \times \frac{JH}{AJ} = HF.$$

Le quadrilatère $EFGH$ est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, se coupent en leur milieu, et ont même longueur, c'est donc un carré.

Chapitre

5

Vecteurs et coordonnées dans le plan

Plan du chapitre

1. Vecteurs
2. Vecteurs et alignement

1 Vecteurs

Exercice type

Lycée Lavoisier, Paris

 Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo avec 

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-3 ; 0)$, $B(-6 ; -3)$ et $C\left(\frac{3}{2} ; \frac{9}{2}\right)$.

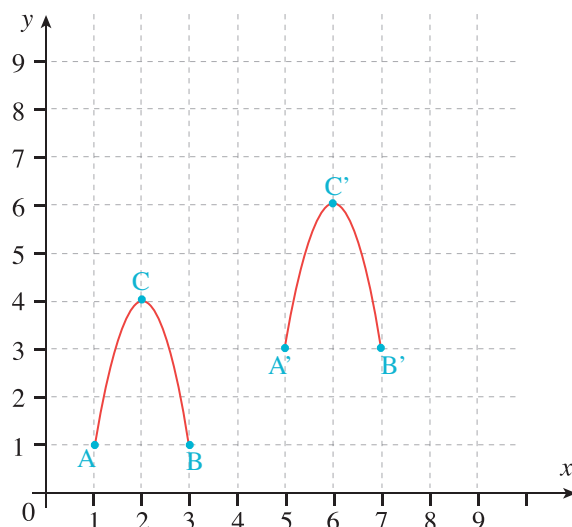
- 1 Montrer que les points A , B et C sont alignés.
- 2 Déterminer les coordonnées du point D pour que $COBD$ soit un parallélogramme.
- 3 Déterminer les coordonnées du point M centre de ce parallélogramme.

Voir corrigé page 160

1.1 Translations

Une figure du plan subit une translation lorsqu'elle est déplacée sans se déformer et sans tourner.

Sur la figure page suivante, la courbe rouge $\mathcal{P}$ subit une translation et est déplacée en $\mathcal{P}'$.



Au départ, le coin inférieur gauche se trouve en A , qui a pour coordonnées $(1; 1)$. La translation le déplace en A' , de coordonnées $(5; 3)$. Notons qu'on ajoute $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée de A pour obtenir les coordonnées de A' .

Regardons maintenant le coin inférieur droit, qui se trouve initialement en $B(3; 1)$. Il est déplacé jusqu'en $B'(7; 3)$. Ici encore, on ajoute $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée de B pour obtenir les coordonnées de B' .

Quelle est la position finale du sommet qui était en $C(2; 4)$? Pour lui aussi, il suffit d'ajouter $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée pour obtenir sa position finale $C'(6; 6)$.

Cette propriété est vérifiée pour n'importe quel point de la figure. Ainsi, le *mouvement* de translation peut être entièrement décrit par l'algorithme : ajouter $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée.

On dit que le *vecteur* de la translation a pour coordonnées $\begin{pmatrix} +4 \\ +2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur est un objet abstrait : il décrit une translation. On peut le représenter par une flèche qui montre la direction (c'est-à-dire, par exemple, parallèlement à quelle droite ?), le sens (il y a deux sens pour une direction donnée) et la longueur du déplacement.

Le mot *vecteur* vient du latin *vehere* qui veut dire *transporter*. Le mot *véhicule* est de la même famille. Le vecteur montre comment les points sont « transportés » par la translation.

Pour noter un vecteur, on peut utiliser une lettre, en général surmontée d'une flèche : $\vec{u}$, $\vec{v}$. Comme la translation transforme A en A' , on peut également noter $\overrightarrow{AA'}$ le vecteur.

Sur la figure, on a indiqué trois flèches, mais elles représentent le *même* vecteur puisqu'il s'agit de la *même* translation.

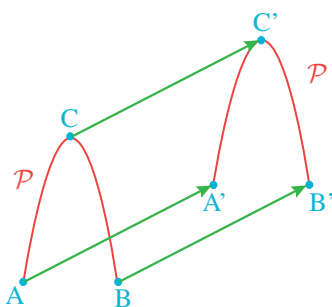
VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont égaux.

On note alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

Un cas particulier : si la translation est l'*identité* (cas particulier où on n'effectue aucun déplacement), alors le vecteur de translation est le *vecteur nul*. On le note $\vec{0}$. Il a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : il n'est nul besoin de coordonnées pour décrire une translation ou pour définir un vecteur. Par exemple, si on enlève le repère du dessin précédent, on peut tout de même parler du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ et dire que la translation de vecteur $\vec{u}$ déplace A en A' , B en B' et C en C' .



1.2 Coordonnées d'un vecteur

On considère deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Il faut ajouter $x_B - x_A$ à l'abscisse de A et $y_B - y_A$ à son ordonnée pour obtenir les coordonnées de B .

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Remarque :

- on indique les coordonnées d'un point en ligne : $M(2 ; 1)$;
- on indique (si possible) celles d'un vecteur en colonne : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (sans mettre de symbole « = » !).

1.3 Somme de vecteurs

Définition 1

Si on enchaîne la translation de vecteur $\vec{u}_2$ à la translation de vecteur $\vec{u}_1$, on obtient une translation, de vecteur $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Si $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, la première translation ajoute x_1 aux abscisses, et la seconde x_2 , on a donc ajouté $x_1 + x_2$.

De même, on ajoute $y_1 + y_2$ aux ordonnées, donc $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ a pour coordonnées :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

1.3.1 - La relation de Chasles

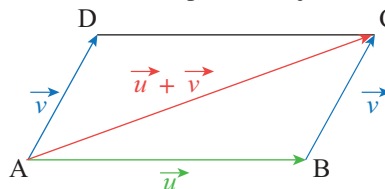
Si $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$, et $C(x_C ; y_C)$ sont trois points du plan, il suffit de calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ et $\vec{AC}$ pour constater :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

1.3.2 - La règle du parallélogramme

Pour construire la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a deux méthodes.

- On applique la relation de Chasles en trouvant des points A , B , C , tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$. Ainsi, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$.
- On choisit A , B et C tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AD} = \vec{v}$. On construit le parallélogramme $ABCD$. Dans ce parallélogramme, on constate $\vec{AD} = \vec{BC}$. Alors la relation de Chasles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ permet de justifier : $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.



Cette relation s'appelle la *règle du parallélogramme*

1.4 Norme et distance

Dans un repère orthonormé, la longueur du segment $[AB]$ (ou distance entre les points A et B) est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

(C'est une conséquence du théorème de Pythagore.)

Dans cette formule, on reconnaît les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$. Généralisons : si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, la norme du vecteur $\vec{u}$ est, par définition :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

En particulier, si $\vec{u} = \vec{AB}$, alors $\|\vec{AB}\| = AB$: la norme du vecteur $\vec{AB}$ est la distance entre A et B (c'est donc la distance parcourue par chaque point lors d'une translation).

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

1.5 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Soient k un réel et $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On note $k \cdot \vec{u}$ le vecteur de coordonnées : $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$. C'est le produit de $\vec{u}$ par k . On peut le noter avec ou sans point de multiplication.

En particulier, $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ est le vecteur *opposé* de $\vec{u}$, il a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct, $||k\vec{u}|| = |k| \cdot ||\vec{u}||$.

1.6 Coordonnées du milieu d'un segment

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

Si M est le milieu de $[AB]$, avec alors : $\vec{AM} = \vec{MB}$. En écrivant les coordonnées des vecteurs, on obtient les égalités : $x_M - x_A = x_B - x_M$ et $y_M - y_A = y_B - y_M$, donc

$$M \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Remarque : si un point M vérifie $\vec{AM} = \vec{MB}$, alors les droites (AM) et (MB) ont la même direction (c'est-à-dire qu'elles sont parallèles), et donc sont confondues, puisqu'elles ont un point commun. Or $AM = MB$, donc M est nécessairement le milieu de $[AB]$.

1.7 Base orthonormée, repère orthonormé

Deux vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ forment une base orthonormée du plan lorsque ces deux vecteurs sont de norme 1 et de directions perpendiculaires.

Si on les choisit de même direction et même sens que les axes de coordonnées, alors $\vec{i}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie sans peine que tout vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ s'écrit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Si O est l'origine du repère (intersection des axes), on dit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Vecteurs et alignement

 Retrouvez cette partie du cours avec 

2.1 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont même direction (ils sont « parallèles »).

➔ À RETENIR : (Critère pratique)

Soient $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si et seulement si un des deux est le vecteur nul ou si on peut trouver un coefficient de proportionnalité k tel que $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} x_2 = kx_1 \\ y_2 = ky_1 \end{cases}$$

Exemple : si $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dites directement que $\vec{u}_1 = 3\vec{u}_2$, ce qui montre que les deux vecteurs sont colinéaires.

2.2 Déterminant de deux vecteurs

Si $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, leur déterminant est le nombre défini par :

$$\text{Det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Remarque : le déterminant n'est pas symétrique :

$$\text{Det}(\vec{u}_2, \vec{u}_1) = x_2 y_1 - y_2 x_1 = -(x_1 y_2 - y_1 x_2) = -\text{Det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2).$$

En fait, ce n'est pas grave car nous l'utilisons seulement pour vérifier s'il égale ou non 0.

Propriété 1

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Avec les vecteurs de l'exemple précédent, on pouvait aussi calculer $\text{Det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 3 \times 2 - 6 \times 1 = 0$, ce qui confirme que les deux vecteurs étaient colinéaires.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

2.3 Montrer que trois points sont alignés

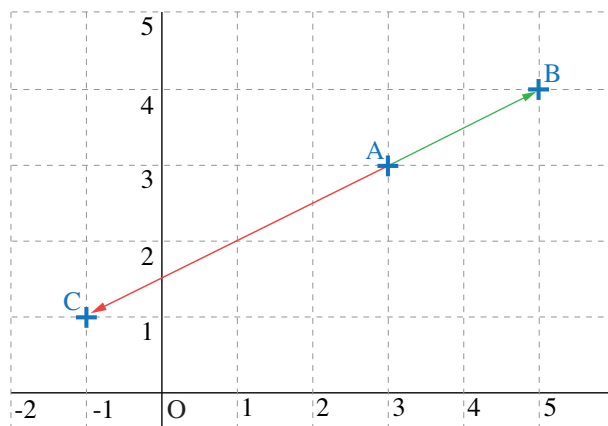
Rappel : « A , B et C » sont alignés signifie qu'ils sont situés sur la même droite, ou encore que les droites (AB) et (AC) sont confondues.

Comme elles ont un point commun, ceci revient à dire qu'elles ont la même direction :

Propriété 2

A , B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple : $A(3; 3)$; $B(5; 4)$; $C(-1; 1)$. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.



On constate $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$ (ou $\text{Det}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 0$, donc A , B et C sont alignés.

Remarque : il suffit de former deux vecteurs distincts contenant les trois points.

On peut remplacer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par :

- $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, etc.

2.4 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 2

Un vecteur *non nul* est un vecteur directeur de la droite D si et seulement si sa direction est celle de D (le vecteur est « parallèle » à la droite).

On dit que c'est un vecteur *directeur* car il indique sa *direction*.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Exemple : si le plan est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors $\vec{i}$ est un vecteur directeur de l'axe des abscisses, $\vec{j}$ est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées.

Remarques

- $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) .
- Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, qui sont tous colinéaires.
- Si A est un point de la droite D , $\vec{u}$ un vecteur directeur de (AB) et B l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, alors B est un point de D .
- En revanche, $\overrightarrow{EF}$ peut être un vecteur directeur de D sans que ni E , ni F ne soient sur D .



Solution de l'exercice type

Lycée Lavoisier, Paris

- 1** A, B et C sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont confondues. Comme ces deux droites passent par A , il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On calcule leurs coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 + 3 \\ -3 - 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + 3 \\ \frac{9}{2} - 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs sont bien colinéaires (on a $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$), donc les trois points sont alignés.

- 2** $COBD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BD}$. Comme O est l'origine du repère, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}$ sont, par définition, celles de C :

$$\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Notons provisoirement $(x_D; y_D)$ les coordonnées de D . Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} x_D + 6 \\ y_D + 3 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de résoudre l'équation :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OC} \iff \begin{cases} x_D + 6 = \frac{3}{2} \\ y_D + 3 = \frac{9}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_D = -\frac{9}{2} \\ y_D = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } D \left(-\frac{9}{2}; \frac{3}{2} \right).$$

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Lavoisier, Paris

- 3 Le centre du parallélogramme est le milieu commun des diagonales $[BC]$ et $[OD]$. Comme $O(0,0)$, il est préférable d'utiliser le segment $[OD]$, il vient facilement :

$$M\left(-\frac{9}{4}; \frac{3}{4}\right).$$

Voir énoncé page 153

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Coordonnées des vecteurs

5 min

Corrigé
p. 172

Dans le repère orthonormé (O, I, J) , on donne $A(3 ; 2)$ et $B(5 ; 1)$.

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont exactes ?

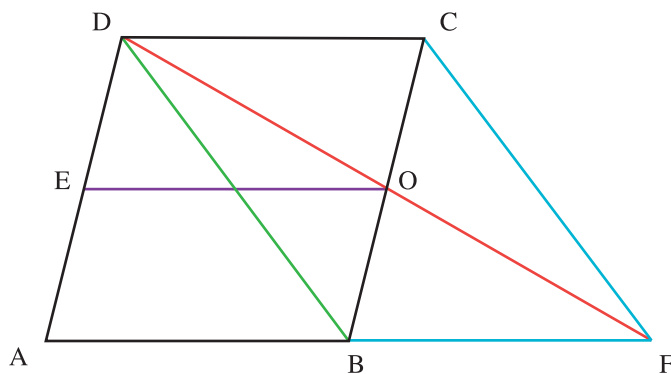
- ☐ a $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$
- ☐ b $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- ☐ c $AB = 2^2 + 1^2 = 5$
- ☐ d Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(4 ; \frac{3}{2}\right)$.

2 V/F Calcul vectoriel

10 min

Corrigé
p. 172

$ABCD$ et $BFCD$ sont des parallélogrammes. O est le centre de $BFCD$ et E le milieu de $[AD]$.



Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont exactes ?

- ☐ a $\vec{AB} + \vec{OF} = \vec{EF}$
- ☐ b $\vec{AB} - \vec{AE} = \vec{OF}$
- ☐ c $\vec{CF} = \vec{BD}$
- ☐ d $\vec{AO} + \vec{EF} = 3\vec{AB}$
- ☐ e $\vec{BC} + \vec{OF} = \vec{EB}$

3 QCM Test de connaissances

10 min

Corrigé
p. 172

Parmi les propositions aux questions suivantes, une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?

1 Quels que soient les points A , B et C :

- ☐ a $\vec{AC} + \vec{BC} = \vec{AB}$
- ☐ b $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
- ☐ c $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$
- ☐ d $\vec{AB} - \vec{BC} = 3\vec{AC}$

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

2 Si $2\vec{BC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors :

☐ a $\vec{BC} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

☐ b $\vec{CB} \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix}$

☐ c $\vec{CB} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

☐ d $\vec{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

3 $ABCD$ est un parallélogramme. Alors :

☐ a $\vec{AB} = \vec{CD}$

☐ b $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

☐ c $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$

☐ d $\vec{AB} = \vec{DC}$

Coordonnées

4 Calculs de longueurs



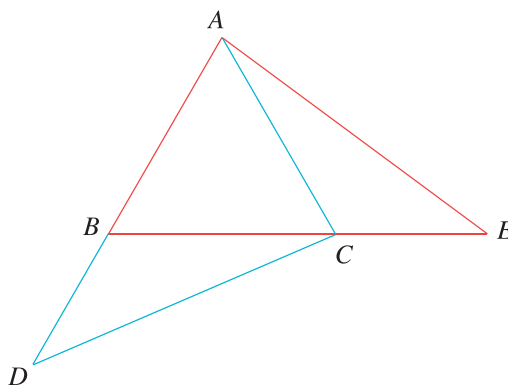
15 min

Corrigé
p. 173

Lycée Claude Debussy, Saint-Germain-en-Laye

Le triangle ABC est équilatéral de côté 2 et $BD = CE$.

On note O le pied de la hauteur issue de A dans ABC et on choisit un repère (O, C, J) de sorte que A ait une ordonnée positive.



1 Quelle est la distance OA ?

2 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$ dans le repère orthonormé (O, C, J) .

3 On suppose $\vec{BD} = k\vec{AB}$ et $\vec{CE} = k\vec{BC}$. Montrer que $AE = CD$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 Triangles et droites parallèles



30 min

Corrigé
p. 174

Lycée Saint Aspais, Fontainebleau

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on considère les points : $A(3 ; 3)$, $B(5 ; 2)$, $C(1 ; -1)$, $E(11 ; 2)$, $F(7 ; 4)$.

- 1 Faire une figure.
- 2 Montrer que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.
- 3 Montrer que le triangle ABC est rectangle.
- 4 Soit $G(7 ; -6)$
 - (a) Calculer FG , EF et EG .
 - (b) Montrer que les triangles ABC et EFG ont leurs côtés proportionnels.

6 Avec un cercle



20 min

Corrigé
p. 175

Lycée Champollion, Grenoble

Soient $A(2 ; 1)$, $B(5 ; 3)$, $C(7 ; 0)$ et $E\left(\frac{9}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ dans un repère orthonormé.

- 1 Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
- 2 Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre E et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$.
 - (a) Vérifier que A , B et C sont des points de $\mathcal{C}$ et que E est le milieu de $[AC]$.
 - (b) Construire $\mathcal{C}$.
- 3 Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$?

7 Alignement de points



20 min

Corrigé
p. 175

Lycée Buffon, Paris

On se place dans un repère orthonormé et on donne : $A(-5 ; 6)$, $B(-1 ; 1)$, $C(7 ; -8)$ et $D(9 ; 9)$.

- 1 Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
- 2 Les points A , B et C sont-ils alignés ? (justifier)
- 3 Le triangle ABD est-il rectangle en B ? (justifier)

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

8 Nature d'un triangle et cercle



15 min

Corrigé
p. 176

Lycée Jacques Decour, Paris

Dans un repère (O, I, J) orthonormé du plan, on considère les points $A(-1; 0)$, $B(3; -2)$ et $C(1; 4)$.

- 1 Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.
- 2 Déterminer par le calcul les coordonnées du centre K du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC , puis son rayon r .
- 3 Le point $D(3; 4)$ appartient-il à $\mathcal{C}$? Justifier votre réponse.

9 Avec une symétrie

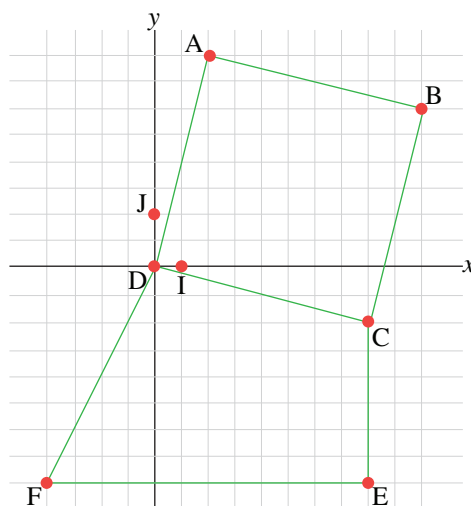


10 min

Corrigé
p. 177

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

On considère la figure suivante, où $ABCD$ est un carré et $FDCE$ un quadrilatère.



- 1 Donner, dans le repère (D, I, J) , les coordonnées des points de la figure.
- 2 Calculer les coordonnées du point K milieu de $[AE]$.
- 3 Donner les coordonnées du point symétrique de B par rapport à K .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

10 Avec un algorithme



10 min

Corrigé
p. 178

Lycée Alain, Le Vésinet

On lance une fléchette sur une cible électronique qui détecte les coordonnées $(x ; y)$ du point d'impact F de la fléchette dans le repère orthonormal (O, I, J) d'unité 0,5 cm. On s'intéresse à l'algorithme suivant :

```

Lire x et y
d ← √(x² + y²)
Si d < 10 alors
    Afficher : « Trop fort, tu es dans la cible ! »
Sinon
    Si d = 10 alors
        Afficher : « Oups, c'était limite ! »
    Sinon
        Afficher : « Désolé, mais c'est raté ! »
    Fin du Si
Fin du Si
    
```

- 1 Qu'affiche l'algorithme dans les cas suivants :
 - (a) $x = 4$ et $y = 3$.
 - (b) $x = 10$ et $y = 0$.
 - (c) $x = 9$ et $y = 6$.
- 2 La variable d désigne la distance entre deux points. Lesquels ?
- 3 De quelle forme est la cible et quelles sont ses dimensions (en cm) ? Justifier.

11 Un peu de recherche



30 min

Corrigé
p. 178

Lycée Victor Louis, Talence

Dans un repère orthonormé, on considère les points $M(-1 ; 1)$, $N(1 ; -5)$ et $P(-4 ; 0)$.

- 1 Démontrer que le triangle MNP est rectangle.
- 2 Les points R , S , T et U ont pour coordonnées $R(7 ; -3)$, $S(5 ; 3)$, $T(-2 ; 4)$ et $U(-5 ; 3)$. Démontrer que $MNRS$ est un parallélogramme.
- 3 Soit L le milieu de $[ST]$. Déterminer les coordonnées du point V , symétrique de M par rapport à L .
- 4 Le point H a pour coordonnées $(-3 ; -1)$. Démontrer que les points M , V , H d'une part et N , P et H d'autre part, sont alignés. Que peut-on en conclure ?
- 5 Démontrer que (MV) est perpendiculaire à (NP) .
- 6 Démontrer l'égalité : $MH^2 = HN \times HP$.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

12 Parallélogramme et triangle



10 min

Corrigé
p. 181

Lycée Montesquieu, Le Mans

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points $A(-1; -1)$, $B(1; 3)$ et $C(4; -1)$.

- 1 Déterminer les coordonnées du point D de manière à ce que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 2 Déterminer les coordonnées du centre de $ABCD$.
- 3 Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

13 En s'aidant des vecteurs



20 min

Corrigé
p. 182

Lycée Fénélon, Paris

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points $A(3; 5)$, $B(-6; 2)$ et $C(-4; -4)$.

- 1 Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 2 (a) Calculer AC et BD .
(b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
- 3 (a) Calculer les coordonnées du point M milieu de $[AB]$.
(b) Les droites (BC) et (OM) sont-elles parallèles?
- 4 Soit N un point sur l'axe des abscisses. Déterminer l'abscisse de N pour que les droites (AO) et (MN) soient parallèles.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Vecteurs

14 Calcul vectoriel



15 min

Corrigé
p. 183

Lycée Eugène Delacroix, Maisons-Alfort

Sur la figure suivante, les points sont équidistants :



Compléter les égalités par des nombres réels :

- | | |
|---|---|
| 1 $\overrightarrow{BD} = \dots \overrightarrow{AB}$ | 4 $\overrightarrow{EC} = \dots \overrightarrow{AG}$ |
| 2 $\overrightarrow{CD} = \dots \overrightarrow{BF}$ | 5 $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AC} = \dots \overrightarrow{AB}$ |
| 3 $\overrightarrow{FC} = \dots \overrightarrow{DE}$ | 6 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BF} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = \dots \overrightarrow{BD}$ |

15 Transformations



5 min

Corrigé
p. 183

Lycée Colbert, Paris

$ABCD$ étant un parallélogramme de centre O , I et J milieux de $[OD]$ et $[OB]$, comparer IC et JA .

16 Somme de vecteurs

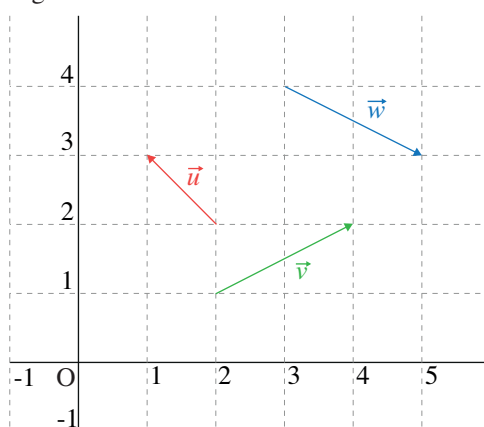


10 min

Corrigé
p. 184

Lycée Maurice Genevoix, Montrouge

On considère la figure suivante.



- 1 Quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$?
- 2 Placer le point A tel que $\vec{OA} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
Quelles sont les coordonnées de A ?

17 Que de vecteurs !



5 min

Corrigé
p. 184

Lycée Fénélon, Paris

On considère la figure ci-contre.

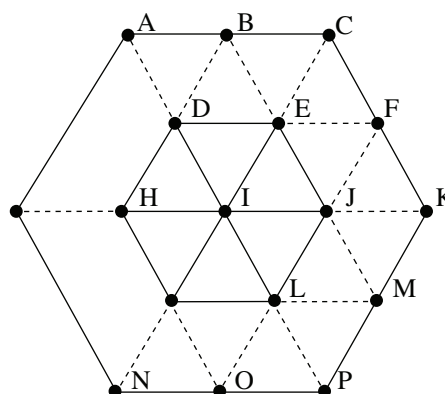
Compléter les égalités suivantes :

$$\vec{NP} + \vec{DE} = \dots \vec{AB}$$

$$\vec{HB} + \vec{EJ} = \vec{H} \dots$$

$$\vec{NK} - \vec{EF} + \vec{CH} = \dots$$

$$\vec{JB} - \vec{KM} + \vec{BC} = \vec{L} \dots$$



VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

18 Relation de Chasles



15 min

Corrigé
p. 184

Lycée Fénélon, Paris

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et H sont tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}.$$

- 1 Recopier et compléter :

$$\overrightarrow{BE} = \dots + \overrightarrow{AE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BH} = \dots + \overrightarrow{CH}.$$

- 2 Exprimer $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

- 3 Démontrer que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires. Conclure.

19 Alignement de points



15 min

Corrigé
p. 185

Lycée Jacques Decour, Paris

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soient E et F deux points définis par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}.$$

- 1 Faire une figure.
2 Montrer que C , E et F sont alignés.

20 Alignement de points



10 min

Corrigé
p. 186

Lycée Fénélon, Paris

ABC est un triangle quelconque. Soit D le point défini par :

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

Montrer que $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BC}$ et conclure sur l'alignement de trois points.

21 Alignement de points



20 min

Corrigé
p. 186

Lycée Fénélon, Paris

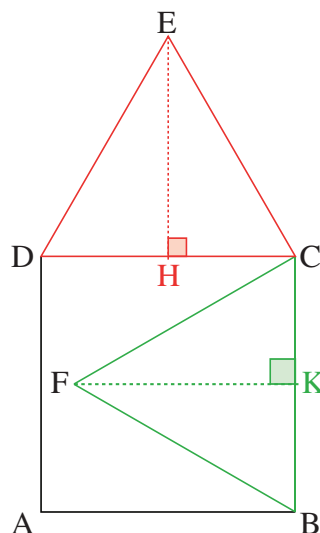
Soit $ABCD$ un carré. Les triangles DCE et BCF sont équilatéraux de hauteurs HE et KF .

On considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



- 1 Donner, sans justification, les coordonnées des points A , B , C , D , H et K .
- 2 Calculer les hauteurs HE et KF .
- 3 En déduire les coordonnées des points E et F .
- 4 Montrer que E , F et A sont alignés.

22 Exercice de recherche



15 min

Corrigé
p. 187

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

On considère un parallélogramme $ABCD$. On définit alors les points M et N par :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DN} = -x^2\overrightarrow{AB} + 2x\overrightarrow{AD},$$

où x est un nombre réel.

Existe-t-il au moins une valeur de x pour laquelle M et N sont confondus ?

23 Parallélisme



15 min

Corrigé
p. 188

Lycée Jacques Decour, Paris

ABC est un triangle non aplati.

Les points I et O sont tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Montrer que les droites (OP) et (IB) sont parallèles.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

24 Coordonnées d'un vecteur



20 min

Corrigé
p. 189

Lycée Hector Berlioz, Vincennes

- 1 Écrire un algorithme qui prend en entrée les coordonnées de $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ dans un repère orthonormé et qui fournit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la longueur AB .
- 2 Programmer cet algorithme en Python ou sur votre calculatrice.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Coordonnées des vecteurs

Enoncé
p. 162

- a** Faux. Il faut calculer la *différence* des coordonnées (celles de B moins celles de A). Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- b** Vrai. En effet, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-3 \\ 1-2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- c** Faux : $AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.
- d** Vrai. Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

2 V/F Calcul vectoriel

Enoncé
p. 162

- a** Vrai, car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EO}$ et $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{EF}$.
- b** Vrai, car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $-\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CO}$, donc $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DO}$. Comme $BFC D$ est un parallélogramme, O est le milieu de $[DF]$, donc $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OF}$.
- c** Faux. $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{BD}$.
- d** Vrai, car $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF}$, donc : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EO} = 3\overrightarrow{AB}$.
- e** Faux.
Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DO}$, on a : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AO} \neq \overrightarrow{EB}$.

3 QCM Test de connaissances

Enoncé
p. 162

- 1** Réponse **b** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Les autres égalités sont fausses.
- 2** Réponses **c** et **d**. Pour les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$, il suffit de diviser par deux celles de $2\overrightarrow{BC}$ et ensuite, pour les coordonnées de $\overrightarrow{CB}$, on multiplie par -1 .
- 3** Réponses **b**, **c** et **d**. En effet,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

(c'est une diagonale du parallélogramme).

De plus,

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$$

d'après la relation de Chasles.

Enfin, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (c'est une caractéristique des parallélogrammes).

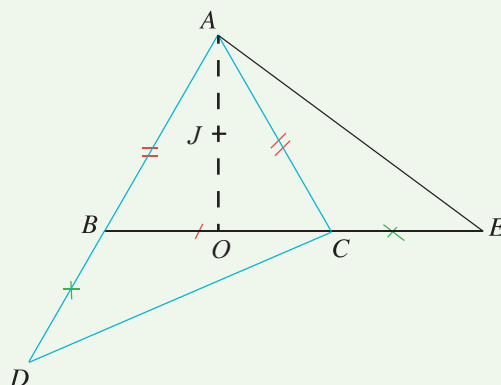
VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

4 Calculs de longueurs

Enoncé
p. 163

Lycée Claude Debussy, Saint-Germain-en-Laye

Notons sur la figure les longueurs égales :



- 1** Plaçons le point O . Le triangle OAC est rectangle en O . On sait que $AC = 2$ et $OC = 1$ (car dans un triangle équilatéral, le pied de la hauteur est le milieu de la base). On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OAC , il vient :

$$AC^2 = AO^2 + OC^2,$$

donc $OA^2 = AC^2 - OC^2 = 4 - 1 = 3$ et $OA = \sqrt{3}$.

- 2** Dans ce repère, on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

- 3** On constate $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$ (relation de Chasles). On en déduit :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + k\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}.$$

De même, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{BC}$.

On en déduit les coordonnées de $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -k-2 \\ -k\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et donc :

$$CD^2 = (-k-2)^2 + 3k^2 = 4k^2 + 4k + 4.$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 1+2k \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ donnent :

$$AE^2 = (1+2k)^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 4.$$

On constate : $AE = CD$.

COURS

INTERROS

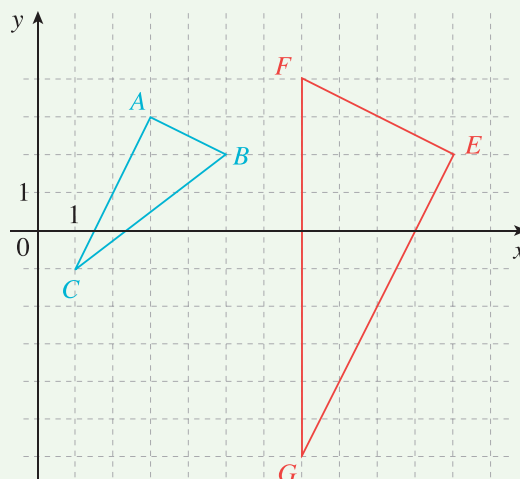
CORRIGÉS

5 Triangles et droites parallèles

Enoncé
p. 164

Lycée Saint Aspais, Fontainebleau

1



- 2 Méthode 1 : On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ces coordonnées sont proportionnelles donc les deux vecteurs sont *colinéaires* : les droites (AB) et (EF) sont donc parallèles.

Méthode 2 : On calcule le coefficient directeur des droites (AB) et (EF) .
Pour (AB) , on a :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 3}{5 - 3} = \frac{-1}{2}.$$

On obtient le même coefficient directeur pour la droite (EF) , donc $(AB) \parallel (EF)$.

- 3 On calcule les longueurs AB , AC et BC , par la formule habituelle :

$$AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

De même, $AC = 2\sqrt{5}$ et $BC = 5$.

On applique alors la réciproque du théorème de Pythagore :

$$AB^2 + AC^2 = 5 + 20 = 25 = BC^2$$

donc le triangle ABC est rectangle en A .

- 4 (a) On obtient : $FG = 10$, $EF = 2\sqrt{5}$ et $EG = 4\sqrt{5}$.

(b) On constate :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AC}{EG} = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BC}{FG} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Les côtés des triangles ABC et EFG sont donc proportionnels.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

6 Avec un cercle

Enoncé
p. 164

Lycée Champollion, Grenoble

- 1 Nous allons calculer les longueurs des trois côtés de ABC . Utilisons la formule de calcul de la distance :

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

$$AC = \sqrt{(7-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5^2 + 1} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}.$$

$$BC = \sqrt{(7-5)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Il devient clair que ABC est isocèle en B . De plus, on a :

$$AB^2 + BC^2 = 13 + 13 = 26 = AC^2.$$

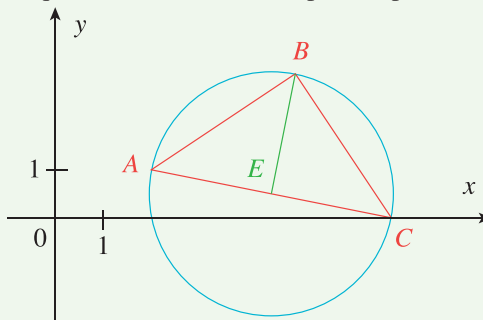
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B .

- 2 (a) En s'y prenant par le bon bout, on évite quelques calculs. En effet, il n'est pas difficile de constater que E est bien le milieu de $[AC]$ car $\frac{9}{2} = \frac{2+7}{2}$ et $\frac{1}{2} = \frac{1+0}{2}$.
Or, le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est aussi le centre de son cercle circonscrit, donc $EA = EB = EC$. Puisque $AC = \sqrt{26}$, on a :

$$AE = EC = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Finalement, A , B et C sont des points de $\mathcal{C}$.

- (b) $\mathcal{C}$ n'est autre que le cercle de centre E passant par A :



- 3 Comme ABC est isocèle et rectangle en B , on a nécessairement $\widehat{ACB} = 45^\circ$.

7 Alignement de points

Enoncé
p. 164

Lycée Buffon, Paris

- 1 On applique les formules :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1+5 \\ 1-6 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

De même :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2 Si A , B et C étaient alignés, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ seraient colinéaires (ils dirigeraient la droite passant par A , B et C). Or, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas proportionnelles, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, et donc A , B et C ne sont pas alignés.

3 On calcule les carrés des côtés :

$$AB^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41.$$

$$BD^2 = 10^2 + 8^2 = 100 + 64 = 164.$$

$$AD^2 = 14^2 + 3^2 = 196 + 9 = 205.$$

On constate $AD^2 = AB^2 + BD^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en B .

8 Nature d'un triangle et cercle

Enoncé
p. 165

Lycée Jacques Decour, Paris

1 MÉTHODE

Quand on nous demande la nature d'un triangle, il faut penser à : « rectangle », « isocèle » et « équilatéral. » Connaître la mesure des trois côtés, ou leurs carrés, est donc suffisant.

$$\begin{aligned} \bullet AB^2 &= (3 - (-1))^2 + (-2 - 0)^2 \\ &= 4^2 + (-2)^2 \\ &= 20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet AC^2 &= (1 - (-1))^2 + (4 - 0)^2 \\ &= 2^2 + 4^2 \\ &= 20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet BC^2 &= (1 - 3)^2 + (4 - (-2))^2 \\ &= (-2)^2 + 6^2 \\ &= 40. \end{aligned}$$

On constate donc que :

- $AB^2 = AC^2$, donc $AB = AC$;
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Ainsi, ABC est un triangle rectangle isocèle en A .

- 1** Attention : l'unité en abscisses (1 carreau) n'est pas la même qu'en ordonnées (2 carreaux).

On a alors : $A(2 ; 4)$, $B(10 ; 3)$, $C(8 ; -1)$, $D(0 ; 0)$, $E(8 ; -4)$ et $F(4 ; -4)$.

- 2** $K\left(\frac{x_A + x_E}{2} ; \frac{y_A + y_E}{2}\right)$ soit $K(5 ; 0)$.

- 3** Notons $B'(x ; y)$ le symétrique de B par rapport à K . Alors, K est le milieu de $[BB']$ et donc :

$$\begin{cases} 5 = \frac{10 + x}{2} \\ 0 = \frac{3 + y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 10 = 10 + x \\ 0 = 3 + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Ainsi, $B'(0 ; -3)$.

10 Avec un algorithme

Enoncé
p. 166

Lycée Alain, Le Vésinet

- 1** (a) Si $x = 4$ et $y = 3$, alors $d = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 < 10$ donc l'algorithme affiche : « Trop fort, tu es dans la cible ! ».
- (b) Si $x = 10$ et $y = 0$, alors $d = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10$ donc l'algorithme affiche : « Oups, c'était limite ! ».
- (c) Si $x = 9$ et $y = 6$, alors $d = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117}$, ce qui est plus grand que 10 donc l'algorithme affiche : « Désolé, mais c'est raté ! ».
- 2** On peut écrire $d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$ donc d est la distance entre le point de coordonnées $(x ; y)$ et celui de coordonnées $(0 ; 0)$. Ainsi, d représente la distance OF .
- 3** La cible ne peut être que ronde car on est à l'intérieur de la cible quand $d < 10$ et sur le bord lorsque $d = 10$; or, les points à 10 unités du centre forment un cercle. De plus, son centre est O (origine du repère) et son rayon est 10 unités, c'est-à-dire $10 \times 0,5$ cm, soit 5 cm.

11 Un peu de recherche

Enoncé
p. 166

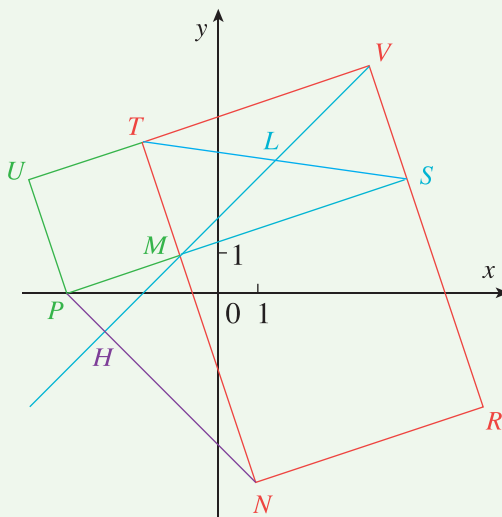
Lycée Victor Louis, Talence

Dans cet exercice, on utilise à plusieurs reprises la formule permettant de calculer la distance entre deux points A et B dans un repère orthonormé :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

On commence par une figure, où on place les points au fur et à mesure :



- 1** Nous allons appliquer la réciproque du théorème de Pythagore. On calcule les carrés des côtés :

$$MN^2 = (1 - (-1))^2 + (-5 - (-1))^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40.$$

$$MP^2 = (-4 - (-1))^2 + (-1)^2 = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10.$$

$$PN^2 = (1 - (-4))^2 + (-(-5))^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50.$$

On constate : $MN^2 + MP^2 = PN^2$ donc le triangle MNP est rectangle en M .

- 2** Pour montrer que $MNRS$ est un parallélogramme, on a deux méthodes possibles utilisant les coordonnées :

- Avec les vecteurs. On calcule les coordonnées de :

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{SR} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

On constate $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SR}$ donc $MNRS$ est un parallélogramme.

- Avec les milieux. Le milieu de $[MR]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{-1+7}{2}; \frac{1-3}{2}\right)$, donc $(3; -1)$. Le milieu de $[SN]$ a les mêmes coordonnées. $[MR]$ et $[SN]$ ont même milieu, on en déduit que $MNRS$ est un parallélogramme.

- 3** Là encore, deux méthodes possibles :

- Avec les vecteurs. L est le milieu de $[ST]$ et de $[MV]$ donc $MTVS$ est un parallélogramme, et $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{TV}$. On calcule :

$$\overrightarrow{MS} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Notons $V(x, y)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{TV}$ sont :

$$\overrightarrow{TV} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} x+2=6 \\ y-4=2 \end{cases}$$

D'où $x=4$ et $y=6$. Il vient : $V(4, 6)$.

- Avec les milieux. On calcule les coordonnées de L , milieu de $[ST]$:

$$L \left(\frac{5-2}{2} ; \frac{3+4}{2} \right).$$

donc $L \left(\frac{3}{2} ; \frac{7}{2} \right)$.

Notons $V(x, y)$; L étant le milieu de $[MV]$, ses coordonnées s'écrivent également :

$$L \left(\frac{x-1}{2} ; \frac{y+1}{2} \right).$$

On identifie, on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

On obtient $x=4$ et $y=6$, et donc $V(4 ; 6)$.

- 4** On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MV} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MH} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. On constate que $\overrightarrow{MV}$ et $\overrightarrow{MH}$ sont colinéaires (coordonnées proportionnelles), donc M , V et H sont alignés.

De même :

$$\overrightarrow{NP} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NH} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{NH}$ sont colinéaires, donc N , P et H sont alignés.

On en conclut que les droites (MV) et (NP) se coupent en H .

- 5** Montrer que (MV) est perpendiculaire à (NP) revient à montrer que MHP est un triangle rectangle. On calcule comme à la première question :

$$MH^2 = 8,$$

$$PH^2 = 2,$$

$$MP^2 = 10.$$

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$MP^2 = MH^2 + PH^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, MPH est un triangle rectangle en H . Donc (MV) est perpendiculaire à (NP) .

- 6 On calcule encore $HN^2 = 32$. L'égalité demandée ne concerne que des nombres positifs, on obtient une égalité équivalente en élevant au carré. Montrons donc que :

$$MH^4 = HN^2 \times HP^2.$$

On a $HN^2 = 32$, $HP^2 = 2$ et $MH^2 = 8$ donc $MH^4 = 64$. On a bien $64 = 32 \times 2$, donc l'égalité $MH^4 = HN^2 \times HP^2$ est vraie, et donc :

$$MH^2 = HN \times HP.$$

12 Parallélogramme et triangle

Enoncé
p. 167

Lycée Montesquieu, Le Mans

- 1 Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA} \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -4 \end{smallmatrix} \right)$.

Comme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ et $C(4 ; -1)$, les coordonnées de D sont $4 - 2$ et $-1 - 4$, donc $D(2 ; -5)$.

- 2 Le centre du parallélogramme est le milieu des diagonales. En considérant la diagonale $[AC]$, le centre a pour coordonnées :

$$\left(\frac{-1+4}{2} ; \frac{-1-1}{2} \right) \text{ donc } \left(\frac{3}{2} ; -1 \right).$$

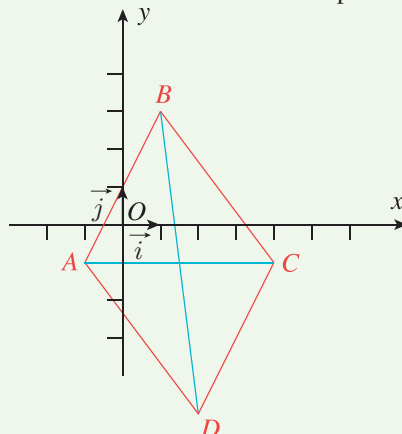
- 3 Calculons les longueurs des côtés de ABC :

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20,$$

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25,$$

$$AC^2 = 5^2 + 0 = 25.$$

$BC = AC$ donc ABC est isocèle en C . Il n'est pas rectangle.



13 En s'aidant des vecteurs

Enoncé
p. 167

Lycée Fénelon, Paris

- 1 Notons $D(x ; y)$. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} &\iff \begin{pmatrix} -6-3 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-x \\ -4-y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -9 = -4-x \\ -3 = -4-y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -4+9 = 5 \\ y = -4+3 = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, $D(5 ; -1)$.

- 2 (a) $AC^2 = (-4-3)^2 + (-4-5)^2 ; BD^2 = (5+6)^2 + (-1-2)^2$
 $= 49 + 81 \qquad \qquad \qquad = 121 + 9$
 $AC = \sqrt{130}. \qquad \qquad \qquad BD = \sqrt{130}.$

On constate alors que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ ont la même longueur, donc $ABCD$ est un rectangle.

De plus, d'après les calculs précédents, $AB = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$, qui est différent de AC donc ce n'est pas un carré.

- 3 (a) $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{3}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7}{2}$.
 Donc $M\left(-\frac{3}{2} ; \frac{7}{2}\right)$.

- (b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$. Regardons s'ils sont colinéaires :

$$2 \times \frac{7}{2} - (-6) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 7 - 9 = -2 \neq 0.$$

Donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OM}$ ne sont pas colinéaires, ce qui montre que les droites (BC) et (OM) ne sont pas parallèles.

- 4 Notons $N(x ; 0)$ (car N est sur l'axe des abscisses, donc son ordonnée est nulle). (AO) et (MN) sont parallèles si et seulement si :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x+\frac{3}{2} \\ 0-\frac{7}{2} \end{pmatrix} \text{ colinéaires} &\iff 3\left(0-\frac{7}{2}\right) - 5\left(x+\frac{3}{2}\right) = 0 \\ &\iff -\frac{21}{2} - 5x - \frac{15}{2} = 0 \\ &\iff -\frac{36}{2} - 5x = 0 \\ &\iff \boxed{x = -\frac{18}{5}}.\end{aligned}$$

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

14 Calcul vectoriel

Enoncé
p. 167

Lycée Eugène Delacroix, Maisons-Alfort

Comme les points sont équidistants, on peut exprimer chaque vecteur en fonction, par exemple, de $\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de les comparer facilement.

- 1 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$).
- 2 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$ car $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB}$.
- 3 $\overrightarrow{FC} = -3\overrightarrow{DE}$ car $\overrightarrow{FC} = -\overrightarrow{CF} = -3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$.
- 4 $\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ car $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AB}$.
- 5 $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.
- 6 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BF} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BD}$ car :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF} &= 4\overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{AE} &= 4\overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

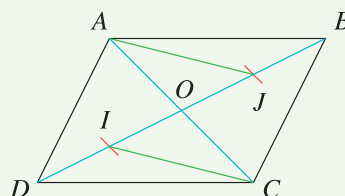
et

$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}.$$

15 Transformations

Enoncé
p. 168

Lycée Colbert, Paris



J est le milieu de $[OB]$ donc $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. On en déduit :

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

De même, on montre $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DO}$.

Or, O est le milieu de $[AC]$ et $[BD]$, donc $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$. On en déduit $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IC}$, et donc $AJ = IC$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

16 Somme de vecteurs

Enoncé
p. 168

Lycée Maurice Genevoix, Montrouge

- 1 De l'origine à l'extrémité de $\vec{u}$, on effectue un déplacement de 1 unité vers la gauche (donc -1 en abscisse) et un déplacement de 1 unité vers le haut (donc $+1$ en ordonnée). On en déduit les coordonnées $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- 2 On en déduit les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, et les coordonnées de $A(3 ; 1)$.

17 Que de vecteurs !

Enoncé
p. 168

Lycée Fénélon, Paris

$$\vec{NP} + \vec{DE} = 3\vec{AB}$$

$$\vec{HB} + \vec{EJ} = \vec{HE}$$

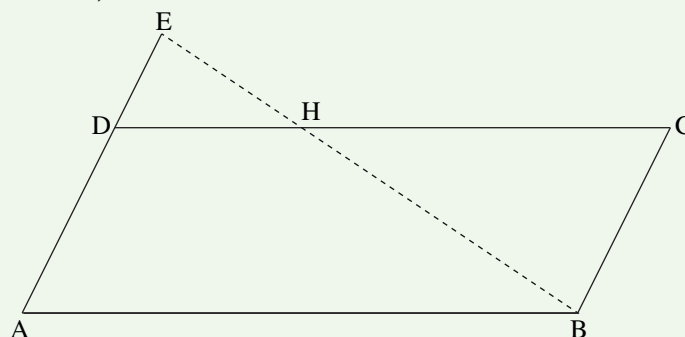
$$\vec{NK} - \vec{EF} + \vec{CH} = \vec{0}$$

$$\vec{JB} - \vec{KM} + \vec{BC} = \vec{LC}$$

18 Relation de Chasles

Enoncé
p. 169

Lycée Fénélon, Paris



- 1 $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE}$ et $\vec{BH} = \vec{BC} + \vec{CH}$.

2 • $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE}$
 $= -\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AD}$.

• $\vec{BH} = \vec{BC} + \vec{CH}$
 $= \vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{CD}$
 $= \vec{AD} - \frac{2}{3}\vec{AB}$.

(car $ABCD$ est un parallélogramme)

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

- 3 Nous avons exprimé $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction des mêmes vecteurs ; de plus, on voit le coefficient $-\frac{2}{3}$ devant $\overrightarrow{AB}$ dans l'expression de $\overrightarrow{BH}$, ce qui nous pousse à calculer $\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$:

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BH}.$$

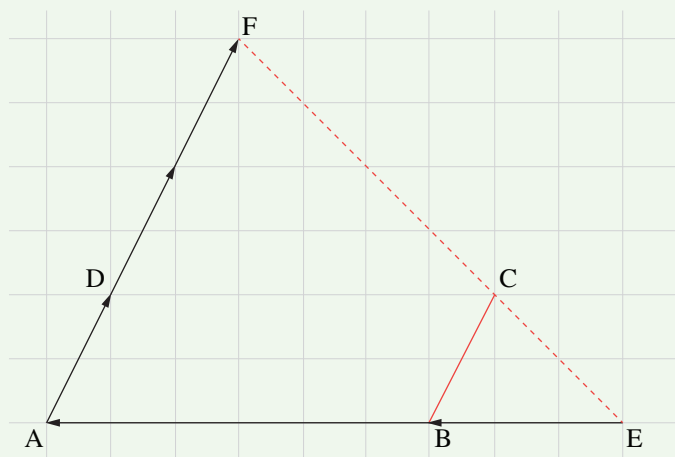
Ainsi, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires. Ils ont un point en commun donc les points B , H et E sont alignés.

19 Alignement de points

Lycée Jacques Decour, Paris

Enoncé
p. 169

- 1 La figure est la suivante :



- 2 Exprimons en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EF}$ par exemple.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} & \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} & &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}. & &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

On constate alors que $3\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF}$, donc $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, ce qui prouve que E , C et F sont alignés.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

20 Alignement de points

Lycée Fénélon, Paris

Enoncé
p. 169

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\ &= 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) \\ &= 2\overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires ; or, ils ont un point en commun donc les points B , C et D sont alignés.

21 Alignement de points

Lycée Fénélon, Paris

Enoncé
p. 169

- 1 $A(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$, $C(1 ; 1)$, $D(0 ; 1)$, $H\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$ et $K\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$.
- 2 Dans le triangle équilatéral DCE , (EH) est une hauteur donc le triangle EHC est rectangle en H .
Ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}EC^2 &= HC^2 + HE^2 \\ 1^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + HE^2 \quad \text{car } EC = DC = 1 \\ 1 &= \frac{1}{4} + HE^2 \\ EH^2 &= 1 - \frac{1}{4} \\ EH &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ EH &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Les triangles BCF et DCE étant identiques, $KF = HE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- 3 On déduit de la question précédente que :

$$F\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad E\left(\frac{1}{2} ; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

4 $\vec{AF} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{AE} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Or,

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

identité remarquable : $(a - b)(a + b)$

donc les vecteurs $\vec{AF}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires, ce qui signifie que les points A , F et E sont alignés.

22 Exercice de recherche

Enoncé
p. 170

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Rapportons la figure au repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$.

- $\vec{AM} = x\vec{AC}$
 $= x(\vec{AB} + \vec{AD})$
 $= x\vec{AB} + x\vec{AD}.$
- $\vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DN}$
 $= \vec{AD} - x^2\vec{AB} + 2x\vec{AD}$
 $= -x^2\vec{AB} + (1 + 2x)\vec{AD}$

M et N sont confondus si et seulement si $\vec{AM} = \vec{AN}$.

$$\vec{AM} = \vec{AN} \iff x\vec{AB} + x\vec{AD} = -x^2\vec{AB} + (1 + 2x)\vec{AD}$$

$$\iff \begin{cases} x = -x^2 \\ x = 1 + 2x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x^2 - x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$x = -1$ est solution de la première équation car $-(-1)^2 - (-1) = -1 + 1 = 0$.

Il existe donc bien une valeur de x pour laquelle les deux points sont confondus.

COURS

INTERROS

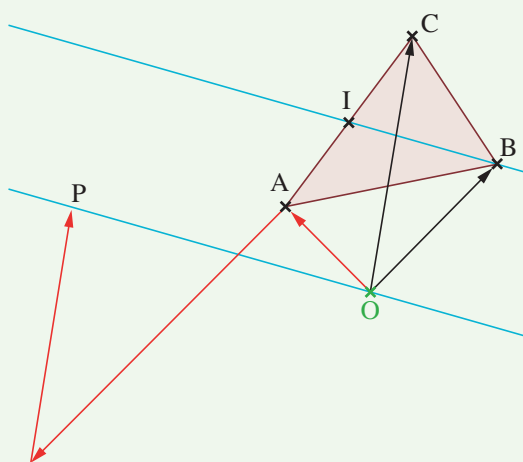
CORRIGÉS

23 Parallélisme

Enoncé
p. 170

Lycée Jacques Decour, Paris

Avant tout, faisons une figure



Pour démontrer que les droites (OP) et (IB) sont parallèles, nous allons montrer que $\vec{IB}$ et $\vec{OP}$ sont colinéaires.

Plaçons-nous dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{IB} &= \vec{IA} + \vec{AB} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{AB}. \end{aligned} \quad \begin{aligned} \bullet \quad \vec{OP} &= \vec{OA} - 2\vec{OB} + \vec{OC} \\ &= \vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OB} + \vec{OC} \\ &= \vec{OA} + \vec{BO} + \vec{BO} + \vec{OC} \\ &= \vec{BA} + \vec{BC} \\ &= -\vec{AB} + \vec{BA} + \vec{AC} \\ &= -2\vec{AB} + \vec{AC}. \end{aligned}$$

Ainsi, $-2\vec{IB} = \vec{AC} - 2\vec{AB} = \vec{OP}$, donc $\vec{OP}$ et $\vec{IB}$ sont colinéaires, ce qui signifie que (OP) et (IB) sont parallèles.

Remarque : on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + 2\vec{BO} + \vec{OC} \\ &= \vec{OI} + \vec{IA} + 2\vec{BI} + 2\vec{IO} + \vec{OI} + \vec{IC} \\ &= \vec{IA} + \vec{IC} + 2\vec{BI} \\ &= 2\vec{BI} \end{aligned}$$

pour démontrer que $\vec{OP}$ et $\vec{BI}$ sont colinéaires.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 5

24 Coordonnées d'un vecteur

Enoncé
p. 171

Lycée Hector Berlioz, Vincennes

- 1 On se rappelle que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ et que la longueur AB est donnée par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

On écrit donc :

```
Variables xA,xB,yA,yB,X,Y,L : nombres
Début
  Lire xA,yA,xB,yB
  X prend la valeur xB-xA
  Y prend la valeur yB-yA
  L prend la valeur RacineCarrée(X^2+Y^2)
  Afficher(Coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , (X,Y))
  Afficher("Longueur AB", L)
Fin
```

- 2 Nous donnons trois versions.

En Python

```
def vecteurs(xA,yA,xB,yB):
    X = xB - xA
    Y = yB - yA
    L = (X**2+Y**2)**(1/2)
    print("abscisse du vecteur AB : ",X)
    print("ordonnée du vecteur AB : ",Y)
    print("norme du vecteur AB : ",L)
```

Sur la TI-82, les variables sont obligatoirement des lettres, ce qui impose quelques contraintes :

Sur TI

```
PROGRAM VECTEUR
: Disp("Coordonnées de A")
: Prompt (U , V)
: Disp("Coordonnées de B")
: Prompt (Z , T )
: Z-U → X
: T-V → Y
: √(X^2+Y^2) → L
: Disp("vecteur AB : ")
: Disp (X)
: Disp (Y)
: Disp("longueur AB : ")
: Disp(L)
```

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

Mêmes contraintes sur la Casio :

Sur Casio

```
===== VECTEUR =====  
"Coordonnées de A":  
? → U : ? → V:  
"Coordonnées de B":  
? → Z : ? → T:  
Z-U → X :  
T-V → Y :  
 $\sqrt{X^2+Y^2}$  → L:  
"vecteur AB : " : X ◀ " , " : Y ◀  
"longueur AB : " : L ◀
```

Chapitre

6

Équations de droites. Systèmes linéaires

Plan du chapitre

1. Équations de droites
2. Savoir résoudre un système d'équations

1 Équations de droites

Exercice type 1

Lycée Paul Valéry, Sète

Soient, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, trois points $A(-1 ; -1)$, $B(-3 ; 0)$ et $C(3 ; 2)$. Donner une équation de (AB) , puis de la parallèle à (AB) passant par C .

Voir corrigé page 196

1.1 Qu'est-ce qu'une équation de droite ?

Au collège, vous avez rencontré des fonctions affines, de la forme $f(x) = mx + p$. Si on se donne un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on peut la représenter graphiquement par une droite D , qui contient tous les points de coordonnées $(x; y)$ où $y = mx + p$.

Prenons l'exemple de $f(x) = -3x + 2$. On calcule :

$$f(1) = -1, f(-3) = 11, f(2) = -4,$$

donc la droite D contient, entre autres, les points de coordonnées :

$$(1; -1), (-3; 11), (2; -4).$$

Inversement, si $A(-1; 5)$, alors $A \notin D$ car $f(-1) = 5$; si $B(2, 5)$, alors $B \notin D$ car $f(2) \neq 5$.

Pour tout point M de coordonnées $(x; y)$:

- si $y = -3x + 2$, alors M est un point de D ;
- si $y \neq -3x + 2$, alors M n'est pas un point de D .

Autrement dit, les coordonnées de points de D sont les solutions de l'équation à deux inconnues $y = -3x + 2$.

On dit donc que $y = -3x + 2$ est une *équation réduite de la droite D* .

Pourquoi « réduite » ? Parce que sous sa forme la plus générale (appelée « équation cartésienne »), une équation de droite s'écrit $ax + by + c = 0$.

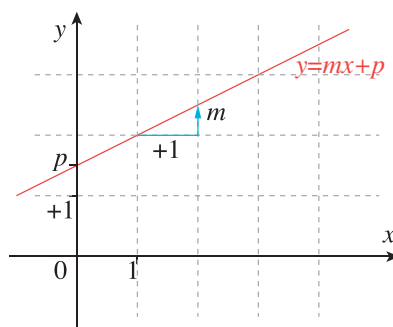
Si $b \neq 0$, cette équation se ramène à la forme réduite : $y = mx + p$, avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

Si $b = 0$ et $a \neq 0$, l'équation se ramène à $x = -\frac{c}{a}$. La droite D ne représente plus une fonction affine, mais contient tous les points qui ont l'abscisse $-\frac{c}{a}$: il s'agit donc d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (dite droite « verticale »).

Si A et B sont deux points distincts sur la droite D , la *direction* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ne dépend pas des points A et B . On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur *directeur* de D . La droite D possède une infinité de vecteurs directeurs, non nuls, tous colinéaires, qui caractérisent la *direction* de D : deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont les mêmes vecteurs directeurs.

1.2 Équation réduite $y = mx + p$

On considère une droite D qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) . Elle admet une équation réduite $y = mx + p$.



p s'appelle l'*ordonnée à l'origine*, car le point de coordonnées $(0 ; p)$ appartient à la droite D . p est l'ordonnée du point de D situé à la verticale de l'origine O (d'où son nom).

m s'appelle la *pente de la droite* . Ce coefficient caractérise l'inclinaison de D par rapport à (Ox) , et deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente. Si $m = 0$, la droite D est parallèle à (Ox) . Si $m > 0$, la fonction affine $x \mapsto mx + p$ est croissante, c'est-à-dire que les ordonnées augmentent quand les abscisses augmentent. Si $m < 0$, c'est l'inverse. Plus la valeur absolue $|m|$ est grande, plus la direction de la droite D se rapproche de la verticale.

Pour mieux le comprendre, considérons deux points distincts $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sur D . Comme $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$, on a par soustraction : $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

Si on choisit :

$$x_B = x_A + 1,$$

on obtient un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

C'est ce qu'on appelle la méthode « des petits pas », ou de « l'escalier » : à partir d'un point A de D , on ajoute $+1$ à l'abscisse, il faut ajouter $+m$ à l'ordonnée pour obtenir un autre point de la droite. On constate que, plus m est grand, plus le vecteur directeur est proche de la direction de (Oy) .

1.3 Forme générale $ax + by + c = 0$

Supposons que l'équation de la droite D soit donnée sous la forme générale $ax + by + c = 0$. Pour trouver des points sur D , on fixe arbitrairement x ou y et on résout l'équation à une inconnue obtenue.

Par exemple, si D a pour équation $2x - 3y - 4 = 0$. Pour $y = 0$, on a : $2x - 4 = 0$, donc $x = 2$. Pour $x = 3$, on a : $-3y + 2 = 0$, donc $y = \frac{2}{3}$. La droite D passe donc par les points de coordonnées $(2; 0)$ et $(3; \frac{2}{3})$.

Si on prend deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sur D , on a :

$$ax_A + by_A + c = 0$$

et

$$ax_B + by_B + c = 0,$$

donc par soustraction :

$$a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0.$$

Ainsi, si $x_B - x_A = -b$, on constate que $y_B - y_A = a$ convient.

Conclusion : on obtient un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Remarque : dans une équation cartésienne de droite, les coefficients a et b ne peuvent pas être tous les deux égaux à zéro (sinon, il n'y a plus d'inconnue dans l'équation !), donc il est certain que ce vecteur n'est pas nul.

Par exemple, si

$$D : 2x - 3y - 4 = 0,$$

le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

On retrouve ce qui a été dit au début : si $a \neq 0$, on est ramené à une équation réduite $y = mx + p$ avec $m = -\frac{b}{a}$, et on connaît le vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Or $\vec{u} = a\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de D , de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

COURS

INTERROS

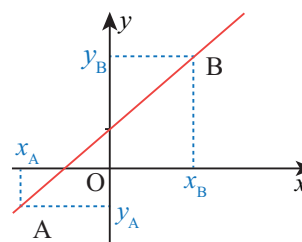
CORRIGÉS

1.4 Pente d'une droite non verticale

1.4.1 - On connaît deux points

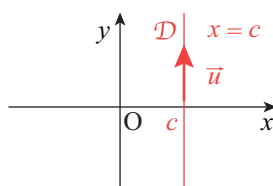
On peut calculer la pente à partir de deux points de la droite $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

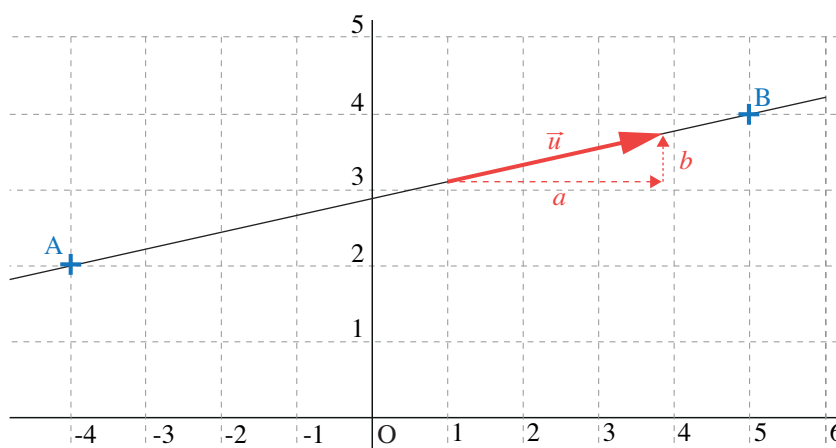


1.4.2 - On connaît un vecteur directeur

- Si le vecteur directeur est de la forme $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, alors la droite est verticale et n'a donc pas de pente (parfois, on dit qu'elle a une pente « infinie »).



- Si le vecteur directeur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$, alors on remarque que le vecteur $\frac{1}{a}\vec{u}$, qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}$, est aussi un vecteur directeur de la droite, dont les coordonnées sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, donc $m = \frac{b}{a}$.



ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

1.5 Comment déterminer l'équation d'une droite ?

 Retrouvez cette partie du cours en vidéo avec 

1.5.1 - Méthode par identification

Pour plus de clarté, nous allons traiter quelques exemples.

1.5.1.1 - Cas d'une droite passant par un point donné et dirigée par un vecteur non nul

Soit $A(2; 3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet une équation $ax + by + c = 0$, avec $-b = 1$, $a = 2$.

Comme A est sur la droite, on a $2a + 3b + c = 0$. Ces renseignements permettent de calculer $a = 2$, $b = -1$ et $c = -1$, d'où l'équation $2x - y - 1 = 0$.

1.5.1.2 - Cas d'une droite passant par deux points distincts donnés

Soient $A(1; 1)$ et $B(-2; 3)$.

Les deux points n'ont pas la même abscisse, la droite (AB) n'est donc pas verticale et elle admet une équation réduite $y = mx + p$. Comme les coordonnées de A et B sont solutions, on obtient : $1 = m + p$ et $3 = -2m + p$. En soustrayant, il vient $-2 = 3m$, donc $m = -\frac{2}{3}$ et $p = \frac{5}{3}$.

La droite (AB) a pour équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. On peut multiplier par 3 pour obtenir une équation à coefficients entiers : $2x + 3y - 5 = 0$.

On note qu'une droite a une seule équation réduite, mais qu'elle a une infinité d'équations, toutes proportionnelles. En cherchant l'équation réduite, on obtient un problème plus simple avec seulement deux coefficients à trouver.

1.5.2 - Méthode du déterminant

1.5.2.1 - Cas d'une droite passant par un point donné et dirigée par un vecteur non nul

Soit $A(2; 3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On considère un point $M(x; y)$. Ce point est sur la droite D si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

On détermine les coordonnées de $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 3 \end{pmatrix}$.

On sait que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est égal à zéro. On calcule donc le déterminant de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$:

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = (x - 2) \times 2 - (y - 3) \times 1.$$

On retrouve, après les simplifications, l'équation de D : $2x - y - 1 = 0$.

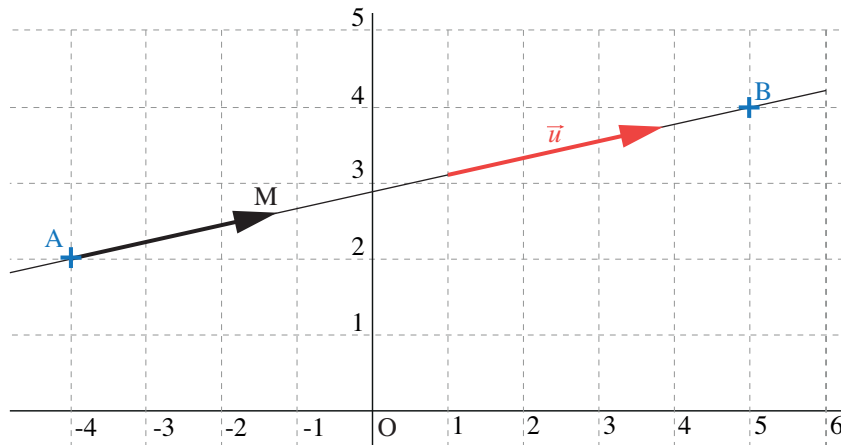
COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1.5.2.2 - Cas d'une droite passant par deux points distincts donnés

Soit $A(-4; 2)$ et $B(5; 4)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) .

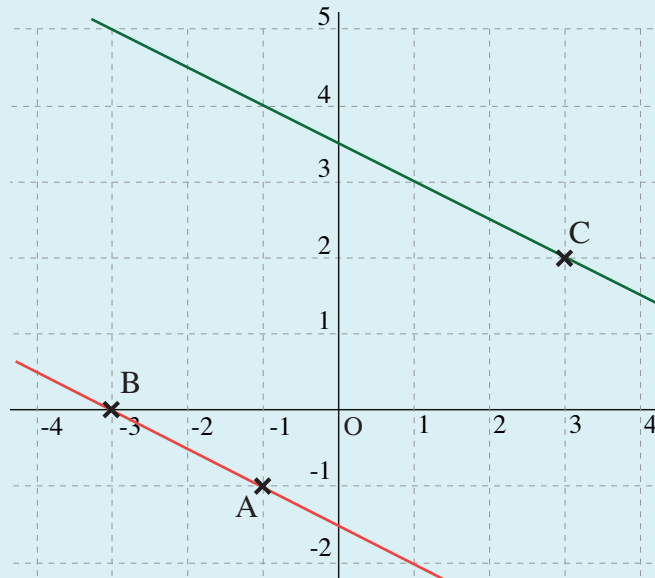


On est ramené au cas précédent. Si $M(x; y)$, alors M est un point de D si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$, c'est-à-dire : $2(x + 4) - 9(y - 2) = 0$, donc l'équation de D est : $2x - 9y + 26 = 0$.

➡ Solution de l'exercice type 1

Lycée Paul Valéry, Sète

On a d'abord besoin des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Nous allons utiliser les deux méthodes, assez différentes dans l'esprit.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

➔ Solution de l'exercice type 1 (suite)

Lycée Paul Valéry, Sète

- 1** *Identification* : les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ donnent directement le coefficient directeur de (AB) : $-\frac{1}{2}$.

L'équation réduite de (AB) s'écrit $y = -\frac{1}{2}x + p$. Comme $A(-1 ; -1)$ est un point de (AB) , on a : $-1 = \frac{1}{2} + p$, d'où $p = -\frac{3}{2}$.

Conclusion : (AB) a pour équation réduite $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

- 2** *Vecteurs colinéaires* : notons D la droite parallèle à (AB) et passant par C . Elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. Le point $M(x ; y)$ appartient à D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On écrit leurs coordonnées :

$$\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En exprimant que les deux vecteurs sont colinéaires, on a :

$$(x-3) \times 1 - (y-2) \times (-2) = 0,$$

ce qui donne $x + 2y - 7 = 0$ et donc, en simplifiant :

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Voir énoncé page 191

2 Savoir résoudre un système d'équations

Exercice type 2

Lycée Fustel-de-Coulanges, Massy

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x^2 - 3y^2 = -19 \end{cases}$$

Voir corrigé page 201

2.1 Cas d'équations sans carrés

On utilise deux méthodes de résolution : substitution ou combinaison.

2.1.1 - Substitution

Il s'agit de calculer l'une des inconnues en fonction des autres grâce à l'une des équations, et de remplacer, de substituer ce que l'on a trouvé dans les autres équations.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Concrètement, dans le système :

$$\begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y = 40 \end{cases} ,$$

on peut calculer grâce à la première équation ($x = y - 16$), et remplacer dans la seconde :

$$\begin{cases} x = y - 16 \\ 3(y - 16) + 5y = 40 \end{cases} .$$

Après simplifications, on a :

$$\begin{cases} x = y - 16 \\ 8y - 48 = 40 \end{cases} .$$

Pour que chaque système que vous écrivez soit équivalent au précédent (c'est-à-dire qu'il aie les mêmes solutions), il faut bien veiller à garder l'équation donnant la valeur de x . On la recopie dans chaque système, sans la modifier. Avec la dernière équation, on obtient : $8y = 88$, donc $y = 11$. On remplace y par 11 dans la première équation :

$$\begin{cases} x = 11 - 16 = -5 \\ y = 11 \end{cases} .$$

Il y a une (unique) solution : $(-5 ; 11)$. Attention si vous donnez l'ensemble des solutions : il ne contient qu'un seul élément.

On note :

$$S = \{(-5 ; 11)\} .$$

2.1.2 - Combinaison

Vous avez le droit, dans un système d'équations, de multiplier les équations par un réel non nul et d'ajouter une des équations à une autre, dans le but de supprimer une inconnue. On obtient alors un système équivalent. N'oubliez pas d'indiquer en marge de votre système les opérations que vous avez réalisées, ce qui permet au correcteur de mieux suivre votre raisonnement. Par exemple, pour le système

$$\begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y = 40 \end{cases} .$$

On peut se débarrasser de y dans la deuxième équation en multipliant la première ligne par 5, et en ajoutant le résultat à la deuxième ligne. Notez ceci :

$L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1$. On obtient :

$$L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \quad \begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y + 5(x - y) = 40 - 5 \times 16 \end{cases} .$$

On simplifie :

$$\begin{cases} y = x + 16 \\ 8x = -40 \end{cases}$$

et enfin :

$$\begin{cases} y = 11 \\ x = -5 \end{cases} .$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

On retrouve :

$$S = \{(-5; 11)\}.$$

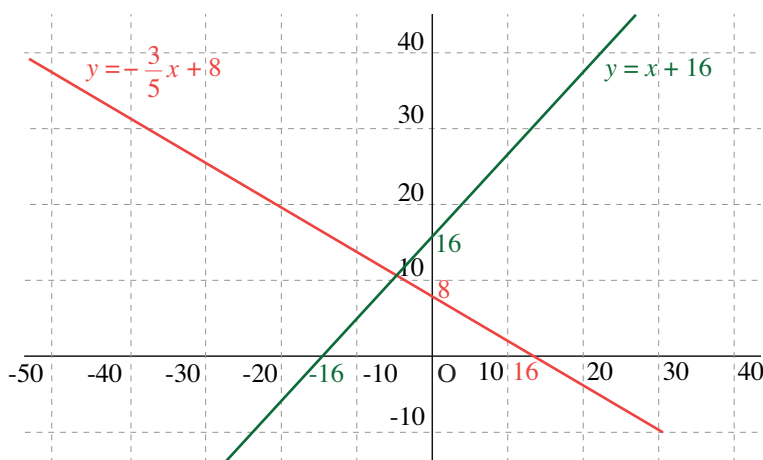
2.2 Lien avec les équations de droites

2.2.1 - Interprétation géométrique

Examinons de nouveau le système :

$$\begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y = 40 \end{cases}.$$

Le système ne contenant que des sommes et produits de constantes par x et y , on parle de système *linéaire*. Chaque ligne peut être interprétée comme une équation de droite. Notons D_1 la droite d'équation $x - y + 16 = 0$ et D_2 la droite d'équation $3x + 5y - 40 = 0$. Les points $M(x; y)$ dont les coordonnées sont solutions du système sont les points qui sont à la fois sur D_1 et D_2 . Si les droites ne sont pas parallèles, il n'y en a qu'un.



Comment vérifier si les droites sont parallèles ? On sait trouver un vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour D_1 , et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour D_2 . Or ces vecteurs ne sont pas colinéaires (parce que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, ou parce que leur déterminant n'est pas 0).

Dans cet exemple, il est donc certain qu'il existe une solution et une seule.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2.2.2 - Nombre de solutions en fonction du type de système

On considère un système sous la forme :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Sauf dans des cas très particuliers où l'une des lignes ne contient pas d'inconnue (par exemple si $a_1 = b_1 = 0$), les deux lignes sont, comme dans l'exemple précédent, les équations de deux droites D_1 et D_2 . On considère leurs vecteurs directeurs respectifs : $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, les deux vecteurs sont non colinéaires, donc les deux droites sont sécantes, et le système admet un unique couple solution.

Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, les droites D_1 et D_2 sont parallèles.

- Si les deux équations sont proportionnelles, D_1 et D_2 sont confondues et le système admet une infinité de solutions (les coordonnées des points de D_1);
- sinon, les droites D_1 et D_2 sont strictement parallèles, et le système n'admet aucune solution.

À RETENIR

Un système linéaire possède soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.

Solution de l'exercice type 2

Lycée Fustel-de-Coulanges, Massy

Pour se ramener à un système linéaire, on pose $X = x^2$ et $Y = y^2$.

On obtient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x^2 - 3y^2 = -19 \end{cases} &\iff \begin{cases} X + Y = 13 \\ 2X - 3Y = -19 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X + Y = 13 \\ 5X = 20 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ &\iff \begin{cases} X + Y = 13 \\ X = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} Y = 13 - 4 = 9 \\ X = 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

On obtient enfin :

$$Y = 9 \text{ et } X = 4,$$

ce qui donne $x = 2$ ou $x = -2$, et $y = 3$ ou $y = -3$. En tenant compte de tous les cas, on obtient l'ensemble de solutions suivant :

$$S = \{(2; 3), (-2; 3), (2; -3), (-2; -3)\}.$$

Voir énoncé page 197

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

1 V/F Équations de droites

5 min

Corrigé
p. 210

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a** La droite D d'équation $y = 3x + 2$ passe par $A(1 ; 2)$.
- b** Si $A(2 ; 1)$ et $B(-1 ; 2)$, alors (AB) a pour coefficient directeur -3 .
- c** Les droites $D : y = -2x - 3$ et $D' : y = 5x - 3$ sont parallèles.
- d** $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $D : y = -3x + 6$.

2 QCM Systèmes d'équations

10 min

Corrigé
p. 210

Quels sont, parmi les systèmes suivants, ceux qui admettent au moins une solution ?

- a** $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - y = 0 \end{cases}$
- b** $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -x + 3 \end{cases}$
- c** $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 3 \end{cases}$
- d** $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 4x - 10y = 8 \end{cases}$

Équations de droites

3 Équations de droites



20 min

Corrigé
p. 210

Lycée Chaptal, Paris

Le plan étant rapporté à un repère (O, I, J) , on considère les points $A(4 ; -1)$ et $B(3 ; -8)$.

- 1** Montrer que la droite (AB) a pour équation $y = 7x - 29$.
- 2** Déterminer une équation de la droite D passant par $C(0 ; -1)$ et parallèle à (AB) .
- 3** Soient $E(3 ; -2)$ et $F(2 ; 2)$. Déterminer une équation de la droite (EF) .
- 4** Les droites D et (EF) sont-elles sécantes ? Justifier. Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4 Équations de droites



15 min

Corrigé
p. 211

Lycée Carnot, Dijon

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On donne les points $A(1 ; 0)$ et $B(4 ; 2)$. Écrire une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 Équations de droites



5 min

Corrigé
p. 211

Lycée François I^{er}, Le Havre

Soit D la droite d'équation : $y = -3x + 1$. On munit le plan d'un repère (O, I, J) . Soient $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, et t la translation de vecteur $\vec{u}$. Trouver une équation de l'image de D par t .

6 Équations de droites



15 min

Corrigé
p. 212

Lycée Lacordaire, Marseille

- 1 Dans un repère (O, I, J) , déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de coefficient directeur -1 avec $A(2 ; 3)$.
- 2 Donner une équation de Δ , la droite passant par $B(0 ; 2)$ et parallèle à $\mathcal{D}$.
- 3 Construire $\mathcal{D}$ et Δ .

7 Équations de droites



15 min

Corrigé
p. 212

Lycée Voltaire, Paris

On se place dans un repère orthonormé et on donne : $A(1 ; -1)$, $B(3 ; 3)$ et $C(1 ; 6)$.

- 1 Déterminer une équation de la droite (AB) .
- 2 Déterminer une équation de la droite (d) qui passe par le point C et qui est parallèle à la droite (AB) .

8 Équations de droites



15 min

Corrigé
p. 213

Lycée du Parc, Lyon

Dans les deux cas suivants, déterminer une équation de la droite Δ , parallèle à (D) et passant par A .

- 1 $A(2 ; 1)$. (D) a comme équation $y = -x + 2$.
- 2 $A(2 ; -3)$. $(D) = (BC)$, avec $B(-1 ; 0)$ et $C(-1 ; 3)$.

9 Coordonnées



20 min

Corrigé
p. 213

Lycée Montesquieu, Bordeaux

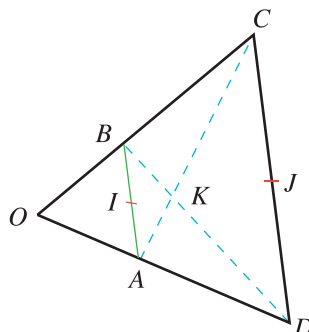


Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo avec



Soit un trapèze $ABCD$, de bases $[AB]$ et $[CD]$. On suppose que les droites (AD) et (BC) se coupent en O . On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ et K le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) .

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6



Soit k le réel tel que $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA}$. On se place dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

- 1 Quelles sont les coordonnées de O , A , B et D dans ce repère ?
- 2 Quelle est l'équation réduite de la droite (CD) dans ce repère ? En déduire que $C(0 ; k)$.
- 3 Calculer les coordonnées de I , J , et K .
- 4 Montrer que les points O , I , J , et K sont alignés.

10 Équations de droites



20 min

Corrigé
p. 215

Lycée Fénélon, Paris

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

- 1 Déterminer une équation cartésienne de l'image de la droite $\mathcal{D}_1$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.

On donne $\mathcal{D}_1 : y = x - 2$ et $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

- 2 Déterminer une équation cartésienne de l'image de la droite $\mathcal{D}_2$ par la symétrie centrale de centre Ω .

On donne $\mathcal{D}_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $\overrightarrow{O\Omega} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

11 Équations de droites



30 min

Corrigé
p. 216

Lycée Hoche, Versailles

Retrouver, parmi les équations ci-dessous, celles qui correspondent aux droites du dessin (lorsque cela est possible !).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

1 $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

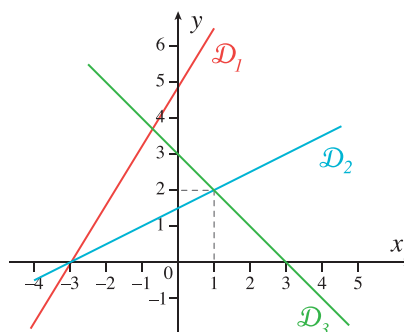
2 $y = \frac{1}{2}x - 2$

3 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

4 $y = 3x - 3$

5 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

6 $y = \frac{5}{3}x + 5$



12 Équations de droites



25 min

Corrigé
p. 217

Lycée Condorcet, Paris

À tout réel $m \neq 3$ on associe la droite D_m d'équation :

$$y = \frac{2m-1}{m-3}x + \frac{-7m+6}{m-3}.$$

1 Déterminer m et donner une équation de D_m pour que :

- (a) D_m passe par $A(1; 1)$.
- (b) D_m passe par O .
- (c) D_m soit parallèle à l'axe des abscisses.

2 Peut-on trouver m tel que :

- (a) D_m soit parallèle à l'axe des ordonnées ?
- (b) D_m soit parallèle à Δ d'équation $y = 3x - 6$?
- (c) D_m admette (-2) comme coefficient directeur ?

3 Montrer qu'il existe un point K qui appartient à toutes les droites D_m .

Systèmes d'équations

13 Systèmes d'équations



15 min

Corrigé
p. 220

Lycée Voltaire, Paris

Résoudre les systèmes suivants :

1
$$\begin{cases} \frac{2x+3y}{6} - \frac{4x-3y}{6} = 1 \\ \frac{3x-2y}{2} - \frac{5x-3y}{2} = 3 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \\ 3x - y = 24 \end{cases}$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

14 Mise en équations d'un problème



10 min

Corrigé
p. 220

Lycée Fragonard, L'Isle-Adam

On considère une classe de seconde dans laquelle il y a, au départ, deux fois plus de garçons que de filles. Six garçons quittent la salle et six filles arrivent. Il y a alors deux fois plus de filles que de garçons. Combien de garçons et de filles y avait-il au début ?

15 Systèmes d'équations



15 min

Corrigé
p. 221

Lycée Lamartine, Paris

Soit (S) le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ (x + y)^2 = 9 \end{cases}$$

- 1 Quelles sont les valeurs possibles de la somme $x + y$?
- 2 En déduire les solutions du système (S).

16 Systèmes d'équations



10 min

Corrigé
p. 222

Lycée Jean Monnet, Franconville

Une salle de théâtre compte 150 places, les unes à 21 €, les autres à 26 €. Quand elle est pleine, la recette totale est de 3 300 €. Combien y a-t-il de places de chaque sorte ?

17 Systèmes d'équations



10 min

Corrigé
p. 222

Lycée Notre-Dame, Saint-Nazaire

Si deux capitaux sont placés, le premier (C_1) à 10 % annuels, le second (C_2) à 8 % annuels, alors C_1 rapporte 200 € de plus que C_2 .

Si C_1 était placé à 8 % annuels et C_2 à 10 % annuels, alors C_2 rapporte 70 € de plus que C_1 .

Déterminer les deux capitaux.

18 Systèmes d'équations



10 min

Corrigé
p. 223

Lycée Auguste Renoir, Asnières-sur-Seine

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + 2y = -1 \\ -2x + 2\sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

19 Systèmes d'équations



20 min

Corrigé
p. 223

Lycée Claude Monet, Paris

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 2y^2 = 2 \\ 3x^2 - 4y^2 = -24 \end{cases}$$

20 Systèmes d'équations



20 min

Corrigé
p. 224

Lycée Jacques Monod, Clamart

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x^2 - \frac{9}{y+1} = 15 \\ 3x^2 - \frac{24}{y+1} = 19 \end{cases}$$

On posera $X = x^2$ et $Y = \dots$

21 Système non linéaire



20 min

Corrigé
p. 224

Lycée Arago, Paris

En posant $X = \frac{1}{x}$ et $Y = y^2$, résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - 5y^2 = 2 \\ \frac{7}{x} + 3y^2 = 12 \end{cases}$$

22 Droites concourantes



15 min

Corrigé
p. 225

Lycée St Thomas d'Aquin, Paris

On considère le système (S) :

$$\begin{cases} -5x + y = 13 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

- 1 Indiquer, sans le résoudre, le nombre de solutions de (S).
- 2 Résoudre (S).

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

- 3** Les droites D_1 , D_2 , D_3 , d'équations respectives $y = 5x + 13$, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$, $y = -x + 1$, sont-elles concourantes ?

23 Systèmes d'équations



15 min

Corrigé
p. 226

Lycée Hoche, Versailles

Résoudre le système suivant en indiquant la méthode utilisée.

$$\begin{cases} 2u - 3v = 4 \\ 10u + 2v = 3 \end{cases}$$

En déduire la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{2}{x-3} - \frac{3}{y+5} = 4 \\ \frac{5}{x-3} + \frac{1}{y+5} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

24 Systèmes d'équations



10 min

Corrigé
p. 226

Lycée Hoche, Versailles

Résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{3}{(2x+1)^2} - \frac{4}{3y-5} = 32 \\ \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{5}{3y-5} = 12 \end{cases}$$

25 Mise en équations d'un problème



20 min

Corrigé
p. 227

Lycée Molière, Paris

Un canot automobile met cinq heures pour aller, par voie fluviale, de la ville A à la ville B . En conservant la même vitesse propre, il met sept heures et trente minutes pour le trajet inverse.

- 1** Combien de temps un radeau se déplaçant à la vitesse du courant mettrait-il pour relier les deux villes ?
- 2** Si la vitesse propre du canot augmentait de 1,6 km/h, il mettrait 45 minutes de moins pour revenir de B vers A . Calculer la vitesse propre du canot et celle du courant.

26 Systèmes d'équations



20 min

Corrigé
p. 228

Lycée Carnot, Dijon

Soit le système :

$$(S) \quad \begin{cases} 5x + y = 4 \\ -3x + 12y = -12 \end{cases}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- 1 Sans résoudre, justifier l'existence d'une (ou de plusieurs) solution(s).
- 2 Résoudre le système (S).
- 3 Dédire des questions précédentes la résolution du système :

$$(S') \quad \begin{cases} \frac{5}{x+1} + \frac{1}{y-2} = 4 \\ \frac{-3}{x+1} + \frac{12}{y-2} = -12 \end{cases}$$

27 Systèmes d'équations



20 min

Corrigé
p. 229

Lycée David d'Angers, Angers

- 1 Résoudre le système :

$$\begin{cases} 7x - 4y = 29 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

- 2 Soit le système :

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \frac{10}{3}x - \frac{5}{3}y - 15 = 0 \end{cases}$$

- (a) Le couple $(0 ; -9)$ est-il solution du système ? Même question avec $(1 ; 6)$ et $(1 ; -7)$. Que peut-on en déduire ?
- (b) Donner l'ensemble des solutions du système.

28 Le problème du marché



20 min

Corrigé
p. 230

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Un fermier et son épouse vont au marché échanger leurs poulets pour du bétail au taux de 85 poulets pour un cheval et une vache, 5 chevaux valant exactement autant que 12 vaches.

« John, dit la femme, prenons encore une fois autant de chevaux que nous en avons déjà pris. Nous n'aurons ainsi que 17 chevaux et vaches à nourrir cet hiver. »

« Je crois que nous devrions avoir plus de vaches que cela, dit John. D'ailleurs, si nous avions 2 fois plus de vaches que jusqu'à maintenant, cela nous ferait 19 vaches et chevaux en tout et nous aurions juste assez de poulets à donner en échange. »

Combien les paysans ont-ils apporté de poulets au marché ?

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

1 V/F Équations de droites

Enoncé
p. 202

- a** Faux. Si $x = 1$, $3x + 2 = 5$.
- b** Faux. Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.
- c** Faux, car elles n'ont pas le même coefficient directeur.
- d** Vrai. En effet, si $D : mx + p$ alors $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D .

2 QCM Systèmes d'équations

Enoncé
p. 202

- a** Une solution unique. Les deux premières équations représentent des droites de coefficients directeurs $-\frac{2}{3}$ et 5. Elles ne sont donc pas parallèles.
- b** Une solution unique. Les deux équations représentent des droites de coefficients directeurs 2 et -1 , donc sécantes.
- c** Aucune solution, car si $2x - 3y = 1$, alors $4x - 6y = 2 \neq 3$.
- d** Une infinité de solution, car les deux équations sont proportionnelles et représentent donc la même droite.

3 Équations de droites

Enoncé
p. 202

Lycée Chaptal, Paris

- 1** Puisqu'on vous donne l'équation, ce n'est pas la peine de vous fatiguer. Vous savez que $y = 7x - 29$ est l'équation d'une droite. Il suffit de vérifier qu'elle passe par A et B . Remplaçons donc x et y par les coordonnées de $A : 7 \times 4 - 29 = -1$. Cette égalité est vraie, donc A est bien un point de la droite. De même, $7 \times 3 - 29 = -8$ donc B est bien un point de la droite. Deux points suffisent à déterminer une droite, donc $y = 7x - 29$ est bien une équation de la droite (AB) .
- 2** Une parallèle à (AB) a même coefficient directeur, la droite cherchée aura donc une équation du type :

$$y = 7x + b.$$

Comme elle passe par $C(0 ; -1)$, l'ordonnée à l'origine (b) vaut -1 . D'où l'équation : $y = 7x - 1$.

- 3** E et F n'ont pas la même abscisse, donc la droite (EF) n'est pas parallèle à (Oy) . Elle admet donc une équation du type $y = ax + b$. Comme elle passe par $E(3 ; -2)$ et $F(2 ; 2)$, on obtient les équations :

$$\begin{cases} -2 = 3a + b \\ 2 = 2a + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = a \text{ (en soustrayant)} \\ b = 2 - 2a = 2 + 8 = 10 \text{ (en substituant la valeur de } a) \end{cases}$$

D'où l'équation de $(EF) : y = -4x + 10$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 4 Les droites D et (EF) sont sécantes car elles n'ont pas le même coefficient directeur.

On calcule leur intersection en résolvant le système :

$$\begin{cases} y = 7x - 1 \text{ (équation de } D) \\ y = -4x + 10 \text{ (équation de } (EF)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -11x + 11 \text{ (en soustrayant)} \\ y = 7x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

Le point d'intersection a donc pour coordonnées $G(1 ; 6)$.

4 Équations de droites

→ Enoncé
p. 202

Lycée Carnot, Dijon

La difficulté de cet exercice est de trouver la propriété des médiatrices qu'il faut utiliser. On sait que tout point M de coordonnées $(x ; y)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement s'il est équidistant de A et B , c'est-à-dire : $AM = BM$.

En élevant au carré et en tenant compte de $A(1 ; 0)$ et $B(4 ; 2)$, il vient :

$$\begin{aligned} AM^2 = BM^2 &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 \\ &\Leftrightarrow -2x + 1 = -8x - 4y + 20 \\ &\Leftrightarrow 4y = -6x + 19 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{4} \text{ (car } \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{)}. \end{aligned}$$

Une équation de la médiatrice est donc :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{4}.$$

5 Équations de droites

→ Enoncé
p. 203

Lycée François I^{er}, Le Havre

L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle, donc une équation de l'image de D est de la forme :

$$y = -3x + c.$$

Prenons au hasard un point de D , par exemple le point de coordonnées $(1 ; -2)$, que nous noterons M . L'image de M par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, est le point de coordonnées $(1 + 2 ; -2 + 1)$, donc $(3 ; -1)$.

L'image de D passe nécessairement par ce point, donc $-1 = -3 \times 3 + c$, ce qui donne : $c = 8$.

Une équation de l'image de la droite D par la translation t est donc :

$$y = -3x + 8.$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

6 Équations de droites

Enoncé
p. 203

Lycée Lacordaire, Marseille

- 1 $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur : -1 . Notons $y = -x + c$ son équation.
 $\mathcal{D}$ passe par $A(2 ; 3)$, donc $3 = -2 + c$. On en déduit $c = 5$ et une équation de $\mathcal{D}$ est :

$$y = -x + 5.$$

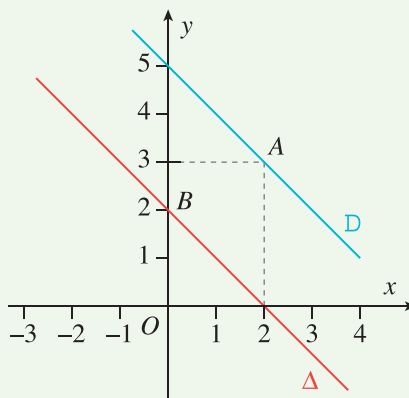
- 2 Puisque Δ est parallèle à $\mathcal{D}$, elle a le même coefficient directeur, donc son équation réduite est du type :

$$y = -x + c.$$

Δ passe par $B(0 ; 2)$, donc $2 = -0 + c$ et $c = 2$. Une équation est donc :

$$y = -x + 2.$$

3



7 Équations de droites

Enoncé
p. 203

Lycée Voltaire, Paris

- 1 A et B n'ont pas la même abscisse, donc (AB) n'est pas verticale. On en déduit qu'elle admet une équation de la forme : $y = ax + b$. En substituant les coordonnées de A et B à x et y dans l'équation, on obtient le système d'inconnues a et b :

$$\begin{cases} -1 = a + b \\ 3 = 3a + b \end{cases}$$

On tire de la première équation $a = -1 - b$. En substituant cette valeur dans la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned} 3 &= 3(-1 - b) + b \iff 3 = -3 - 3b + b \\ &\iff 6 = -2b \\ &\iff -3 = b \end{aligned}$$

et donc $a = -1 - b = 2$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Autre méthode : on calcule directement le coefficient directeur a .

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 + 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

L'équation réduite de (AB) est donc du type $y = 2x + b$. On substitue les coordonnées de A (par exemple) dans l'équation : $-1 = 2.1 + b$ et on retrouve $b = -3$.

Une équation de (AB) est donc :

$$y = 2x - 3.$$

- 2** (d) étant parallèle à (AB) , son équation réduite est de la forme :

$$y = 2x + c.$$

Pour calculer c , on utilise les coordonnées de C . $C \in (d)$ donc :

$$6 = 2 \times 1 + c$$

et donc $c = 4$. Une équation de (d) est donc $y = 2x + 4$.

8 Équations de droites

→ **Enoncé**
p. 203

Lycée du Parc, Lyon

- 1** On veut une droite parallèle à (D) , donc les coefficients directeurs de D et Δ sont égaux. Écrivons provisoirement l'équation réduite de Δ :

$$y = -x + b$$

et calculons b en exprimant que Δ passe par $A(2 ; 1)$:

$$1 = -2 + b \iff 3 = b$$

L'équation réduite de Δ est :

$$y = -x + 3.$$

- 2** Là, il y a une légère astuce. En effet, B et C ont la même abscisse, donc la droite (BC) est verticale. La droite Δ est donc également verticale, donc elle admet une équation du type $x = c$. Comme Δ passe par le point A d'abscisse 2, son équation est :

$$x = 2.$$

9 Coordonnées

→ **Enoncé**
p. 203

Lycée Montesquieu, Bordeaux

- live!** **1** Dans le repère (O, A, B) , on a : $O(0 ; 0)$, $A(1 ; 0)$, $B(0 ; 1)$ et $D(k ; 0)$ (car $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA}$).

- 2** (CD) est parallèle à (AB) . Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1.$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

L'équation réduite de (CD) est donc de la forme : $y = -x + c$. (CD) passe par $D(k ; 0)$, donc $0 = -k + c$, d'où l'équation réduite de (CD) :

$$y = -x + k.$$

C est sur l'axe des ordonnées (car O , B et C sont alignés) donc son ordonnée est l'ordonnée à l'origine de (CD) . On en déduit $C(0 ; k)$.

3 I est le milieu de $[AB]$. Or $A(1 ; 0)$ et $B(0 ; 1)$, d'où :

$$I\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right).$$

J est le milieu de $[CD]$; or $C(0 ; k)$ et $D(k ; 0)$ d'où :

$$J\left(\frac{k}{2} ; \frac{k}{2}\right).$$

Pour calculer les coordonnées de K , intersection des droites (AC) et (BD) , on écrit les équations de ces deux droites.

Le coefficient directeur de (AC) est :

$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{k}{-1} = -k.$$

Comme (AC) passe par $C(0 ; k)$, son ordonnée à l'origine est k , d'où $(AC) : y = -kx + k$.

Le coefficient directeur de (BD) est :

$$\frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{-1}{k}.$$

Comme (BD) passe par $B(0 ; 1)$, son ordonnée à l'origine est 1 , d'où $(BD) : y = \frac{-1}{k}x + 1$. On résout le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -kx + k \\ y = \frac{-1}{k}x + 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} -kx + k = \frac{-1}{k}x + 1 \\ y = -kx + k \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \left(\frac{1}{k} - k\right)x = 1 - k \\ y = -kx + k \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{1 - k^2}{k}x = 1 - k \\ y = -kx + k \end{cases} \end{aligned}$$

On sait que $1 - k^2 = (1 - k)(1 + k)$, on obtient donc :

$$x = \frac{k(1 - k)}{1 - k^2} = \frac{k(1 - k)}{(1 - k)(1 + k)} = \frac{k}{1 + k}$$

et donc

$$y = -kx + k = \frac{-k^2}{1 + k} + \frac{k + k^2}{1 + k} = \frac{k}{1 + k}.$$

On conclut :

$$K\left(\frac{k}{1+k}; \frac{k}{1+k}\right).$$

Remarquons que les valeurs gênantes $k = 0$, $k = 1$ ou $k = -1$ sont impossibles :

- Si $k = 0$, alors $\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ donc $O = D$, mais alors C , B et D sont alignés, ce qui n'est pas possible car $ABCD$ est un trapèze.
- Si $k = 1$, alors $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}$ donc $D = A$, ce qui contredit également la définition de $ABCD$.
- Si $k = -1$, alors $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$ signifie que O est le milieu de $[AD]$. O serait également, d'après la question 2, le milieu de $[BC]$, et donc $ABCD$ serait un parallélogramme, ce qui n'est pas possible.

- 4 Pour les points O , I , J et K , l'ordonnée est égale à l'abscisse, donc ces quatre points sont sur la droite d'équation $y = x$.

10 Équations de droites

Enoncé
p. 204

Lycée Fénélon, Paris

- 1 L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle, donc l'image de (D_1) est une droite dont l'équation est de la forme : $y = x + c$. Pour calculer c , choisissons au hasard un point de D_1 .

Appelons M le point de coordonnées $(1; -1)$, qui est bien sur (D_1) .

Son image par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1 - 1; -1 + 2)$, soit : $(0; 1)$.

On obtient donc $1 = 0 + c$, soit : $c = 1$. Une équation de l'image de (D_1) est donc :

$$y = x + 1.$$

- 2 De même, l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle. Une équation de l'image de (D_2) est donc de la forme :

$$y = \frac{1}{2}x + c.$$

Pour calculer c , on choisit au hasard un point de D_2 .

Notons N le point de coordonnées $(1; 1)$, qui est sur (D_2) . Pour calculer les coordonnées de son image $N'(x; y)$ par la symétrie de centre Ω , écrivons que Ω est le milieu de $[NN']$:

$$\overrightarrow{NN'} = 2\overrightarrow{N\Omega}.$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

Les coordonnées des deux vecteurs sont : $\overrightarrow{NN'} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{N\Omega} \begin{pmatrix} 2(-1-1) \\ 2(2-1) \end{pmatrix}$,
soit $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. On obtient le système :

$$\begin{cases} x-1 = -4 \\ y-1 = 2 \end{cases}$$

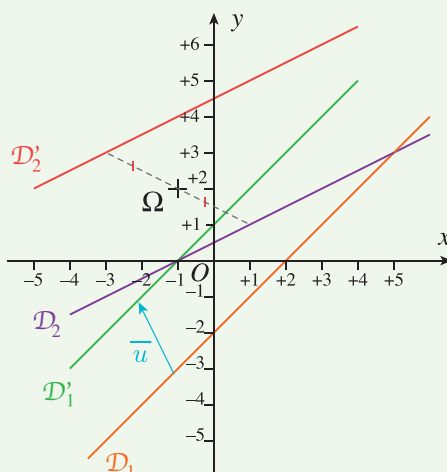
qui fournit les coordonnées $(-3; 3)$ de N' .

L'image de $(\mathcal{D}_2)$ passe par N' , donc :

$$3 = \frac{1}{2} \times (-3) + c,$$

d'où $c = \frac{9}{2}$. On obtient une équation de l'image de $\mathcal{D}_2$:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}.$$



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Équations de droites

Lycée Hoche, Versailles

➔ Enoncé
p. 204

Le mieux est de calculer directement les équations de $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.

- $\mathcal{D}_1$ a un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$: utilisez la méthode des « petits pas ». Lorsqu'on avance sur $\mathcal{D}_1$, entre le moment où l'on croise l'axe des abscisses et celui où l'on croise celui des ordonnées, on fait trois « pas » vers la droite et cinq « pas » vers le haut.
Son coefficient directeur est donc $\frac{5}{3}$.

On lit sur la figure l'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection de (Oy) et de $\mathcal{D}_1$) : $+5$.

D'où l'équation réduite de $\mathcal{D}_1$:

$$y = \frac{5}{3}x + 5.$$

Ce qui correspond à l'équation 6 de l'énoncé.

- $\mathcal{D}_2$ passe par les points de coordonnées $(-3 ; 0)$ et $(1 ; 2)$. Donc (appliquez la méthode des « petits pas »), elle admet un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, et comme coefficient directeur : $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

L'équation réduite de $\mathcal{D}_2$ est donc de la forme :

$$y = \frac{1}{2}x + c.$$

Comme elle passe par le point de coordonnées $(-3 ; 0)$, on peut déterminer c en remplaçant dans l'équation :

$$0 = -\frac{3}{2} + c \iff c = \frac{3}{2}.$$

Finalement $\mathcal{D}_2$ admet pour équation :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Il s'agit de l'équation 5.

- $\mathcal{D}_3$ admet un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc son coefficient directeur est -1 . L'ordonnée à l'origine vaut $+3$.
L'équation réduite de $\mathcal{D}_3$ est donc :

$$y = -x + 3.$$

$\mathcal{D}_3$ ne correspond donc à aucune des équations de l'énoncé.

12 Équations de droites

➔ **Énoncé**
p. 205

Lycée Condorcet, Paris

- 1** (a) Si D_m doit passer par A, on doit avoir :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2m-1}{m-3} \times 1 + \frac{-7m+6}{m-3} \iff 1 = \frac{2m-1-7m+6}{m-3} \\ &\iff 1 = \frac{-5m+5}{m-3} \\ &\iff m-3 = -5m+5 \\ &\iff 6m = 8 \\ &\iff m = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

Donc :

$$D_m : y = -x + 2.$$

- (b) Par la même méthode, on remplace x et y par 0 dans l'équation, et on obtient $-7m + 6 = 0$, donc $m = \frac{6}{7}$.

$$D_m : y = -\frac{1}{3}x.$$

- (c) D_m est parallèle à l'axe des abscisses quand son coefficient directeur est nul, donc quand $\frac{2m-1}{m-3} = 0$, d'où : $m = \frac{1}{2}$.

$$D_m : y = -1.$$

- 2** (a) L'équation réduite de D_m est du type $y = ax + b$ (et non $x = c$), il s'agit *toujours* d'une droite dite « oblique », c'est-à-dire qu'elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

- (b) D_m et Δ sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux, il vient :
- $$\frac{2m-1}{m-3} = 3$$
- $$\iff 2m-1 = 3m-9$$
- $$\iff 8 = m.$$

- (c) D_m admet -2 comme coefficient directeur si $\frac{2m-1}{m-3} = -2$ et $m \neq 3$. On obtient :

$$(2m-1) = -2 \times (m-3)$$

$$2m-1 = -2m+6$$

$$4m = 7$$

$$m = \frac{7}{4}.$$

- 3** Une méthode simple (et qui marche !), consiste à chercher l'intersection de deux droites particulières, et à vérifier que le point ainsi trouvé est sur toutes les droites D_m .

Nous vous proposons $m = 2$ et $m = 4$, ce qui permet d'avoir des dénominateurs $m - 3$ peu encombrants. Les équations pour ces droites sont :

- $D_2 : y = -3x + 8$

- $D_4 : y = 7x - 22$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Il n'y a plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -3x + 8 \\ y = 7x - 22 \end{cases} &\iff \begin{cases} -3x + 8 = 7x - 22 \\ y = -3x + 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 30 = 10x \\ y = -3x + 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les droites D_2 et D_4 se coupent au point $K(3 ; -1)$. Vérifions que ce point appartient bien à toutes les droites D_m . Autrement dit, on vérifie que les coordonnées $(3 ; -1)$ sont bien solutions de l'équation de la droite :

$$\frac{2m-1}{m-3} \times 3 + \frac{-7m+6}{m-3} = \frac{6m-3-7m+6}{m-3} = -1 ,$$

donc K appartient bien à D_m , quel que soit m .

On peut utiliser une méthode plus « originale » en réorganisant l'équation de la droite D_m , non plus comme une équation en x et en y , mais comme une équation en m , ce qui donne, au lieu de :

$$y = \frac{2m-1}{m-3}x + \frac{-7m+6}{m-3}$$

l'équation :

$$(2m-1)x + (3-m)y - 7m + 6 = 0.$$

On développe :

$$2mx - x + 3y - my - 7m + 6 = 0$$

et on regroupe les termes :

$$(2x - y - 7)m - x + 3y + 6 = 0.$$

Cette égalité doit être vraie *quel que soit le nombre* $m \neq 3$. On est en présence d'une fonction affine de m : $m \mapsto am + b$, qui est toujours nulle. Les coefficients a et b sont donc égaux à 0. On est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ -x + 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

Vous pouvez procéder par combinaison et résoudre ce système. On obtient encore les coordonnées de $K(3 ; -1)$.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

13 Systèmes d'équations

Enoncé
p. 205

Lycée Voltaire, Paris

- 1 Commençons par nous débarrasser des dénominateurs, en multipliant la première ligne par 6 et la deuxième par 2 :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4x + 3y = 6 \\ 3x - 2y - 5x + 3y = 6 \end{cases}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} -2x + 6y = 6 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$$

En ôtant la deuxième ligne à la première, on élimine x :

$$\begin{cases} 5y = 0 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$$

Il vient $y = 0$ et $x = -3$. Conclusion :

$$S = \{(-3, 0)\}.$$

- 2 Effectuons d'abord les produits en croix dans la première ligne.

$$\begin{cases} 5x = 7y \\ 3x - y = 24 \end{cases}$$

On utilise la deuxième ligne, sous la forme : $y = 3x - 24$, pour procéder par substitution :

$$\begin{cases} 5x = 7(3x - 24) \\ y = 3x - 24 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} 5x - 21x = -7 \times 3 \times 8 \\ y = 3x - 24 \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{cases} x = \frac{21}{2} \\ y = \frac{63}{2} - \frac{48}{2} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\text{et } S = \left\{ \left(\frac{21}{2} ; \frac{15}{2} \right) \right\}.$$

14 Mise en équations d'un problème

Enoncé
p. 206

Lycée Fragonard, L'Isle-Adam

Notons x le nombre de filles et y celui de garçons qu'il y a au départ. Il y a à ce moment-là deux fois plus de garçons que de filles, donc $y = 2x$. Si 6 garçons partent, il en reste $y - 6$. Si 6 filles arrivent, il y en a alors $x + 6$. Alors, il y a deux fois plus de filles, c'est-à-dire que $x + 6 = 2(y - 6)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Il ne reste plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + 6 = 2(y - 6) \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ x + 6 = 2y - 12 \end{cases}$$

Par substitution :

$$\begin{cases} y = 2x \\ x = 2(2x) - 18 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ -3x = -18 \end{cases}$$

On obtient facilement $x = 6$ et $y = 12$. Comme il s'agit d'un problème « concret », ne donnez pas un ensemble de solutions ; écrivez plutôt : « Il y avait au départ 6 filles et 12 garçons. »

15 Systèmes d'équations

Enoncé
p. 206

Lycée Lamartine, Paris

- 1** Puisque le carré de $x + y$ vaut 9, on en déduit que $x + y = 3$ ou que $x + y = -3$. Le système proposé peut donc être séparé en deux « sous-systèmes » :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Les solutions du système de départ sont celles de l'un ou de l'autre de ces deux sous-systèmes.

- 2** Résolvons chaque système par substitution. Pour le premier, on écrit :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x + 2(-x - 3) = 7 \\ y = -x - 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2x - 6 = 7 \\ y = -x - 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 13 \\ y = -16 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour le second système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x + 2(-x + 3) = 7 \\ y = -x + 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2x + 6 = 7 \\ y = -x + 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$S = \{(13 ; -16), (1 ; 2)\}.$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

16 Systèmes d'équations

Enoncé
p. 206

Lycée Jean Monnet, Franconville

Appelons x le nombre de places à 21 € et y le nombre de places à 26 €. Des renseignements de l'énoncé, on tire le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 21x + 26y = 3\,300 \end{cases}$$

On peut procéder par substitution :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 150 - y \\ 21(150 - y) + 26y = 3\,300 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 150 - y \\ 3150 - 21y + 26y = 3\,300 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 150 - y \\ 5y = 150 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 30 \\ x = 120 \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc 30 places à 26 € et 120 places à 21 €.

17 Systèmes d'équations

Enoncé
p. 206

Lycée Notre-Dame, Saint-Nazaire

Notons x le premier capital, et y le second. A dix pour cent, x rapporte $\frac{10}{100}x$; de même, y rapporte $\frac{8}{100}y$. D'après les renseignements de l'énoncé, on obtient le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{10}{100}x - \frac{8}{100}y = 200 \\ \frac{8}{100}x - \frac{10}{100}y = 70 \end{cases} &\iff \begin{cases} 10x - 8y = 20\,000 \\ 8x - 10y = 7\,000 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 36y = 90\,000 & L_1 \leftarrow 8L_1 - 10L_2 \\ 8x - 10y = 7\,000 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2\,500 \\ 8x = 32\,000 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2\,500 \\ x = 4\,000 \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux capitaux sont respectivement de 4 000 € et de 2 500 €.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

18 Systèmes d'équations

Enoncé
p. 206

Lycée Auguste Renoir, Asnières-sur-Seine

On résout par combinaisons :

$$\begin{cases} 8y = 0 \\ -2x + 2\sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 + \sqrt{2}L_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ -2x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } S = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 \right) \right\}.$$

19 Systèmes d'équations

Enoncé
p. 207

Lycée Claude Monet, Paris

Nous allons résoudre le premier système par *substitution* :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x - 1 = y \end{cases} \\ \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 5(3x - 1) = 12 \\ 3x - 1 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 15x - 5 = 12 \\ 3x - 1 = y \end{cases} \\ \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 17x = 17 \\ 3x - 1 = y \end{cases} \\ \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

La solution du système est donc (1 ; 2)

Le système suivant sera, pour changer, résolu par *combinaison* :

$$\begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ -10x + 4y = -4 \quad L_2 \leftarrow -2 \times L_2 \end{cases} \\ \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ -7x = -28 \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \\ \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 12 - 4y = -24 \\ x = 4 \end{cases} \\ \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -4y = -36 \\ x = 4 \end{cases} \\ \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 9 \\ x = 4 \end{cases}$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

La solution du système est donc $(4 ; 9)$

Le dernier système sera considéré d'abord comme un système en x^2 et y^2 . Nous en déduirons ensuite les valeurs de x et y . Si l'on pose $X = x^2$ et $Y = y^2$, on se retrouve avec le système que l'on vient de résoudre :

$$\begin{cases} 3X - 4Y = -24 \\ 5X - 2Y = 2 \end{cases}$$

Donc, $X = 4$ et $Y = 9$. D'une part $x^2 = 4$ pour $x = 2$ ou $x = -2$, d'autre part, $y^2 = 9$ quand $y = 3$ ou $y = -3$. On obtient donc l'ensemble des solutions :

$$S = \{(-2 ; -3), (-2 ; 3), (2 ; -3), (2 ; 3)\}.$$

20 Systèmes d'équations

➔ Enoncé
p. 207

Lycée Jacques Monod, Clamart

Posons $X = x^2$ et $Y = \frac{3}{y+1}$ (vous pouvez poser $Y = \frac{1}{y+1}$ mais $\frac{3}{y+1}$ permet d'obtenir des coefficients plus simples.) Le système devient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2X - 3Y = 15 \\ 3X - 8Y = 19 \end{cases} &\iff \begin{cases} 6X - 9Y = 45 & L_1 \leftarrow 3L_1 \\ 6X - 16Y = 38 & L_2 \leftarrow 2L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 7Y = 7 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 6X - 16Y = 38 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir $Y = 1$ et $X = 9$. $x^2 = 9$, donc x vaut 3 ou -3 .

$\frac{3}{y+1} = 1$, donc $y+1 = 3$ et $y = 2$. On obtient donc deux solutions :

$$S = \{(-3 ; 2), (3 ; 2)\}.$$

21 Système non linéaire

➔ Enoncé
p. 207

Lycée Arago, Paris

Notons que la valeur $x = 0$ est exclue, on peut donc poser $X = \frac{1}{x}$ et $Y = y^2$ comme indiqué, et on obtient un système d'équations habituel :

$$\begin{cases} 3X - 5Y = 2 \\ 7X + 3Y = 12 \end{cases}$$

Procédons par substitution. On écrit X en fonction de Y à l'aide de la première équation, et on remplace dans la seconde :

$$\begin{cases} X = \frac{5}{3}Y + \frac{2}{3} \\ 7\left(\frac{5}{3}Y + \frac{2}{3}\right) + 3Y = 12 \end{cases}$$

En simplifiant la seconde équation et en multipliant les deux membres par 3 pour se débarrasser des dénominateurs, il vient :

$$\begin{cases} X = \frac{5}{3}Y + \frac{2}{3} \\ 44Y = 22 \end{cases}$$

d'où enfin :

$$\begin{cases} X = \frac{3}{2} \\ Y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le problème de départ équivaut maintenant au système :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

que l'on résout facilement :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $S = \left\{ \left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$.

22 Droites concourantes

 **Enoncé**
p. 207

Lycée St Thomas d'Aquin, Paris

- 1** Ré-écrivons les équations sous la forme $y = ax + b$. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} y = 5x + 13 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{2} \text{ (tiens, tiens !)} \end{cases}$$

On obtient deux équations de droites non parallèles, puisque les coefficients directeurs sont différents ($5 \neq -\frac{2}{3}$). Les deux droites se coupent en un unique point, dont les coordonnées donnent l'unique solution du système.

- 2** On substitue $y = 5x + 13$ dans $2x + 3y = 5$, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} y = 5x + 13 \\ 2x + 15x + 39 = 5 \end{cases}$$

qui donne facilement :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

d'où l'ensemble des solutions : $\{(-2; 3)\}$.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

- 3** Visiblement, D_1 , D_2 , et D_3 ne sont pas parallèles (les coefficients directeurs sont tous distincts). Elles sont concourantes si elles ont un point commun. Or, les calculs précédents ont montré que D_1 et D_2 n'admettaient qu'un seul point commun $M(-2; 3)$. Il suffit de vérifier si ce point appartient à D_3 . On remplace x par -2 et y par 3 dans $y = -x + 1$, on obtient une égalité vraie. On en déduit que les trois droites sont bien concourantes.

23 Systèmes d'équations

Lycée Hoche, Versailles

Enoncé
p. 208

Nous allons résoudre le système par combinaisons :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \quad \begin{cases} 2u - 3v = 4 \\ 17v = -17 \end{cases} \iff \begin{cases} v = -1 \\ 2u + 3 = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} v = -1 \\ u = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où la solution : $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. En posant $u = \frac{1}{x-3}$ et $v = \frac{1}{y+5}$, et en multipliant la deuxième ligne par 2, on transforme le deuxième système proposé en le premier. Les solutions vérifient donc $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{2}$, soit $x-3 = 2$ donc $x = 5$, et $\frac{1}{y+5} = -1$, soit $y+5 = -1$ et $y = -6$. L'ensemble des solutions s'écrit donc :

$$S = \{(5; -6)\}.$$

24 Systèmes d'équations

Lycée Hoche, Versailles

Enoncé
p. 208

Posons tout de suite : $X = \frac{1}{(2x+1)^2}$ et $Y = \frac{1}{3y-5}$. Le système devient :

$$\begin{cases} 3X - 4Y = 32 \\ 2X - 5Y = 12 \end{cases} \iff L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \quad \begin{cases} 7Y = 28 \\ 2X - 5Y = 12 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y = 4 \\ 2X = 32 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y = 4 \\ X = 16 \end{cases}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On obtient enfin : $\frac{1}{(2x+1)^2} = 16$ et $\frac{1}{3y-5} = 4$. Cherchons x .

$$(2x+1)^2 = \frac{1}{16} \text{ donc } 2x+1 = \frac{1}{4} \text{ ou } 2x+1 = -\frac{1}{4}.$$

Ainsi, $x = -\frac{3}{8}$ ou $x = -\frac{5}{8}$. Cherchons y .

$$3y-5 = \frac{1}{4} \text{ donc } y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + 5 \right) = \frac{7}{4}.$$

Conclusion :

$$S = \left\{ \left(-\frac{3}{8}; \frac{7}{4} \right), \left(-\frac{5}{8}; \frac{7}{4} \right) \right\}.$$

25 Mise en équations d'un problème

Enoncé
p. 208

Lycée Molière, Paris

- 1 Il est clair d'après l'énoncé que l'aller s'est effectué vers l'aval, alors que le retour était vers l'amont. À l'aller, il faut ajouter la vitesse de la rivière à la vitesse propre du bateau alors qu'au retour, il faut la soustraire. Notons v la vitesse du canot et v_R la vitesse de la rivière. On note t_1 le temps à l'aller, t_2 le temps au retour, et t le temps mis par le radeau. Le radeau se déplace à la vitesse v_R .

La seule constante de l'exercice, c'est la distance entre A et B . On peut l'écrire de trois façons différentes : $(v + v_R)t_1$, $(v - v_R)t_2$ et $v_R t$. On en déduit :

$$v + v_R = \frac{v_R t}{t_1} \text{ et } v - v_R = \frac{v_R t}{t_2}.$$

Soustrayons ces deux égalités membre à membre pour éliminer v .

$$2v_R = \frac{v_R t}{t_1} - \frac{v_R t}{t_2}.$$

En simplifiant par v_R et en mettant t en facteur :

$$2 = t \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right).$$

On calcule simplement :

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7,5} = \frac{3}{15} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}.$$

On en déduit : $t = 30$. Le radeau met trente heures pour aller de A à B (remarque : il ne peut pas faire le trajet inverse, n'est-ce-pas ?)

- 2 En notant t_3 le nouveau temps mis au retour, on obtient :

$$(v + 1,6 - v_R)t_3 = v_R t \text{ donc } v - v_R + 1,6 = \frac{v_R t}{t_3}.$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On sait que $v - v_R = \frac{v_R t}{t_2}$, on a donc :

$$\frac{v_R t}{t_2} + 1,6 = \frac{v_R t}{t_3}.$$

En factorisant :

$$1,6 = v_R t \left(\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_2} \right).$$

Calculons :

$$\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{6,75} - \frac{1}{7,5} = \frac{4}{27} - \frac{4}{30} = \frac{40}{270} - \frac{36}{270} = \frac{4}{270}.$$

Il vient :

$$v_R = \frac{1,6 \times 270}{4 \times 30} = 3,6 \text{ km/h.}$$

Pour trouver la vitesse du canot, on utilise

$$(v + v_R)t_1 = v_R t \iff 5v + 18 = 108 \iff 5v = 90 \iff v = 18.$$

Le canot se déplace à 18 km/h.

26 Systèmes d'équations

Enoncé
p. 208

Lycée Carnot, Dijon

- 1 La première équation équivaut à $y = -5x + 4$ et la seconde à $y = \frac{1}{4}x - 1$. La résolution du système équivaut à la recherche de l'intersection des deux droites d'équations $y = -5x + 4$ et $y = \frac{1}{4}x - 1$. Ces droites n'ayant pas le même coefficient directeur, elles sont sécantes : elles ont un unique point d'intersection, donc le système admet une solution unique.

- 2 Par substitution :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 4 - 5x \\ -3x + 12(4 - 5x) = -12 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 4 - 5x \\ -63x + 48 = -12 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 4 - 5x \\ x = \frac{60}{63} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui donne $x = \frac{20}{21}$ et $y = -\frac{16}{21}$. D'où l'ensemble $S = \left\{ \left(\frac{20}{21} ; -\frac{16}{21} \right) \right\}$.

- 3 Il suffit de poser $X = \frac{1}{x+1}$ et $Y = \frac{1}{y-2}$ pour se ramener au système précédent. On obtient :

$$\begin{aligned} x + 1 = \frac{21}{20} &\iff x = \frac{1}{20}, \\ y - 2 = -\frac{21}{16} &\iff y = \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$S' = \left\{ \left(\frac{1}{20} ; \frac{11}{16} \right) \right\}.$$

27 Systèmes d'équations

Enoncé
p. 209

Lycée David d'Angers, Angers

1 Pour résoudre le système :

$$\begin{cases} 7x - 4y = 29 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

on peut procéder par substitution : la seconde équation donne $y = 2x - 1$,
et on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} 7x - 4(2x - 1) = 29 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 4 = 29 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x = -25 \\ y = -51 \end{cases}$$

La solution du système est donc $(-25 ; -51)$.

2 (a) En remplaçant $(x ; y)$ par $(0 ; -9)$ dans le système, on obtient :

$$\begin{cases} 9 = 9 \\ 15 - 15 = 0 \end{cases}$$

ce qui est vrai, donc $(0 ; -9)$ est solution du système.

Essayons maintenant $(1 ; 6)$:

$$\begin{cases} 2 - 6 = 9 \\ \frac{20}{3} - 10 - 15 = 0 \end{cases}$$

ce qui est évidemment faux. $(1 ; 6)$ n'est pas solution.

Avec $(1 ; -7)$:

$$\begin{cases} 2 + 7 = 9 \\ \frac{10}{3} + \frac{35}{3} - 15 = 0 \end{cases}$$

Ces deux égalités sont vraies (penser à $15 = \frac{45}{3}$) donc $(1 ; -7)$ est solution du système.

On sait qu'un tel système se ramène au problème de l'intersection de deux droites données par leurs équations. Il y a au moins deux solutions, donc au moins deux points d'intersection. Cela signifie que les deux droites sont confondues, et qu'en fait les équations du système sont proportionnelles. On le vérifie facilement en multipliant la première équation par $\frac{5}{3}$. On obtient la seconde.

Le système est donc équivalent à la seule équation : $2x - y = 9$.

(b) Écrite sous la forme $y = 2x - 9$, on reconnaît une équation de droite. Les solutions sont donc les coordonnées des points de cette droite. Ces coordonnées sont sous la forme $(x ; 2x - 9)$. On écrit :

$$S = \{(x ; 2x - 9), \quad x \in \mathbb{R}\}.$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 6

28 Le problème du marché

Enoncé
p. 209

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

La première phrase nous dit que (le symbole « = » est ici abusif, mais cela simplifie les notations) :

$$85 \text{ poulets} = 1 \text{ cheval} + 1 \text{ vache} \quad \text{et} \quad 5 \text{ chevaux} = 12 \text{ vaches.}$$

On en déduit alors :

$$5 \times 85 \text{ poulets} = 5 \text{ chevaux} + 5 \text{ vaches}$$

soit :

$$425 \text{ poulets} = 17 \text{ vaches} \quad \text{soit} \quad 1 \text{ vache} = 25 \text{ poulets.}$$

Et donc,

$$5 \text{ chevaux} = 12 \text{ vaches} = 12 \times 25 \text{ poulets} = 300 \text{ poulets}$$

donc :

$$1 \text{ cheval} = 60 \text{ poulets.}$$

Notons maintenant :

- x le nombre de chevaux que le couple a déjà achetés ;
- y le nombre de vaches que le couple a déjà achetées.

Le dialogue entre le mari et la femme donne alors le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 17 & (L_1) \\ x + 2y = 19 & (L_2) \end{cases}$$

$$2(L_2) - (L_1) \text{ donne : } 3y = 38 - 17, \text{ soit } y = 7.$$

$$2(L_1) - (L_2) \text{ donne : } 3x = 34 - 19, \text{ soit } x = 5.$$

Le couple a donc déjà acheté 5 chevaux et 7 vaches.

Ainsi, s'il achète 7 vaches, il lui faut :

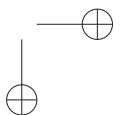
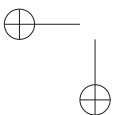
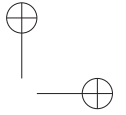
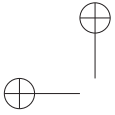
$$7 \times 25 \text{ poulets} = 175 \text{ poulets.}$$

Les paysans ont donc amené 175 poulets.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Chapitre

7

Fonctions

Plan du chapitre

1. Rappels de collège
2. Variations
3. Notion de parité

Exercice type

Lycée Jean Monnet, Franconville

Soit :

$$f : x \mapsto \frac{1+x^2}{x}.$$

- 1 Quel est l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de f ?
- 2 Quelle est l'image de -3 ? Quel sont les antécédents de 2 ?
- 3 Montrer que f est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$ et strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$. En déduire le tableau des variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
- 4 Représenter le graphe de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 5 Déterminer graphiquement les solutions de $f(x) = 4$.

Voir corrigé page 238

1 Rappels de collège

1.1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Définition 1

On considère un ensemble $\mathcal{D}$ inclus dans $\mathbb{R}$.

Une *fonction* définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un objet mathématique qui, à tout nombre x de $\mathcal{D}$, associe un unique réel, noté $f(x)$.

- $f(x)$ est l'*image* de x par f .
- $\mathcal{D}$ est l'*ensemble de définition* de f .

On note : $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

Exemples

- La fonction qui, à un nombre, associe son carré est la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x^2$$

Cela signifie notamment que « pour tout x réel, $f(x) = x^2$ ».

- Si x représente la longueur d'un côté d'un carré alors le périmètre de ce carré est donné par la fonction $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ car le périmètre d'un carré est obtenu en

$$x \mapsto 4x$$

multipliant par 4 la longueur d'un côté.

Remarque : dans certains énoncés, on donne une expression littérale et on demande de déterminer le domaine de définition d'une fonction.

Dans ce cas, on cherche les valeurs pour lesquelles les images seraient calculées à l'aide de l'expression littérale.

Il s'agit de trouver le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ pour lequel les nombres sont « calculables » à l'aide de l'expression.

Exemple : le nombre $\frac{1}{x-2}$ est défini pour tout nombre x différent de 2.

En effet, si $x = 2$, le dénominateur de l'écriture fractionnaire est égal à 0, ce qui n'est pas possible.

Si l'on demande de « déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{1}{x-2}$ », le domaine de définition sera alors $\mathbb{R} - \{2\}$; c'est l'ensemble qui contient tous les nombres réels ($\mathbb{R}$), sauf le réel 2.

On peut aussi noter : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (on lit alors « $\mathbb{R}$ privé du nombre 2 »).

Parfois, dans des exercices mettant en jeu des situations concrètes, on choisit le domaine de définition selon des connaissances de l'objet étudié. Par exemple, si la variable représente une longueur, le domaine de définition ne contient pas les réels négatifs. Dans certains cas, le domaine est imposé par l'énoncé. On peut ainsi considérer par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie seulement sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Le domaine de définition est souvent noté $\mathcal{D}$ (quand il n'y a qu'une seule fonction dans l'exercice) ou $\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g, \dots$ s'il y a plusieurs fonctions $f, g, \dots$ dans l'exercice.

1.2 Image et antécédent(s)

Si x est un réel, le réel $f(x)$ est son *image*. Le réel x est un antécédent de $f(x)$. Par exemple, si l'on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$, 4 est l'image de 2 car $2^2 = 4$, et -3 est un antécédent de 9 (car $(-3)^2 = 9$).

Remarquez bien le vocabulaire utilisé : « son » image, « un » antécédent. En effet, $f(x)$ peut avoir plusieurs antécédents (x , mais peut-être aussi d'autres réels). Cependant, l'image de x est unique, s'il en a une.

1.3 Tableau de valeurs

Un *tableau de valeurs* est un tableau à deux lignes :

- sur la 1^{re} sont indiquées les valeurs des x dont on veut trouver l'image ;
- sur la 2^{de} sont reportées les images des x .

Exemple : on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -x^2 + 2$. Alors, le tableau suivant est un tableau de valeurs pour des valeurs entières de x comprises entre -3 et 3 :

Valeurs de x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Valeurs de $f(x)$	-7	-2	1	2	1	-2	-7

Explications : quand $x = -3$, pour trouver son image par la fonction f , on remplace x par -3 dans l'expression, ce qui donne :

$$f(-3) = -(-3)^2 + 2 = -9 + 2 = -7.$$

On fait de même pour les autres valeurs de x .

1.4 Courbe représentative d'une fonction

Définition 2

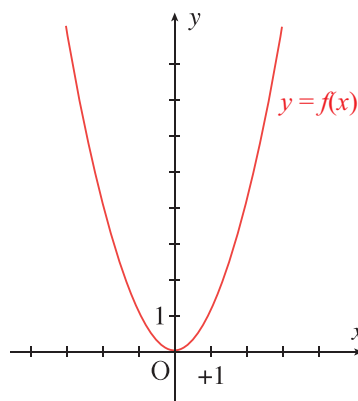
La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble de tous les points qui ont pour coordonnées $(x ; f(x))$ quand x appartient au domaine de définition de f .

Ainsi, à partir d'un tableau de valeurs, on peut représenter *sommairement* une fonction.

Exemple : Voici un tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[-3 ; 3]$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Ce tableau permet de tracer la courbe ci-contre.



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Variations

2.1 Fonctions croissantes, décroissantes et constantes

Définition 3 : fonction croissante

Une fonction f est *croissante* sur un intervalle lorsque pour tout élément u et v de l'intervalle, si $u \leq v$, alors $f(u) \leq f(v)$.

Remarque : cela signifie que les nombres de l'intervalle sont rangés dans le même ordre que leurs images par la fonction f . Lorsque, dans la définition, on remplace les deux inégalités larges ($\leq$) par deux inégalités strictes ($<$), on définit ce qu'est une fonction *strictement* croissante.

Définition 4 : fonction décroissante

Une fonction f est *décroissante* sur un intervalle lorsque pour tout élément u et v de l'intervalle, si $u \leq v$, alors $f(u) \geq f(v)$.

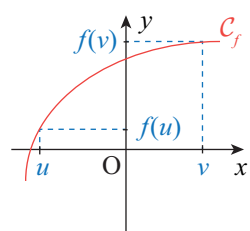
Remarque : lorsque, dans la définition, on remplace les deux inégalités larges par deux inégalités strictes, on définit ce qu'est une fonction *strictement* décroissante.

Définition 5 : fonction constante

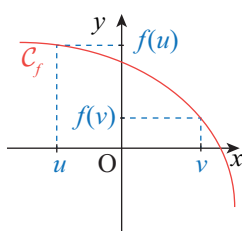
Une fonction est *constante* sur un intervalle lorsqu'il existe un réel a tel que pour tout x de l'intervalle, $f(x) = a$.

Autrement dit, une fonction constante prend toujours la même valeur.

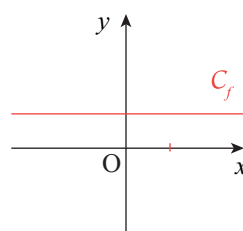
Remarque : une fonction est constante si et seulement si elle est à la fois croissante et décroissante.



Fonction croissante



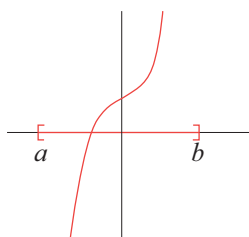
Fonction décroissante



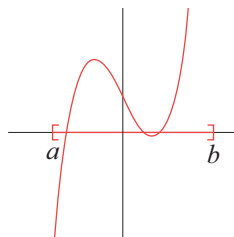
Fonction constante

Définition 6 : fonction monotone

Une fonction qui est soit croissante, soit décroissante sur un intervalle est appelée une fonction *monotone*.



Fonction monotone sur $[a; b]$



Fonction non monotone sur $[a; b]$

⚠ ATTENTION

Il ne suffit pas de prendre deux points au hasard dans l'intervalle et de les comparer. Par exemple, pour $f : x \mapsto x^2 - 5x$, il ne s'agit pas de calculer $f(2)$ et $f(4)$, puis de voir lequel des deux est le plus grand. Il s'agit de déterminer le signe de l'expression $f(v) - f(u)$ en supposant que $v > u$.

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 - 5x$.

Soient u et v deux nombres appartenant à $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ tels que $u < v$. Alors :

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &= (v^2 - 5v) - (u^2 - 5u) \\ &= v^2 - 5v - u^2 + 5u \\ &= v^2 - u^2 - 5v + 5u \\ &= (v - u)(v + u) - 5(v - u) \\ &= (v - u)(v + u - 5). \end{aligned}$$

Comme $-1 \leq u < v \leq \frac{5}{2}$, on voit que $v - u > 0$ et $v + u - 5 < 0$.

On en déduit que $f(v) - f(u) < 0$, et que f est décroissante sur l'intervalle $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$. On a prouvé une inégalité *stricte* entre $f(v)$ et $f(u)$, donc on peut ajouter que f est *strictement* décroissante sur $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$.

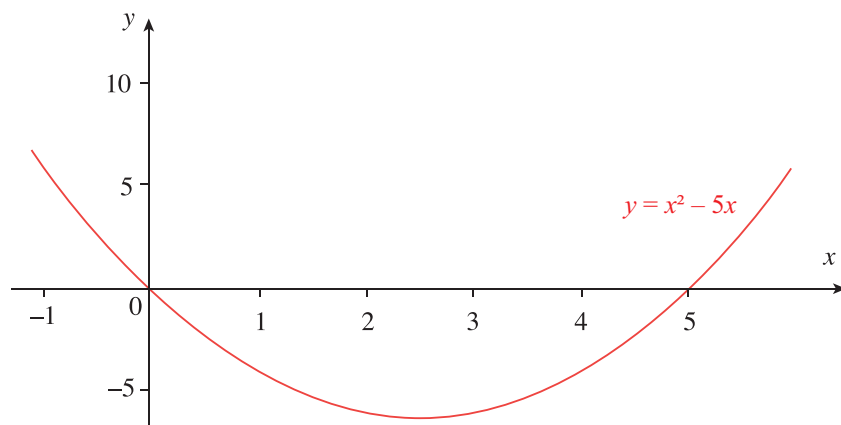
Maintenant, si on prend u et v sur $\left[\frac{5}{2}; 6\right]$, toujours avec $x < x'$, alors $v + u - 5 > 0$ donc $f(v) - f(u) > 0$, ce qui signifie que f est *strictement* croissante sur $\left[\frac{5}{2}; 6\right]$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On peut représenter graphiquement la fonction f comme sur le graphique suivant.



2.2 Maximum et minimum d'une fonction

Définitions 7

Le *maximum* d'une fonction f sur son domaine de définition est la valeur la plus haute atteinte par la fonction.

Le *minimum* est la plus basse.

Exemple : reprenons la fonction $f : x \mapsto x^2 - 5x$ dont on a trouvé les variations dans le paragraphe précédent.

Elle est décroissante sur $\left[-1 ; \frac{5}{2}\right]$ puis croissante sur $\left[\frac{5}{2} ; 6\right]$ donc l'image de $\frac{5}{2}$ est le minimum : c'est la plus petite valeur atteinte par $f(x)$ sur $[-1 ; 6]$.

$f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4}$ donc $-\frac{25}{4}$ est le minimum de f sur $[-1 ; 6]$.

Pour avoir la valeur du maximum, il suffit de calculer $f(-1)$ et $f(6)$:

$$f(-1) = (-1)^2 - 5 \times (-1) = 6 \quad \text{et} \quad f(6) = 6^2 - 5 \times 6 = 6$$

donc « 6 » est le maximum de f sur l'intervalle $[-1 ; 6]$.

Remarque : une fonction n'a pas nécessairement de maximum ou de minimum. Par exemple, la fonction $x \mapsto x$, définie sur $\mathbb{R}$, n'admet aucune plus grande valeur ni aucune plus petite.

3 Notion de parité

Définition 8 : fonction paire

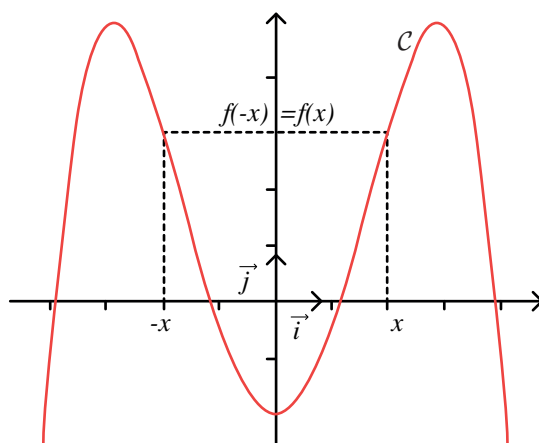
Soit f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathcal{D}$. On dit que f est paire si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$ (on dit alors que $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0) ;
- $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$.

Propriété 1 : conséquence graphique

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Si f est paire alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition 9 : fonction impaire

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathcal{D}$. On dit que f est impaire si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0) ;
- $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$.

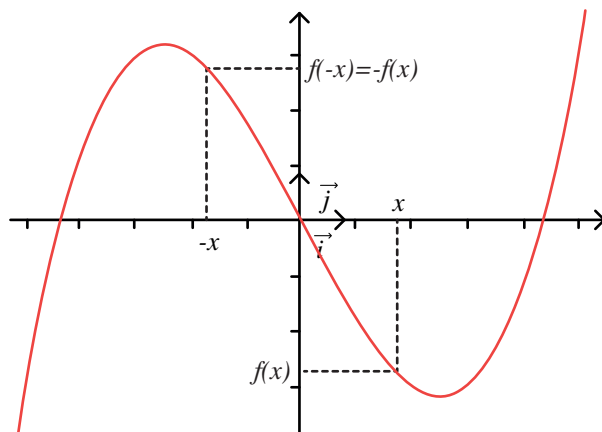
Propriété 2 : conséquence graphique

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Si f est impaire alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



➔ Solution de l'exercice type

Lycée Jean Monnet, Franconville

- 1** Le dénominateur de la fraction ne doit pas s'annuler, donc x ne doit pas être égal à zéro.
L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Remarque : l'ensemble $\mathbb{R} - \{0\}$ est aussi noté : $\mathbb{R}^*$.

2 $f(-3) = \frac{1+9}{-3} = -\frac{10}{3}$.

Pour trouver le ou les antécédents de 2, il suffit de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{1+x^2}{x} = 2 &\iff 1+x^2 = 2x, x \neq 0 \\ &\iff 1-2x+x^2 = 0, x \neq 0 \\ &\iff (1-x)^2 = 0, x \neq 0 \\ &\iff x = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, 2 a pour antécédent le nombre 1.

- 3** Prenons deux réels a et b , strictement positifs et supposons que $a < b$.
Calculons :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1+b^2}{b} - \frac{1+a^2}{a} \\ &= \frac{a(1+b^2)}{ba} - \frac{b(1+a^2)}{ab} \\ &= \frac{a+ab^2-b-ba^2}{ab} \\ &= \frac{a-b-ba(a-b)}{ab} \\ &= (a-b) \frac{1-ba}{ab}. \end{aligned}$$

➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Jean Monnet, Franconville

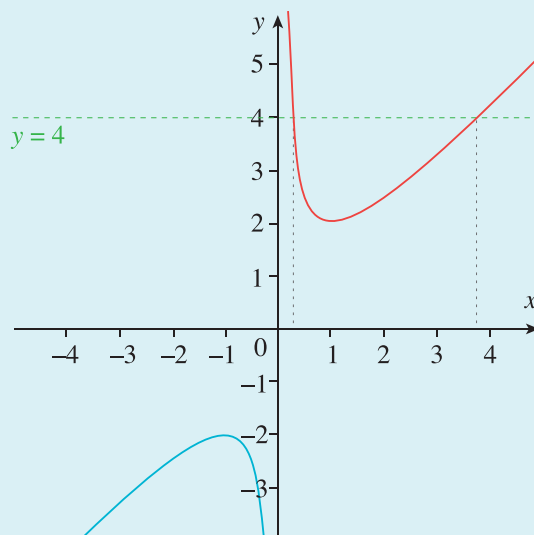
Si a et b sont tous deux dans $]0 ; 1[$, ba est plus petit que 1 et donc $f(b) - f(a)$ est strictement négatif. On en déduit que $f(b) < f(a)$, et que f est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$. D'un autre côté, si a et b sont tous deux supérieurs à 1, on a $a - b < 0$ et $1 < ab$ et donc $f(b) - f(a) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.

Par un raisonnement analogue, on pourrait montrer que f est décroissante sur $[-1 ; 0[$ et croissante sur $] - \infty ; -1]$.

On peut alors résumer ces constatations dans un tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

4 Représentation graphique :



5 Il suffit de tracer sur le graphique la droite horizontale qui passe par le point de coordonnées $(0 ; 4)$ et regarder l'abscisse des points d'intersection de cette droite avec la courbe. On obtient, en lisant sur le graphique, deux solutions : 0,25 et 3,75.

Voir énoncé page 231

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

1 V/F Image et antécédent

3 min

Corrigé
p. 250

Dans l'écriture $5 = f(2)$:

- ☐ a f est un nombre ☐ b $f(2)$ est un nombre
☐ c 5 est l'image de 2 par f ☐ d 2 est l'image de 5 par f

2 QCM Image et antécédent

3 min

Corrigé
p. 250

9 est antécédent de $\sqrt{2}$ par f s'écrit :

- ☐ a $f(9) = \sqrt{2}$ ☐ b $f(\sqrt{2}) = 9$
☐ c $f : \sqrt{2} \mapsto 9$

3 V/F Ensembles de définition

3 min

Corrigé
p. 250

D désignant l'ensemble de définition de f , quelles sont les propositions qui conviennent ?

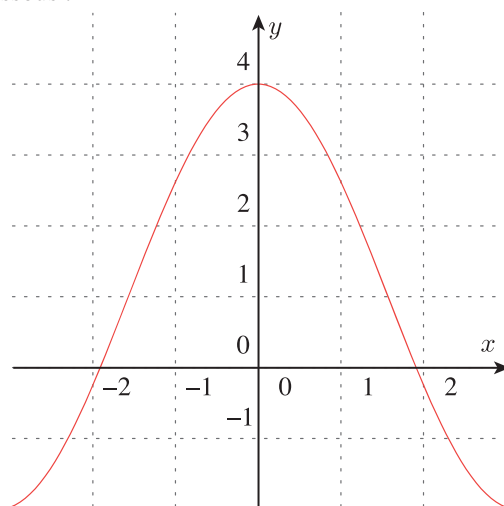
- ☐ a $f : x \mapsto 5x + 2$ $D = \mathbb{R}$
☐ b $f : x \mapsto \frac{1}{x-2}$ $D = \mathbb{R} - \{-2\}$
☐ c $f : x \mapsto (1+x^2)^2$ $D = \mathbb{R}_+$
☐ d $f : x \mapsto \frac{x-5}{x+2}$ $D = \mathbb{R} - \{-2; 5\}$

4 V/F Représentation graphique

5 min

Corrigé
p. 250

À la lecture du graphique, la fonction définie sur $[-3; 3]$ et représentée ci-dessous :



(courbe représentative
de la fonction f)

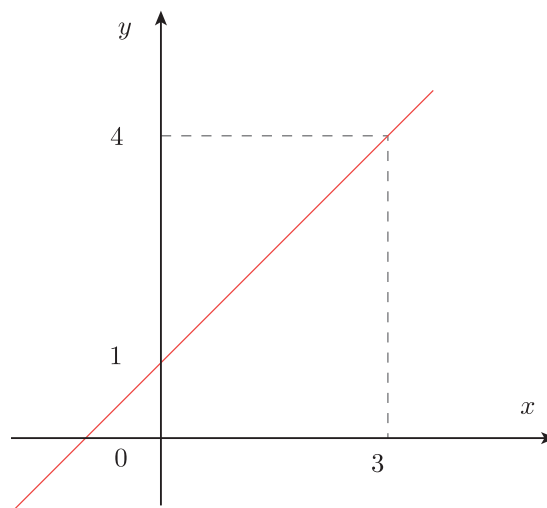
- ☐ a est décroissante
☐ b a pour maximum 4
☐ c a pour maximum 0

5 **V/F** Représentation graphique

5 min

Corrigé
p. 250

À la lecture du graphique, la fonction représentée :



- ☐ **a** est croissante ☐ **b** est affine
☐ **c** est linéaire ☐ **d** est $x \mapsto x + 4$

6 **V/F** Calculs algébriques

5 min

Corrigé
p. 251

On considère $f : x \mapsto x^2 - x$ définie sur $[0 ; 4]$.

- ☐ **a** $f(0) = f(1)$.
☐ **b** Le point $M(2 ; 2)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f .
☐ **c** Le point $N(3 ; 9)$ est au-dessus de la courbe représentative de f .
☐ **d** Le point $P(5 ; 20)$ appartient à la courbe représentative de f .

Images et antécédents

7 **Fonction $x^2 - 4$**



10 min

Corrigé
p. 251

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

Soit f la fonction définie, pour tout réel x , par : $f(x) = x^2 - 4$.

- 1** Calculer l'image par la fonction f des réels 0, 1, -2.
- 2** Déterminer, lorsque c'est possible, le ou les antécédent(s) par f des réels 5, -7, -4.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

8 Fonction quotient



10 min

Corrigé
p. 251

Lycée Jean Puy, Roanne

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x-3}.$$

- 1 Déterminer le domaine de définition de f .
- 2 Trouver, si elles existent, les images de -1 et 2 par f .
- 3 Déterminer les éventuels antécédents de -3 et 1 .

9 Encore une fraction



20 min

Corrigé
p. 252

Lycée Saint-Louis, Saint-Nazaire

Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{6}{9x^2 - 16}.$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2 Calculer l'image de -1 .
- 3 Déterminer les antécédents éventuels de $\frac{1}{8}$.

Variations

10 Imaginer une courbe



10 min

Corrigé
p. 252

Lycée Albert Chatelet, Douai

Dans un repère $(O; I, J)$, en prenant comme unité le cm, dessiner une courbe possible représentative d'une fonction répondant aux indications suivantes :

- f est définie sur $[-3; 4[$;
- $f(-3) = 1$;
- f admet un maximum qui est 3 , atteint en -1 ;
- f est croissante sur $[-3; -1]$ et décroissante sur $[-1; 4[$;
- les réels -2 et 1 ont la même image qui est $2,5$;
- $f(3) = 0$.

11 À partir de graphiques

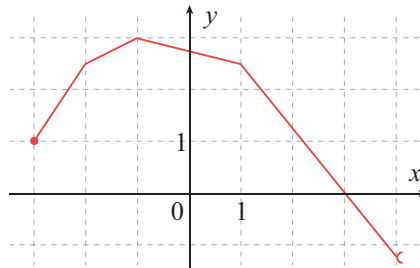


10 min

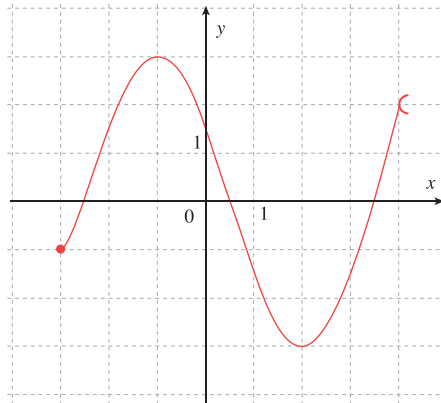
Corrigé
p. 253

Lycée Molière, Paris

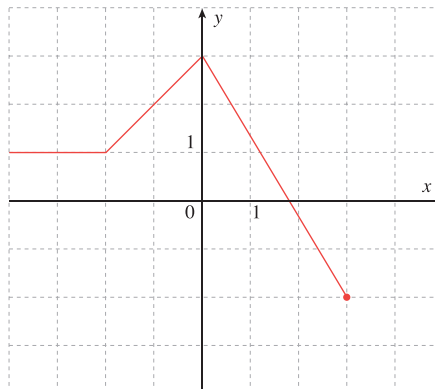
Examiner les courbes des fonctions f , g et h suivantes :



La fonction f



La fonction g



La fonction h

- 1 Proposer pour chaque fonction un ensemble de définition.
- 2 Donner le tableau de variations des fonctions f , g et h

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

12 Avec une factorisation



15 min

Corrigé
p. 253

Lycée Paul Painlevé, Oyonnax

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - x + 1.$$

- 1 Soient x et x' deux réels. Factoriser $f(x') - f(x)$.
- 2 Montrer que, si $x' > x \geq \frac{1}{4}$, alors $f(x') > f(x)$.
- 3 Montrer que, si $x' < x \leq \frac{1}{4}$, alors $f(x') > f(x)$.
- 4 En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 5 Calculer $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f(1)$, $f(2)$, et tracer la courbe représentative de f .

13 Résolution graphique

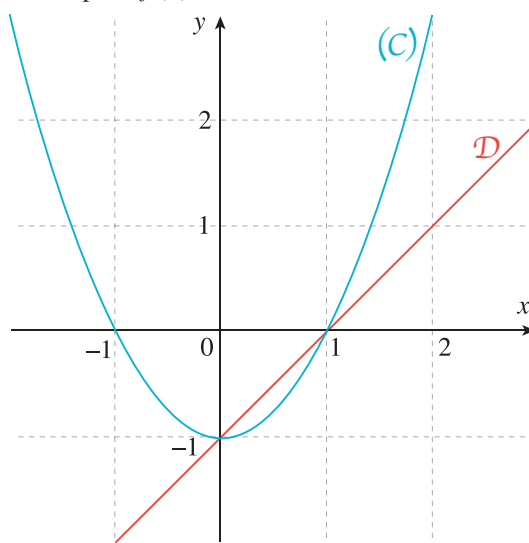


15 min

Corrigé
p. 254

Lycée Montaigne, Bordeaux

La courbe (C) est la courbe représentative dans le repère $(O; I, J)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 1$.



- 1 Indiquer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x :
(a) graphiquement ; (b) par le calcul.
- 2 Quelle est la fonction affine g représentée par la droite D ?
- 3 Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

14 Trouver les variations



20 min

Corrigé
p. 256

Lycée Thiers, Marseille

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo avec

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f :]0 ; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Soit x_1 et x_2 tels que $0 < x_1 < x_2$.

- 1 Montrer que $f(x_1) - f(x_2)$ est du signe de $(1 - x_1x_2)$.
- 2 En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; 1]$ et sur $[1 ; +\infty[$.
- 3 Tracer le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
- 4 En déduire l'existence d'un extremum.

15 Un premier bilan

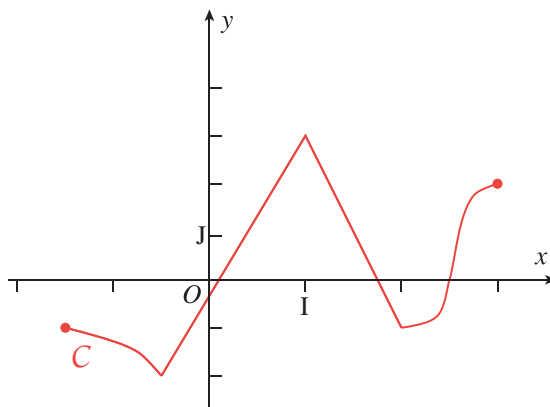


35 min

Corrigé
p. 256

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

La courbe $\mathcal{C}$ est représentative d'une fonction f dans le repère orthogonal $(O; I, J)$.



- 1 Préciser le domaine de définition D_f de f .
- 2 Sachant qu'elles sont entières, donner les images par f des réels : $-\frac{1}{2}$; 1 ; 2 ; $2,5$ et 3 .
- 3 Quel est le nombre de solutions de :
 - l'équation $E_1 : f(x) = 0$?
 - l'équation $E_2 : f(x) = 2$?
 On les représentera sur la figure.
- 4 f est-elle bornée sur D_f ?
- 5 Sachant que la courbe de f sur $[-0,5 ; 2]$ est l'union de deux segments, exprimer $f(x)$ pour tout x de $[-0,5 ; 2]$.
- 6 Résoudre alors l'équation E_1 , puis l'équation E_2 .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

16 Variations



10 min

Corrigé
p. 258

Lycée Talma, Brunoy

Étudier le sens de variation des fonctions suivantes, sur les intervalles I donnés :

1 $f(x) = \frac{-x+3}{x-5}, I =]-\infty; 5[.$

2 $g(x) = (x-8)^2, I = [8; +\infty[.$

17 Généralités



45 min

Corrigé
p. 259

Lycée Saint-Louis-de-Gonzague, Paris

On considère les fonctions f et g définies pour tout x réel par :

$$f(x) = (2x+1)^2 - (-x+3)^2$$

$$g(x) = x^2 - 16 - (2x+8)(-2x+1)$$

- 1 Développer et réduire $f(x)$.
- 2 Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
- 3 Déterminer les antécédents de -8 par f .
- 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) + g(x) = 0$.
- 5 On considère la fonction $h : x \mapsto g(x) - f(x)$ définie sur $[-4; 2]$.
 - (a) Montrer que $h(x) = 2[(x+1)^2 - 9]$.
 - (b) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1	2
$h(x)$									

18 Avec un algorithme



30 min

Corrigé
p. 260

Lycée Charlemagne, Paris

ABC est un triangle équilatéral de côté 2. Un point M parcourt (une seule fois) le triangle en partant de A , puis en passant par B et C avant de revenir au point A . On note x la distance parcourue par le point M sur le triangle et $f(x) = AM$ la distance de A à M . Par exemple, $f(4) = 2$ car si $x = 4$, alors M est en C et dans ce cas $AM = AC = 2$. On notera H le milieu de $[BC]$.

- 1
 - (a) Quel est le domaine de définition de f ?
 - (b) Calculer $f(0)$, $f(1,5)$, $f(3)$, $f(5)$.
 - (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

- 2** (a) À l'aide du théorème de Pythagore, expliciter $f(x)$ en donnant une expression différente selon la position de M sur le triangle (il y a quatre cas, qu'on peut regrouper en trois cas).
(b) Écrire une fonction Python qui prend x en argument et renvoie $f(x)$. (On utilisera la fonction racine carrée `sqrt`.)
- 3** Tracer la courbe sur votre calculatrice.

19 Algorithme de dichotomie



30 min

Corrigé
p. 263

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 5x^3 - 2x + 1.$$

- 1** Tracer sur votre calculatrice, par exemple, la courbe représentative de f et vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle non triviale.
- 2** On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
a, b, m, d nombres réels
f fonction définie par f(x)=5x³-2x+1
Initialisation
a prend la valeur -1
b prend la valeur 0
d prend la valeur 1
Tant que d > 0,0001
    m prend la valeur (a+b)/2
    Si f(m) > 0
        b prend la valeur m
    Sinon
        a prend la valeur m
    Fin Si
    d prend la valeur (b-a)
Fin Tant que
Sortie
Afficher a et b
```

- (a) Expliquer la ligne : « m prend la valeur $(a+b)/2$ ».
- (b) Expliquer le rôle de la variable d.
- (c) Expliquer alors ce que fait cet algorithme.
- (d) Programmer cet algorithme en Python et donner un encadrement d'amplitude 0,001 de la solution α de l'équation $f(x) = 0$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

20 Coup de balai!



20 min

Corrigé
p. 265

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in [0, 1]$, par $f(x) = x^2 - x^3$.

- 1 Tracer cette fonction sur votre calculatrice. Que dire de son signe ? De ses variations ?
- 2 On souhaite déterminer numériquement le maximum m de f sur $[0, 1]$ et, à 0,001 près, le point a où ce maximum est atteint.
Pour cela, on utilise l'algorithme ci-dessous, dit « de balayage ».

```
Variables
  x,a,m,k : nombres
  f : fonction définie par  $f(x) = x^2 - x^3$ 
Début
  a ← 0
  m ← f(0)
  Pour tout k de 1 à 1000
    x ← k/1000
    Si f(x) > m
      a ← x
      m ← f(x)
    Fin Si
  Fin Pour
  Afficher a , m
Fin
```

Expliquer ce que représentent les variables x , a , m et k .

À quoi sert l'instruction conditionnelle ?

- 3 Programmer l'algorithme de balayage en Python et déterminer a à la précision demandée et m .

Parité

21 Paire et impaire



10 min

Corrigé
p. 266

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est paire ou impaire :

- 1 Pour $x \in [-5 ; 5]$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- 2 Pour $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{3x}$
- 3 Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 + x + 1$
- 4 Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 2x$

22 Dédution



10 min

Corrigé
p. 267

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Soit f une fonction impaire sur $\mathcal{D}$. De plus, $0 \in \mathcal{D}$.
Démontrer que $f(0) = 0$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 **V/F** Image et antécédent

→ Enoncé
p. 240

- a** Non, f est une application.
- b** Oui (c'est l'image de 2 par l'application f).
- c** Oui.
- d** Non, 2 est un antécédent de 5 par f .

2 **QCM** Image et antécédent

→ Enoncé
p. 240

- a** Oui ($\sqrt{2}$ est l'image de 9 par f).
- b** Non.
- c** Non, cette écriture avec $\mapsto$ s'emploie au moment où on *définit* la fonction f . Elle signifie que 9 est l'image de $\sqrt{2}$.

3 **V/F** Ensembles de définition

→ Enoncé
p. 240

- a** Oui. Par exemple, une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- b** Non, c'est la valeur 2, solution de $x - 2 = 0$, qu'il faut ôter de l'ensemble de définition : $D = \mathbb{R} - \{2\}$.
- c** Oui. On peut calculer $f(x)$ pour n'importe quel x de $\mathbb{R}_+$. $D = \mathbb{R}$ convient également.
- d** Oui. À cause du dénominateur $x + 2$, il faut enlever la valeur -2 de l'ensemble de définition. Mais 5 ne pose pas de problème : $f(5) = 0$. Un ensemble de définition est $\mathbb{R} - \{-2\}$. Mais $\mathbb{R} - \{-2; 5\}$ convient aussi.

4 **V/F** Représentation graphique

→ Enoncé
p. 240

- a** Non. Elle est croissante sur $\mathbb{R}_-$, décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
- b** Oui, ce maximum est atteint en 0.
- c** Non. Le maximum est atteint en 0, mais il vaut 4.

5 **V/F** Représentation graphique

→ Enoncé
p. 241

- a** Oui car « la droite monte quand on va de gauche à droite ».
- b** Oui (la fonction est représentée par une droite et ne passe pas par l'origine du repère).
- c** Non car la droite ne passe pas par l'origine du repère.
- d** Non car si tel était le cas, la droite passerait par $y = 4$ sur l'axe des ordonnées, ce qui n'est pas le cas.

FONCTIONS • CHAP. 7

6 V/F Calculs algébriques

Enoncé
p. 241

- a) Oui, $f(0) = f(1) = 0$
- b) Non, $f(2) = 4 - 2 = 2$, donc le point $M(2 ; 2)$ appartient bien à la courbe.
- c) Oui, $f(3) = 6$, donc $9 > f(3)$, et $N(3 ; 9)$ est au-dessus de la courbe.
- d) Oui car $f(5) = 25 - 5 = 20$.

7 Fonction $x^2 - 4$

Enoncé
p. 241

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

- 1 Il faut remplacer x par sa valeur dans l'expression de f .
 - $f(0) = 0^2 - 4 = -4$;
 - $f(1) = 1^2 - 4 = 1 - 4 = -3$;
 - $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.
- 2 Nous devons, connaissant la valeur de $f(x)$, retrouver celle(s) de x :

$$f(x) = 5 \iff x^2 - 4 = 5 \iff x^2 = 4 + 5 \iff x^2 = 9$$

$$\iff x \in \{-3 ; 3\}.$$

Les antécédents de 5 par f sont donc -3 et 3 .

$$f(x) = -7 \iff x^2 - 4 = -7 \iff x^2 = -3$$

Cette dernière égalité est impossible, puisqu'un carré est toujours positif, -7 n'a donc pas d'antécédent par f .

$$f(x) = -4 \iff x^2 - 4 = -4 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

L'antécédent de -4 par f est donc 0 (et c'est le seul !).

8 Fonction quotient

Enoncé
p. 242

Lycée Jean Puy, Roanne

- 1 $f(x)$ est définie à condition que $x - 3$ soit différent de zéro. L'ensemble de définition est donc :

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}.$$

- 2 $f(-1) = \frac{-1}{-1-3} = \frac{1}{4}$ et $f(2) = \frac{2}{2-3} = -2$.

- 3 On résout l'équation $f(x) = -3$:

$$\begin{aligned} -3 &= \frac{x}{x-3} \iff -3(x-3) = x, x \neq 3 \\ &\iff -3x + 9 = x \\ &\iff 9 = 4x \\ &\iff x = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

$\frac{9}{4}$ est donc l'unique antécédent de -3 .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Calculons les antécédents de 1 :

$$\begin{aligned} 1 = f(x) &\iff 1 = \frac{x}{x-3} \\ &\iff x-3 = x \\ &\iff -3 = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours fausse. 1 n'a donc pas d'antécédent.

9 Encore une fraction

Enoncé
p. 242

Lycée Saint-Louis, Saint-Nazaire

1 $f(x)$ existe si $9x^2 - 16 \neq 0$. On résout :

$$9x^2 - 16 = 0 \iff (3x-4)(3x+4) = 0 \iff x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = -\frac{4}{3}$$

On conclut que l'ensemble de définition de f est :

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{-4}{3} ; \frac{4}{3} \right\}.$$

2 On calcule : $f(-1) = \frac{6}{9-16} = \frac{-6}{7}$.

3 Pour calculer les antécédents de $\frac{1}{8}$ par f , on résout :

$$\begin{aligned} \frac{6}{9x^2-16} &= \frac{1}{8} \\ \iff 48 &= 9x^2 - 16 \\ \iff 64 &= 9x^2 \\ \iff x^2 &= \frac{64}{9} \\ \iff x &= \frac{8}{3} \text{ ou } x = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Les antécédents de $\frac{1}{8}$ sont donc $\frac{8}{3}$ et $-\frac{8}{3}$.

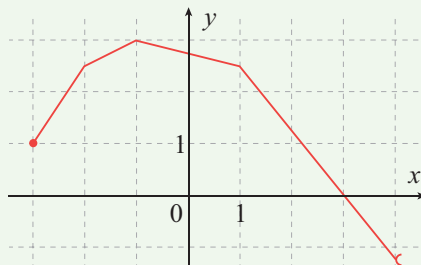
10 Imaginer une courbe

Enoncé
p. 242

Lycée Albert Chatelet, Douai

Il y a plusieurs réponses possibles, mais votre dessin doit ressembler à la figure page suivante ; n'oubliez pas notamment :

- le gros point en $(-3 ; 1)$ qui signale que l'ensemble de définition s'arrête en -3 et contient -3 ;
- le crochet à l'abscisse 4 qui signale que 4 est une extrémité (exclue) de l'ensemble de définition.



11 À partir de graphiques

➔ **Énoncé**
p. 243

Lycée Molière, Paris

- 1 (a) L'ensemble de définition est $[-3 ; 4[$. Le gros point à l'abscisse -3 et le crochet à l'abscisse $+4$ signalent que -3 est inclus alors que $+4$ est exclu de l'ensemble.
- (b) L'ensemble de définition est $[-3 ; 4[$, tout comme pour la première fonction.
- (c) L'ensemble de définition peut être ici : $[-4 ; 3]$, ne sachant pas l'allure de la courbe pour $x < -4$.

- 2 (a)

x	-3	-1	4
$f(x)$	1	↗	3 ↘

(b)

x	-3	-1	+2	+4
$g(x)$	-1 ↗	+3 ↘	-3 ↗	2

(c)

x	-4	-2	0	+3
$h(x)$	→	+1 ↗	3 ↘	-2

12 Avec une factorisation

➔ **Énoncé**
p. 244

Lycée Paul Painlevé, Oyonnax

- 1 On factorise :

$$\begin{aligned}
 f(x') - f(x) &= (2x'^2 - x' + 1) - (2x^2 - x + 1) \\
 &= 2(x'^2 - x^2) - (x' - x) \\
 &= 2(x' - x)(x' + x) - (x' - x) \\
 &= (x' - x)(2(x' + x) - 1) \\
 &= 2(x' - x)(x' + x - \frac{1}{2}).
 \end{aligned}$$

- 2 On suppose :

$$x' > x \geq \frac{1}{4}.$$

Comme $x' > x$, on a $x' + x > 2x$; or $2x \geq \frac{1}{2}$ donc $x' + x - \frac{1}{2} > 0$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

On a également : $x' - x > 0$.

On en conclut que $2(x' - x)(x' + x - \frac{1}{2}) > 0$, donc $f(x') > f(x)$.

Ceci montre que la fonction f est strictement croissante sur $[\frac{1}{4}; +\infty[$ puisque, sur cet intervalle, si $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$.

3 On suppose cette fois : $x' < x \leq \frac{1}{4}$. On a alors $x' + x < 2x$ et $2x \leq \frac{1}{2}$, donc $x' + x - \frac{1}{2} < 0$.

On a ici $x' - x < 0$. D'où $f(x') > f(x)$.

x et x' sont deux éléments de $]-\infty; \frac{1}{4}]$. Nous venons de prouver que, sur cet intervalle, si $x' < x$, alors $f(x') > f(x)$; la fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{4}]$.

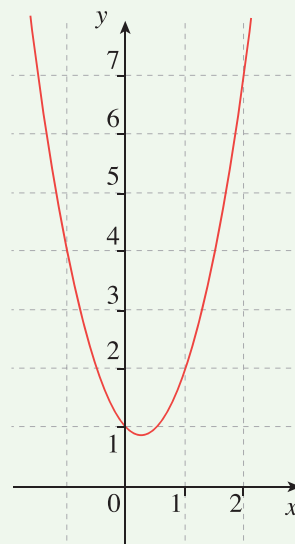
4 On donne le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ $\frac{7}{8}$ $\nearrow$		

5 On calcule les valeurs demandées :

x	-1	0	$\frac{1}{4}$	1	2
$f(x)$	4	1	$\frac{7}{8} = 0,875$	2	7

D'où la courbe ci-contre.



13 Résolution graphique

Enoncé
p. 244

Lycée Montaigne, Bordeaux

1 (a) On lit sur le graphique les abscisses des points qui sont au-dessus ($f(x) \geq 0$) ou au-dessous ($f(x) \leq 0$) de l'axe des abscisses. On résume dans un tableau :

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$		
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

(b) Dans ce type d'inéquation, deux méthodes sont possibles.

FONCTIONS • CHAP. 7

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- On peut factoriser $f(x) = (x - 1)(x + 1)$ puis utiliser un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$ $	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$ $
$f(x)$	$+$	0	$-$	0
				$+$

- On peut aussi remarquer que le signe de $f(x)$ dépend de la position de x^2 par rapport à 1, ce qui permet d'utiliser les variations de la fonction $x \mapsto x^2$:

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
x^2		$\searrow$	1	$\nearrow$	
			$\searrow$	0	$\nearrow$
				1	

On lit dans le tableau : $x^2 \leq 1$ pour $x \in [-1 ; 1]$ et $x^2 \geq 1$ pour $x \in]-\infty ; -1]$ ou $x \in [1 ; +\infty[$. On retrouve ainsi les résultats précédents.

- 2** La fonction g est sous la forme $x \mapsto ax + b$. On lit sur le graphique : $g(0) = -1$ et $g(1) = 0$, d'où les équations :

$$\begin{cases} g(0) = b = -1 \\ g(1) = a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

g est donc la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x - 1.$$

- 3** Graphiquement, on constate que la parabole ($\mathcal{C}$) est au-dessous de la droite $\mathcal{D}$ pour les points dont les abscisses sont comprises entre 0 et 1. L'inégalité est large, il faut donc inclure les valeurs 0 et 1, d'où :

$$S = [0 ; 1].$$

Par le calcul :

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\iff x^2 - 1 \leq x - 1 \\ &\iff (x - 1)(x + 1) \leq (x - 1) \\ &\iff (x - 1)[(x + 1) - 1] \leq 0 \\ &\iff x(x - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

On utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$+1$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$(x - 1)$	$-$	$ $	0	$+$
$x(x - 1)$	$+$	0	$-$	0
				$+$

On constate que $x(x - 1) \leq 0$ pour $x \in [0 ; 1]$, ce qui confirme le résultat lu sur le graphique.

14 Trouver les variations

Enoncé
p. 245

Lycée Thiers, Marseille



- 1 Obéissons poliment aux injonctions de l'énoncé, et munissons-nous de x_1 et x_2 , tels que $0 < x_1 < x_2$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{1}{x_1} - x_2 + x_1 - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{1}{x_1} - \frac{x_2 x_1}{x_1} + \frac{x_1 x_2}{x_2} - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{1}{x_1} (1 - x_2 x_1) + \frac{1}{x_2} (x_1 x_2 - 1) \\ &= (1 - x_2 x_1) \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \end{aligned}$$

Ceci est du signe de $(1 - x_2 x_1)$, puisque, x_1 étant inférieur à x_2 , $\frac{1}{x_1}$ est supérieur à $\frac{1}{x_2}$, donc : $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ est positif.

- 2 Si l'on se donne deux points x_1 et x_2 inférieurs à 1, et tels que nous avons $0 < x_1 < x_2$, alors $(1 - x_2 x_1)$ est positif (si ce point ne vous paraît pas évident, cherchez-en une preuve *maintenant*, une correction est donnée à la fin de ce paragraphe). Donc $f(x_1) - f(x_2)$ est positif, et f est *décroissante* sur $]0 ; 1]$ (x_1 est le plus petit et son image est la plus grande). En revanche, si les deux points x_1 et x_2 sont supérieurs à 1, alors $(1 - x_2 x_1)$ est négatif. Donc $f(x_1) - f(x_2)$ est négatif, et f est *croissante* sur $[1 ; +\infty[$ (x_1 est le plus petit et son image est aussi la plus petite).

Au sujet de $1 - x_2 x_1 > 0$: vous savez que $0 < x_1 < 1$ et $0 < x_2 < 1$, il suffit de multiplier membre à membre ces encadrements (ce que l'on a le droit de faire car ils concernent des nombres tous positifs), et il vient : $0 < x_1 x_2 < 1$, d'où : $1 - x_1 x_2 > 0$.

- 3 À l'aide de la question précédente, on dresse le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		2	

- 4 D'après le tableau de variations, f admet pour minimum 2 en $x = 1$.

15 Un premier bilan

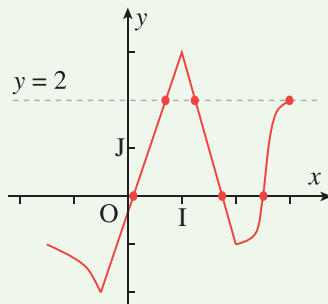
Enoncé
p. 245

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

- 1 f est définie sur $[-1,5 ; 3]$.
- 2 On lit sur le graphique : $f(-0,5) = -2$, $f(1) = 3$, $f(2) = -1$, $f(2,5) = 0$ et $f(3) = 2$.

FONCTIONS • CHAP. 7

- 3** On a indiqué les « points-solutions » sur la figure ci-dessous. Dans les deux cas, il y a trois solutions.



- 4** f est bornée sur son ensemble de définition, par -2 et 3 .
5 D'après l'énoncé, la courbe de f est un segment de droite sur $[-0,5 ; 1]$. Sur cet intervalle, la fonction s'écrit donc :

$$f(x) = ax + b$$

où a et b sont deux constantes réelles. On peut donc écrire :

$$f(-0,5) = -0,5a + b \text{ et } f(1) = a + b$$

En tenant compte de la question 2), il n'y a plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2 = -0,5a + b \\ 3 = a + b \end{cases} &\iff \begin{cases} 3 = a + b \\ 5 = 1,5a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 3 - a \\ a = \frac{10}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ a = \frac{10}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne sur l'intervalle $[-0,5 ; 1]$:

$$f(x) = \frac{10}{3}x - \frac{1}{3}.$$

On utilise la même méthode sur $[1 ; 2]$.

$f(1) = a + b$ et $f(2) = 2a + b$, on résout le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3 = a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases} &\iff \begin{cases} b = 3 - a \\ -4 = a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 7 \\ a = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

f , sur l'intervalle $[1 ; 2]$, a pour expression :

$$f(x) = -4x + 7.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

- 6 Il y a trois solutions à E_1 . La première se trouve dans l'intervalle $[-0,5 ; 1]$, il suffit de résoudre :

$$\frac{10}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \iff x = \frac{1}{10}$$

Il y a une deuxième solution dans $[1 ; 2]$:

$$-4x + 7 = 0 \iff x = \frac{7}{4}.$$

La troisième solution est parfaitement lisible, puisque $f(2,5) = 0$.
L'ensemble des solutions de E_1 est donc :

$$\left\{ \frac{1}{10} ; \frac{7}{4} ; \frac{5}{2} \right\}$$

Ici encore, la première solution de E_2 se trouve dans $[-0,5 ; 1]$. On résout :

$$\frac{10}{3}x - \frac{1}{3} = 2 \iff \frac{10}{3}x = \frac{7}{3} \iff x = \frac{7}{10}.$$

Il y a une autre solution, dans l'intervalle $[1 ; 2]$:

$$-4x + 7 = 2 \iff -4x = -5 \iff x = \frac{5}{4}$$

Enfin, nous savons déjà que $f(3) = 2$.
L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \frac{7}{10} ; \frac{5}{4} ; 3 \right\}$$

16 Variations

Enoncé
p. 246

Lycée Talma, Brunoy

- 1 Prenons dans I deux réels x et x' tels que $x' > x$ et comparons $f(x')$ et $f(x)$. Pour rendre la comparaison plus commode, exprimons :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \frac{-x' + 3}{x' - 5} - \frac{-x + 3}{x - 5} \\ &= \frac{(-x' + 3)(x - 5) - (-x + 3)(x' - 5)}{(x' - 5)(x - 5)} \\ &= \frac{-x'x + 3x + 5x' - 15 - (-xx' + 5x + 3x' - 15)}{(x' - 5)(x - 5)} \\ &= \frac{-x'x + 3x + 5x' - 15 + xx' - 5x - 3x' + 15}{(x' - 5)(x - 5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \frac{-2x + 2x'}{(x' - 5)(x - 5)} \\ &= (x' - x) \frac{2}{(x' - 5)(x - 5)} \end{aligned}$$

Comme $x' - x > 0$, $x' - 5 < 0$ et $x - 5 < 0$, on obtient :

$$f(x') - f(x) > 0, \text{ donc } f(x') > f(x)$$

On en déduit que f est strictement croissante sur I .

- 2** Prenons encore dans I deux réels, $x' > x$. Cette fois, plutôt que calculer $f(x') - f(x)$, écrivons directement :

$$\begin{aligned} x' &> x \\ x' - 8 &> x - 8 \end{aligned}$$

et, ces deux réels étant positifs (car $x \geq 8$), on peut élever les deux membres au carré :

$$(x' - 8)^2 > (x - 8)^2$$

ce qui donne : $f(x') > f(x)$. On en déduit que f est strictement croissante sur I .

17 Généralités

➔ **Énoncé**
p. 246

Lycée Saint-Louis-de-Gonzague, Paris

1 $f(x) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 6x - 9 = 3x^2 + 10x - 8$

- 2** Factorisons f :

$$\begin{aligned} f(x) &= [(2x + 1) + (-x + 3)][(2x + 1) - (-x + 3)] \\ &= (2x + 1 - x + 3)(2x + 1 + x - 3) \\ &= (x + 4)(3x - 2) \end{aligned}$$

Factorisons g :

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - 4)(x + 4) - 2(x + 4)(-2x + 1) \\ &= (x + 4)[(x - 4) - 2(-2x + 1)] \\ &= (x + 4)(x - 4 + 4x - 2) \\ &= (x + 4)(5x - 6) \end{aligned}$$

- 3** Il suffit de résoudre l'équation :

$$-8 = 3x^2 + 10x - 8 \iff 0 = 3x^2 + 10x \iff x(3x + 10) = 0$$

Les antécédents de -8 par f sont donc : 0 et $-\frac{10}{3}$.

- 4 Utilisons les expressions factorisées de f et g :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) = 0 &\iff (x+4)(3x-2) + (x+4)(5x-6) = 0 \\ &\iff (x+4)(3x-2+5x-6) = 0 \\ &\iff (x+4)(8x-8) = 0 \\ &\iff (x+4)(x-1) = 0 \end{aligned}$$

D'où l'ensemble de solutions : $S = \{-4; 1\}$.

- 5 (a) Utilisons encore les expressions factorisées de f et g :

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= (x+4)(5x-6) - (x+4)(3x-2) \\ &= (x+4)(5x-6-3x+2) \\ &= (x+4)(2x-4) \\ &= 2(x+4)(x-2) \\ &= 2(x+1+3)(x+1-3) \\ &= 2[(x+1)^2 - 9] \end{aligned}$$

(b)

x	-4	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1	2
$h(x)$	0	-10	-16	-17,5	-18	-17,5	-16	-10	0

18 Avec un algorithme

Enoncé
p. 246

Lycée Charlemagne, Paris

- 1 (a) Le périmètre du triangle équilatéral est $3 \times 2 = 6$, donc la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 6]$.

- (b) Pour $x = 0$, $M = A$ donc $f(0) = 0$.

Pour $x = 1,5$, M est sur le segment $[AB]$, donc $AM = x = 1,5$.

Pour $x = 3$, M a parcouru l'intégralité du segment $[AB]$, puis la moitié du segment $[BC]$, donc $M = H$. Le triangle ABH est rectangle en H , donc d'après le théorème de Pythagore,

$$AH^2 + BH^2 = AB^2,$$

c'est-à-dire :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 2^2 - 1^2 = 3,$$

et finalement :

$$f(3) = AH = \sqrt{3}.$$

Enfin, si $x = 5$, alors M est le milieu du segment $[CA]$, donc $AM = 1$, d'où $f(5) = 1$.

- (c) Si $0 \leq x \leq 2$, M parcourt le segment $[AB]$ de A à B , donc la distance AM est croissante.

Si $2 \leq x \leq 4$, alors M se trouve sur le segment $[BC]$ et $[AM]$ est l'hypoténuse du triangle AMH rectangle en H . Comme AH est fixe, AM décroît lorsque M se rapproche de H et croît de nouveau

FONCTIONS • CHAP. 7

lorsque M s'en éloigne. Ainsi, f est décroissante sur $[2 ; 3]$ puis croissante sur $[3 ; 4]$. (On pourrait expliciter les calculs, mais ce n'est pas nécessaire pour l'instant, on peut attendre la question 2.) Enfin, si $4 \leq x \leq 6$, M se rapproche de A sur le segment $[CA]$, donc f est décroissante sur $[4 ; 6]$.

On calcule facilement les valeurs qui nous manquent : $f(2) = 2$, $f(4) = 2$, $f(6) = 0$, et on obtient le tableau de variations :

x	0	2	3	4	6
$f(x)$	0	2	$\sqrt{3}$	2	0

- 2 (a)** Si $0 \leq x \leq 2$, on a clairement $f(x) = x$.
Si $2 \leq x \leq 3$, alors M est sur le segment $[HB]$. Le triangle AHM est rectangle en H et d'après le théorème de Pythagore,

$$AH^2 + HM^2 = AM^2.$$

Or $3 = x + MH$, donc $HM = 3 - x$ et comme on a calculé $AH = \sqrt{3}$, on obtient donc :

$$f(x) = \sqrt{3 + (3 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 12}.$$

Si $3 \leq x \leq 4$, alors le même raisonnement s'applique, et ici $HM = x - 3$ (car M a dépassé H) et on obtient :

$$f(x) = \sqrt{3 + (x - 3)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 12}.$$

On peut donc regrouper ces deux derniers cas en une seule formule pour $2 \leq x \leq 4$.

Enfin, si $x \geq 4$, M est sur le segment $[CA]$ et le périmètre du triangle est $6 = x + MA$, donc $f(x) = 6 - x$.

- (b)** L'algorithme teste si la variable x est inférieure ou égale à 2, dans le cas contraire, si elle est inférieure ou égale à 4. Dans chaque cas, on stocke la valeur à calculer à partir de x dans une variable y , puis la fonction renvoie y .

En Python

```
def f(x):
    if x <= 2 :
        y = x
    elif x <= 4 :
        y = sqrt(x**2-6*x+12)
    else :
        y = 6 - x
    return y
```

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Nous avons utilisé une structure `if... elif... else`.

Le mot-clé `elif` est un raccourci de :

```
else :  
    if .... :
```

qui demanderait un retrait supplémentaire.

L'instruction pour charger la fonction `sqrt` est la suivante :

```
from numpy import sqrt
```

Remarque : l'algorithme ne prend pas en compte l'utilisateur facétieux qui entrerait un nombre en dehors de l'intervalle $[0 ; 6]$.

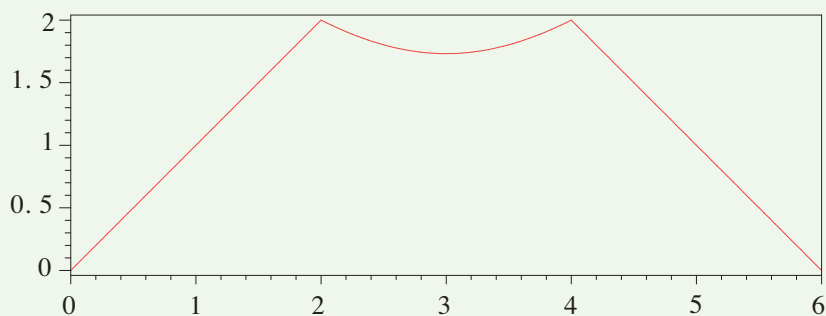
- 3** Sur la Casio, choisir le menu GRAPH et entrer chaque formule avec leur domaine de validité :

```
Graph Func      :Y=  
Y1=X, [0,2]     [---]  
Y2= $\sqrt{(X^2-6X+12)}$ , [2,4]  
Y3=6-X, [4,6]
```

puis F6 affiche la courbe attendue. Si le résultat est bizarre, vous devez sans doute régler la fenêtre (View Window). Appuyez sur F3 et fixez :

- Xmin : -1 • Ymin : -1
- Xmax : 7 • Ymax : 3

pour avoir le bon domaine de représentation.

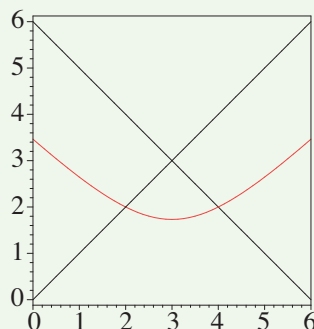


La TI-82 ne gère pas aussi facilement les fonctions définies par morceaux. Une solution simple (et conseillée) est de tracer les trois fonctions simultanément et de décider « à la main » où se trouve la fonction f .

Après avoir appuyé sur `Y=`, on entre les trois fonctions :

```
Y1=X  
Y2= $\sqrt{(X^2-6X+12)}$   
Y3=6-X
```

et la touche GRAPH donne les trois courbes (éventuellement, réglez la fenêtre avec la touche WINDOW).



Si vous tenez absolument à tracer la courbe de f et elle seulement, vous pouvez utiliser des fonctions-tests (on y accède par la touche TEST) : par exemple, $(X>0)$ renvoie 1 si $X > 0$ et 0 sinon. Ainsi, l'expression $(X>0)(X<2)X$ vaut X si X est dans l'intervalle $]0; 2[$ et vaut 0 sinon.

Il « suffit » d'entrer l'expression :

$$Y_1 = (X \geq 0)(X \leq 2)X + \\ (X > 2)(X \leq 4)\sqrt{X^2 - 6X + 12} + \\ (X > 4)(X \leq 6)(6 - X)$$

et une pression sur GRAPH fournit la courbe représentative de f (la même que la Casio bien sûr !)

19 Algorithme de dichotomie

➔ Enoncé
p. 247

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

- 1 Traçons la courbe représentative de la fonction f avec un zoom assez important pour avoir une idée de la valeur pour laquelle $f(x) = 0$ (voir page suivante).

La courbe semble bien couper l'axe des abscisses en un seul point, dont l'abscisse semble être égale à $-0,8$, mais si on calcule $f(-0,8)$, on trouve :

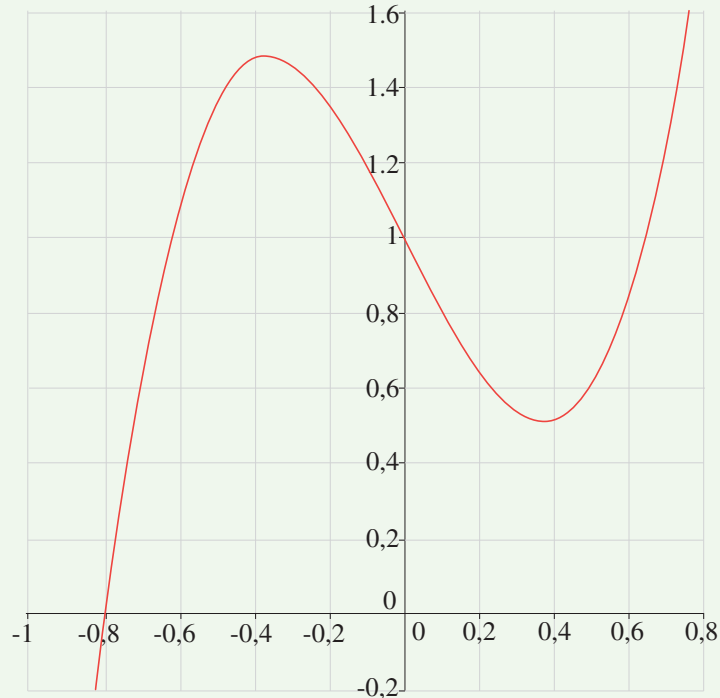
$$f(-0,8) = 5 \times (-0,8)^3 - 2 \times (-0,8) + 1 = 0,04 \neq 0$$

donc $x = -0,8$ n'est pas la solution à l'équation $f(x) = 0$. Cette solution n'est donc pas triviale (on peut comprendre le mot « trivial » comme « évident » ou « simple » dans notre contexte).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



- 2** (a) « m prend la valeur $(a+b)/2$ » signifie que la variable m correspond au milieu de l'intervalle $[a;b]$.
- (b) Dans la boucle « Tant que », la variable d change de valeur pour évaluer $b-a$.
La fonction f est croissante sur $[-1 ; 0]$ (intervalle de départ); de plus, si $f(m) > 0$ alors l'intervalle devient $[a ; m] = [a ; b]$ et si $f(m) \leq 0$, il devient $[m ; b] = [a ; b]$. Quoi qu'il en soit, a est toujours plus petit que b , donc $d = b-a$ sera toujours positive et donc représentera l'amplitude de l'intervalle $[a;b]$.
- (c) D'après ce qui a été dit précédemment, à chaque passage dans la boucle « Tant que », l'intervalle $[a;b]$ se réduit pour donner un intervalle d'amplitude égale à la moitié de celle de l'intervalle précédent, et ceci jusqu'à ce que l'amplitude soit inférieure ou égale à 0,000 1 (condition contraire de celle de la boucle « Tant que »).
L'algorithme a donc pour objectif de trouver un intervalle dans lequel se trouve la solution de l'équation $f(x) = 0$ (car les bornes de l'intervalle sont choisies de sorte que $f(a) \leq 0$ et $f(b) > 0$) d'amplitude inférieure ou égale à 0,000 1.

- (d) En Python, on commence par définir la fonction f . On écrit ensuite la boucle `while` :

```

En Python
live
def f(x):
    return 5*x**3-2*x+1

a = -1 ; b = 0 ; d = 1

while d > 0.0001 :
    m = (a+b)/2
    if f(m) > 0 :
        b = m
    else :
        a = m
    d = b - a
print(a,b)
    
```

Il s'affiche à l'écran : -0.80523681640625, -0.80517578125.

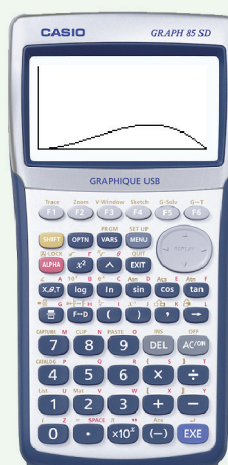
On peut donc conclure que la solution α de l'équation $f(x) = 0$ est telle que :

$$-0,806 < \alpha < -0,805.$$

20 Coup de balai !

Enoncé
p. 248

- 1 Il faut bien régler l'intervalle des x à $[0; 1]$ et celui des y à $[0; 1]$, voire $[0; 0,5]$ pour mieux voir. On obtient la courbe d'une fonction positive, croissante jusqu'à un certain point, puis décroissante. L'abscisse du maximum est proche de 0,6 (on peut la déterminer graphiquement avec la calculatrice).



- 2 k est un compteur entier qui varie de 1 à 1 000. Comme $x = \frac{k}{1\,000}$, x est une abscisse qui augmente de 0,001 à chaque passage dans la boucle. Les variables m et a contiennent les valeurs provisoires du maximum et de son abscisse. Les valeurs initiales sont $a = 0$ et $m = f(0)$, et on les actualise dès qu'on trouve un x avec une image plus grande : c'est à cela que sert l'instruction conditionnelle.

La technique de balayage permet d'affirmer que la valeur finale de a trouvée est une approximation de l'abscisse du maximum à 0,001 près.

- 3 On programme l'algorithme en Python :

 En Python

```
def f(x):
    return x**2-x**3

m=f(0)
for k in range(1000):
    x=k/1000
    if f(x)>m:
        a=x
        m=f(a)
print(a,m)
```

On obtient $a \approx 0,667$, $m \approx 0,148$, ce qui est cohérent avec la courbe obtenue à la calculatrice.

21 Paire et impaire

 Enoncé
p. 249

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

- 1 Pour $x \in [-5 ; 5]$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
 $\forall x \in [-5 ; 5]$,
- $-x \in [-5 ; 5]$
 - et $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$
- donc f est paire.
- 2 Pour $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{3x}$
L'ensemble de définition de f n'est pas symétrique par rapport à 0 donc f n'est ni paire ni impaire.
- 3 Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 + x + 1$
On remarque que $f(-1) = 4$ et $f(1) = 6$ donc f n'est ni paire ni impaire.

4 Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 2x$
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4 \times (-x)^3 + 2 \times (-x) \\ &= -4x^3 - 2x \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

donc f est impaire.

22 Déduction

➔ Enoncé
p. 249

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

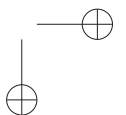
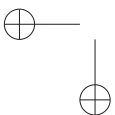
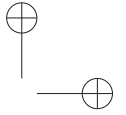
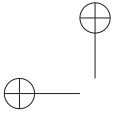
f est impaire, donc $\forall x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

En particulier, pour $x = 0$, $f(-0) = -f(0)$ soit $f(0) = -f(0)$ ou encore $2f(0) = 0$ d'où $f(0) = 0$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Chapitre

8

Fonctions de référence

Plan du chapitre

1. Fonctions linéaires et affines
2. Les autres fonctions usuelles

1 Fonctions linéaires et affines

Exercice type 1

Lycée Pascal Paoli, Corte

- 1 Donner les variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_1(x) = 2x + 3 \\ f_2(x) = 2x - 3 \\ f_3(x) = -2x + 3 \end{cases}$$

- 2 Tracez leur courbe représentative.

Voir corrigé page 270

1.1 Comment varient les fonctions linéaires et affines ?

Une fonction affine s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

où a et b sont des réels fixés. Les variations de $f(x)$ et de x sont proportionnelles, car : $f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$, soit :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

a est le coefficient de proportionnalité.

- On a : $b = f(0)$ (c'est « l'ordonnée à l'origine »).
- La « courbe » représentative de f est une droite.
- L'équation de cette droite est : $y = ax + b$.
- La direction de cette droite est indiquée par le réel a , appelé *coefficient directeur*.

Le signe du coefficient directeur indique le sens de variation de f :

- Si $a > 0$, la fonction est strictement croissante.
- Si $a = 0$, la droite est parallèle à l'axe des abscisses, la fonction est constante.
- Si $a < 0$, la fonction est strictement décroissante.

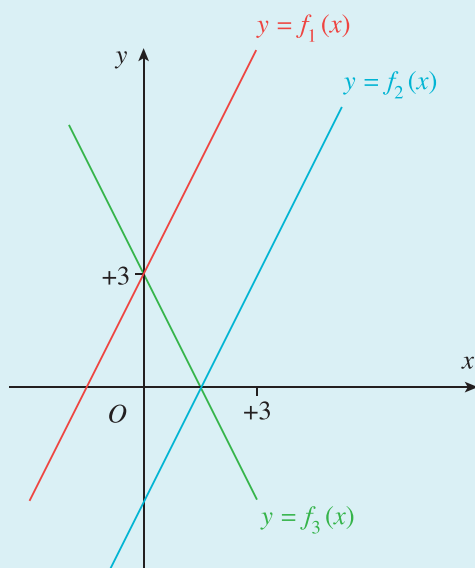
Remarque : une fonction *linéaire* (de la forme $x \mapsto ax$, où a est une constante) est un cas particulier de fonction affine ($b = 0$).

➔ Solution de l'exercice type 1

Lycée Pascal Paoli, Corte

- 1 Le coefficient directeur de f_1 est $+2$ donc f_1 est croissante.
Celui de f_2 est également $+2$ donc f_2 est croissante. Les coefficients directeurs étant les mêmes, les droites sont parallèles.
Le coefficient directeur de f_3 est -2 , donc f_3 est décroissante.

2



Voir énoncé page 269

2 Les autres fonctions usuelles

Exercice type 2

Nouveau programme

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Développer l'expression $(x + 3)^2 - 6$.
- 2 En déduire que la courbe d'équation $y = x^2 + 6x + 3$ est une parabole, dont on déterminera le sommet S .
- 3 Écrire l'expression $2 + \frac{3}{x - 1}$ sous la forme d'une fraction.
- 4 En déduire l'ensemble de définition et les variations de la fonction f :

$$x \mapsto \frac{2x + 1}{x - 1}.$$

Voir corrigé page 275

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

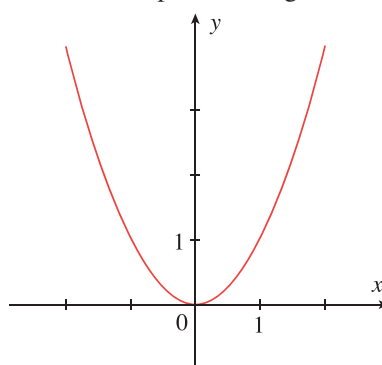
2.1 La fonction « carré »

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$.

Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

Sa courbe représentative s'appelle une *parabole*. Au minimum de la fonction, 0, correspond sur la courbe le *sommet*, placé à l'origine du repère.

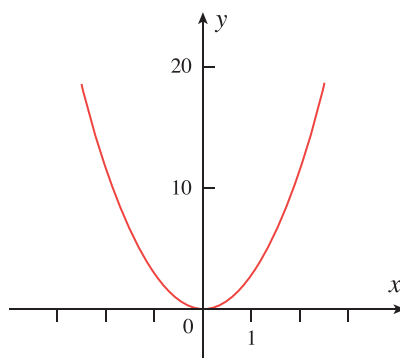


La fonction carré n'est croissante que sur $[0, +\infty[$ (également noté $\mathbb{R}_+$), on ne peut donc passer au carré dans une inégalité que si les deux membres sont positifs. Par exemple, $3 < 5$ donc $9 < 25$. En revanche, $-2 < 1$ et pourtant $4 > 1$!

Si on note $f(x) = x^2$, on constate que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: on dit que la fonction est *paire* (comme l'exposant 2 dans x^2). On peut le voir graphiquement car l'égalité $f(-x) = f(x)$ signifie que deux points de la courbe qui ont des abscisses opposées ont toujours la même ordonnée : la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe (Oy).

Toutes les courbes dont l'équation peut s'écrire, dans un certain repère, sous la forme $y = ax^2$ ($a \neq 0$), sont des paraboles, dont le sommet est l'origine du repère. Le signe de a donne l'orientation (branches vers le haut ou vers le bas) de la parabole.

Voici par exemple la courbe représentative de $x \mapsto 3x^2$:

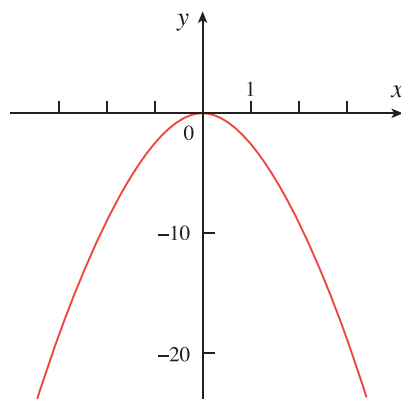


COURS

INTERROS

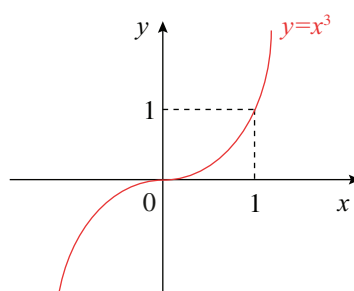
CORRIGÉS

et celle de la fonction $x \mapsto -2x^2$:



2.2 La fonction « cube »

La fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, si a et b sont deux réels tels que $a < b$, alors $a^3 < b^3$. On a donc le droit de « passer au cube » une inégalité de réels, même si les deux membres ne sont pas positifs. Voici la courbe représentative de cette fonction :

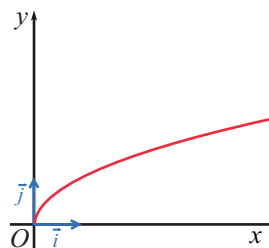


Si on note $f(x) = x^3$, on constate que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: on dit que la fonction est *impaire* (comme l'exposant 3 dans x^3).

L'égalité $f(-x) = -f(x)$ signifie que deux points de la courbe qui ont des abscisses opposées ont des ordonnées opposées : la courbe est donc symétrique par rapport à O .

2.3 La fonction « racine carrée »

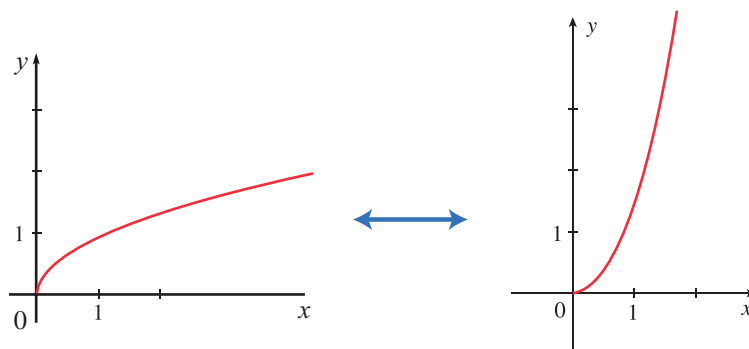
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Elle est croissante, et sa courbe est représentée ci-contre.



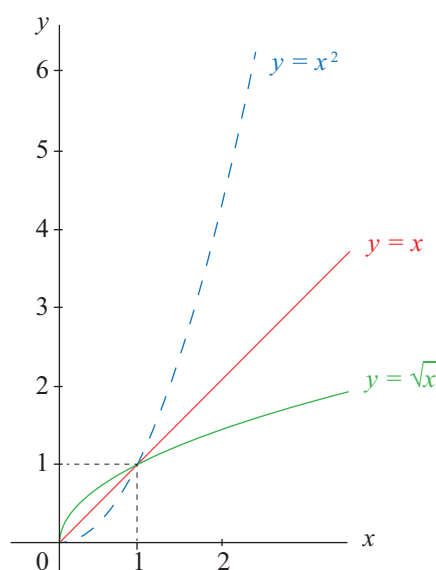
FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

Se demander si elle est paire ou impaire n'a pas de sens, car elle n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$.

Si on regarde la figure ci-dessus dans un miroir et qu'on la tourne un peu, la courbe de $y = \sqrt{x}$ devient la branche droite de la parabole.



Ceci montre que les courbes d'équation $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$ (pour $x \geq 0$) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



On a cette propriété parce que les fonctions racine et carré (sur $[0, +\infty[$) sont des réciproques l'une de l'autre : si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2} = x$ et $(\sqrt{x})^2 = x$.

⚠ ATTENTION

Si $x < 0$, alors $(\sqrt{x})^2$ n'existe pas et $\sqrt{x^2} = -x$ (par exemple $(-2)^2 = 4$ et $\sqrt{4} = 2$ et non -2).

En testant les deux cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$, on montre la formule :

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2.4 La fonction « inverse »

C'est la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$. Cet ensemble est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un intervalle. Il est formé de la *réunion* de deux intervalles : $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

La fonction est décroissante sur ces deux intervalles. Si on inverse les membres d'une inégalité entre nombres de mêmes signes, on obtient une inégalité de sens contraire.

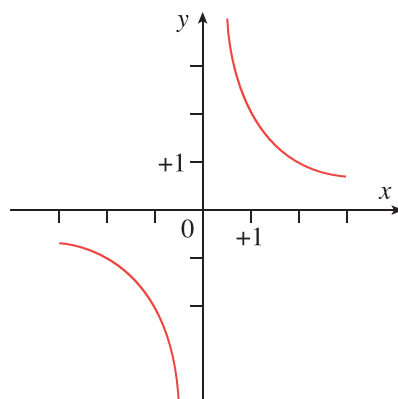
Attention ! La fonction inverse n'est pas décroissante *sur* $\mathbb{R}^*$ car, par exemple, $f(-1) < f(+1)$.

Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			
	$\searrow$		$\searrow$

La courbe représentative est une *hyperbole*. Elle est formée de deux branches disjointes.

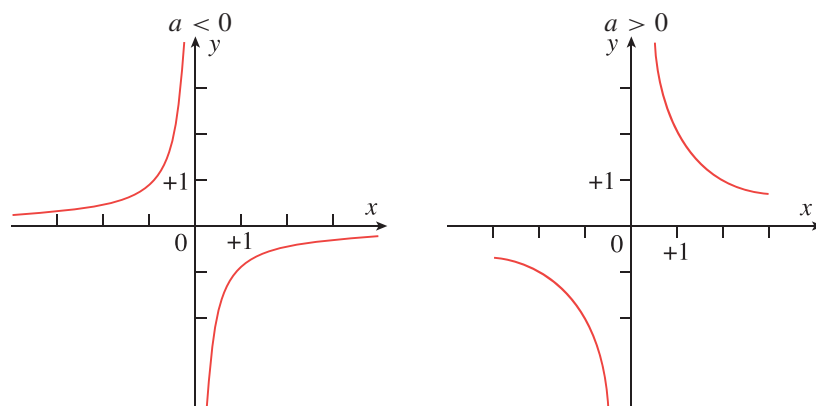
Notons $f(x) = \frac{1}{x}$. On constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -f(x)$. La fonction est donc impaire et la courbe admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



La courbe se rapproche des deux axes du repère, mais sans les toucher ; on dit que les axes sont les *asymptotes* de l'hyperbole.

Toutes les courbes dont l'équation s'écrit sous la forme $y = \frac{a}{x}$ s'appellent des hyperboles, et l'origine du repère est leur *centre*.

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8



➔ Solution de l'exercice type 2

Nouveau programme

- 1 On développe : $(x + 3)^2 - 6 = x^2 + 6x + 9 - 6 = x^2 + 6x + 3$.
- 2 L'équation $y = x^2 + 6x + 3$ s'écrit donc aussi : $y = (x + 3)^2 - 6$, soit : $y + 6 = (x + 3)^2$.
On pose $Y = y + 6$ et $X = x + 3$, on obtient l'équation $Y = X^2$, ce qui montre que la courbe est une parabole. Son sommet S est l'origine du nouveau repère. Il est donc donné par $X = 0$ et $Y = 0$, c'est-à-dire $x = -3$ et $y = -6$. En conclusion, S a pour coordonnées $(-3; 6)$.
- 3 On réduit au même dénominateur :

$$2 + \frac{3}{x-1} = \frac{2(x-1) + 3}{x-1} = \frac{2x-2+3}{x-1} = \frac{2x+1}{x-1}.$$

- 4 L'expression $\frac{2x+1}{x-1}$ n'est définie que si le dénominateur est différent de 0, donc pour $x \neq 1$.

L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, qu'on peut aussi noter $] - \infty, +1[\cup]1, +\infty[$.

Pour les variations, considérons deux éléments a et b de $]1, +\infty[$ tels que $a < b$. On a donc $a - 1 < b - 1$ et comme ces deux nombres sont strictement positifs : $\frac{1}{a-1} > \frac{1}{b-1}$. On applique aux deux membres la fonction $x \mapsto 3x + 2$, qui est une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on en déduit que $\frac{3}{a-1} + 2 > \frac{3}{b-1} + 2$, c'est-à-dire $f(a) > f(b)$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

Si a et b sont éléments de $] - \infty, +1[$, on a de même $a - 1 < b - 1$, et comme ces deux nombres sont strictement négatifs, on a encore $\frac{1}{a-1} > \frac{1}{b-1}$, puis $f(a) > f(b)$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $] - \infty, 1[$.

Voir énoncé page 270

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Fonctions affines et linéaires

5 min

Corrigé
p. 284

Répondre par « vrai » ou « faux » aux propositions suivantes.

- 1 On considère la fonction $f : x \mapsto -\frac{21}{2}x + 7$ définie sur $\mathbb{R}$.
 - a f est une fonction linéaire.
 - b f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
 - c La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en $-\frac{7}{3}$.
 - d -98 est l'image de 10 par f .
- 2 Un carré de côté x a un périmètre noté $\mathcal{P}(x)$ et une aire notée $\mathcal{A}(x)$.
 - a $\mathcal{P}$ est une fonction linéaire.
 - b $\mathcal{A}$ est une fonction affine.
 - c Il n'existe pas de valeur de x autre que 0 telle que $\mathcal{P}(x) = \mathcal{A}(x)$.

2 V/F Fonctions inverse et carré

5 min

Corrigé
p. 284

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

- a La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- b Les courbes représentatives des fonctions inverse et carré se coupent en un seul point.
- c La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -x^2 + 2x - 1$ a un sommet de coordonnées $(1 ; 0)$.

Fonctions affines et linéaires

3 Fonctions affines



10 min

Corrigé
p. 285

Lycée Édouard Herriot, Lyon

Trouver une fonction affine f telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $f(1) = \frac{1}{4}$.

4 Alignement de points



10 min

Corrigé
p. 285

Lycée Les Francs-Bourgeois, Paris

Dans un repère (O, I, J) , on considère les points $A(-1 ; -5)$, $B(2 ; 1)$ et $C(3 ; 3)$.

- 1 Soit $f : x \mapsto ax + b$ la fonction affine dont la courbe représentative passe par A et B . Déterminer a et b .
- 2 Les points A , B et C sont-ils alignés ?

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

5 Fonctions affines



20 min

Corrigé
p. 285

Lycée P. et I. Joliot-Curie, Nanterre

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions affines ? Si oui, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite qui les représente ainsi que leur sens de variation :

1 $f_1 : x \mapsto \frac{3 + 11x}{6}$.

2 $f_2 : x \mapsto -5$.

3 $f_3 : x \mapsto 7 - x$.

4 $f_4 : x \mapsto \frac{5x + 4}{x - 8}$.

5 $f_5 : x \mapsto \frac{2}{3}x$.

6 $f_6 : x \mapsto (x - 4)(x + 2) - x^2 + 10$.

Fonction carré

6 Étude graphique

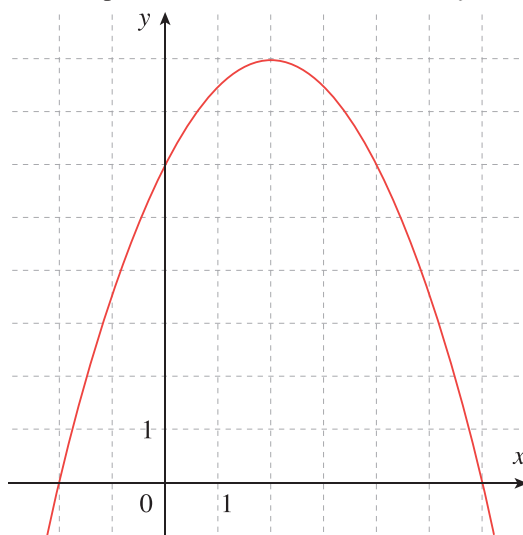


20 min

Corrigé
p. 286

Lycée Vaugelas, Chambéry

La figure ci-dessous représente la courbe de la fonction f .



1 Quelle semble être la nature de cette courbe ?

2 Dresser le tableau de variations de f .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- 3 En fait, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'une des expressions suivantes :

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

(c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

Laquelle ? (Donner une justification simple).

7 Sous diverses formes



15 min

Corrigé
p. 287

Lycée Les-Francis-Bourgeois, Paris

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$.

- 1 Montrer que $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$.
- 2 Montrer que $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.
- 3 Déterminer les points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

8 Aires et fonctions

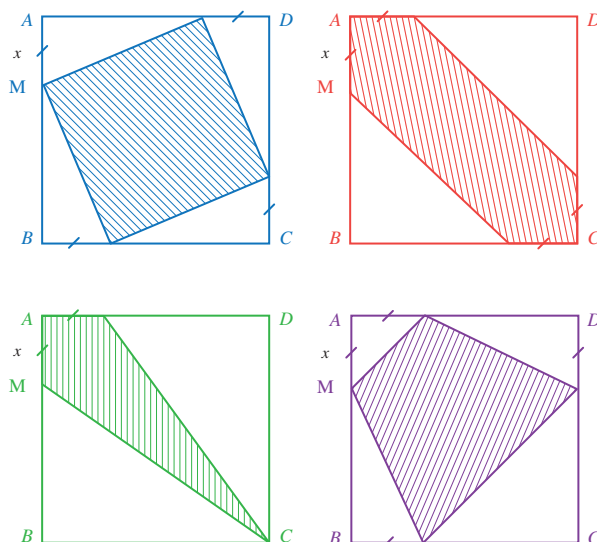


40 min

Corrigé
p. 287

Lycée Paul Langevin, Suresnes

Dans un carré $ABCD$ de côté 1, on inscrit quatre figures.



FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

- 1 Déterminer, dans chaque configuration, l'aire de la partie hachurée en fonction de $x = AM$.
- 2 Dédire des représentations graphiques des quatre aires, selon les valeurs de x , quelle est la figure hachurée qui a l'aire la plus grande ; la plus petite.

9 Variations



20 min

Corrigé
p. 289

Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, Étampes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- 1 Vérifier que $f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1)(4 - (x_1 + x_2))$.
- 2 Démontrer les deux propriétés suivantes :
 - si $x_1 < x_2 \leq 2$ alors $x_1 + x_2 < 4$;
 - si $2 \leq x_1 < x_2$ alors $x_1 + x_2 > 4$.
- 3 En déduire que f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 2]$ et que f est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variations de f .
- 4 Vérifier que $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.
- 5 Résoudre l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.
- 6 Utiliser les questions 3 et 5 pour résoudre l'inéquation $x^2 \geq 4x - 3$.
- 7 Retrouver le résultat de la question 6 en utilisant la question 4.

10 Intersections



20 min

Corrigé
p. 290

Lycée Michelet, Vanves

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et le point $A(2 ; 4)$.

- 1 Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_m$ la droite passant par A et de coefficient directeur m . Vérifier que $\mathcal{D}_m$ admet pour équation $y = m(x - 2) + 4$.
- 2 Tracer les droites $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_{-1}$ et déterminer graphiquement les intersections de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_1$.
- 3 Déterminer par le calcul les intersections de $\mathcal{D}_m$ et $\mathcal{P}$, et déterminer le réel m_0 tel que cette intersection soit réduite à A . Tracer la droite $\mathcal{D}_{m_0}$. Que remarquez-vous et comment pouvez-vous appeler cette droite ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

11 Aire minimale

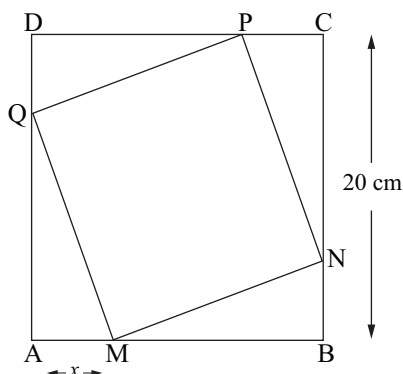


30 min

Corrigé
p. 291

Lycée Jacques Decour, Paris

Dans le carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-dessous :



On pose $x = AM = BN = CP = DQ$, avec $0 \leq x \leq 20$.

- 1 Calculer l'aire du carré $MNPQ$ en fonction de x .
Cette aire, exprimée en cm^2 , sera notée $S(x)$ et sera donnée sous la forme développée et réduite.
- 2 Vérifier que $2(x - 10)^2 + 200 = 2x^2 - 40x + 400$.
- 3 Quelle est l'aire minimale du carré $MNPQ$?
- 4 On veut déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ ne dépasse pas 272 cm^2 .

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : x, S nombres réels
Initialisation
  x ← 0
  S ← 400
Début :
  Tant que S ≥ 272
    x ← x+0.01
    S ← 2x2 - 40x + 400
  Fin Tant que
Sortie : Afficher x
```

- (a) Expliquer la raison pour laquelle cet algorithme ne répond pas à notre souhait.
- (b) On admet que $S(x) = 272$ pour des valeurs de x entières. Modifier alors l'algorithme afin de répondre à notre problème et programmer le en Python.

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

12 Les coins du carré

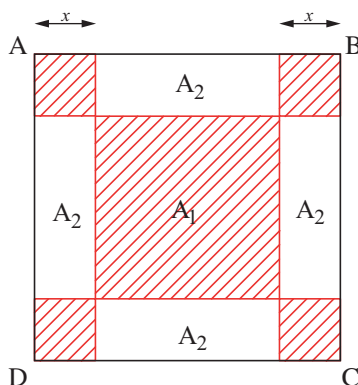


15 min

Corrigé
p. 292

Lycée Les-Francis-Bourgeois, Paris

Un carré $ABCD$ de côté 4 cm est partagé selon le schéma suivant :



Les « coins » sont des carrés de côtés x tel que $x \in [0 ; 2]$.

On note A_1 l'aire de la figure hachurée et A_2 l'aire de ce qui n'est pas hachuré.

- 1 Exprimer en fonction de x l'aire A_1 .
- 2 Exprimer en fonction de x l'aire A_2 .
- 3 Montrer que $A_2 = -8(x - 1)^2 + 8$. En déduire la valeur de x pour laquelle A_2 est maximale.

13 Algorithmique



15 min

Corrigé
p. 293

Lycée Stanislas, Paris

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 19x - 14.$$

On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution entière comprise entre 0 et 20.

- 1 Écrire un algorithme qui permet de la trouver.
- 2 Programmer cet algorithme en Python ou sur la calculatrice.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Fonction inverse

14 De l'inverse à une fonction carré



15 min

Corrigé
p. 294

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On s'intéresse aux points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2x - 7$.

- 1 Montrer que chercher les abscisses de ces éventuels points revient à résoudre l'équation $h(x) = 0$, où $h(x) = \frac{-2x^2 + 7x + 1}{x} = 0$.
- 2 Montrer que $-2x^2 + 7x + 1 = -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{57}{8}$.
- 3 En déduire l'abscisse des points d'intersection cherchés initialement.

15 Changement de repère



20 min

Corrigé
p. 295

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo avec

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on considère la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}.$$

- 1 Quel est le domaine de définition de f ?
- 2 Montrer que $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$.
- 3 On considère les points $O'(2 ; 1)$, $I'(3 ; 1)$ et $J'(2 ; 2)$ et le repère (O', I', J') .
On convient de noter $(X ; Y)$ les coordonnées des points dans ce nouveau repère, et $(x ; y)$ celles des points dans (O, I, J) .
 - (a) Expliquer les égalités : $x = X + 2$ et $y = Y + 1$.
 - (b) Montrer que dans (O', I', J') , tout point $M(X ; Y)$ de $\mathcal{C}$ est tel que $Y = \frac{1}{X}$.
Que peut-on en conclure sur $\mathcal{C}$?

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

Fonctions racine et cube

16 Domaine



5 min

Corrigé
p. 296

Lycée Stanislas, Paris

Quel est l'ensemble de définition de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 - 2}{x + 5}} ?$$

17 Parité



20 min

Corrigé
p. 297

Lycée Marcelin Berthelot, Châtellerauld

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et étudier leur parité.

1 $f_1(x) = \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

2 $f_2(x) = \frac{x^2 - 5}{x^3}$

3 $f_3(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}}$

4 $f_4(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$

5 $f_5(x) = \frac{1}{x - 1}$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 **V/F** Fonctions affines et linéaires

Enoncé
p. 276

- 1** **a** Faux. $f(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -\frac{21}{2}$ et $b = 7$ donc f est une fonction affine.
b Vrai. $a < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
c Faux. Pour connaître l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \iff -\frac{21}{2}x + 7 = 0$$

$$\iff -\frac{21}{2}x = -7$$

$$\iff x = -7 \times \left(-\frac{2}{21}\right)$$

$$\iff x = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en $\frac{2}{3}$.

- d** Vrai. $f(10) = -\frac{21}{2} \times 10 + 7 = -21 \times 5 + 7 = -98$, donc 98 est bien l'image de 10 par la fonction f .
2 **a** Vrai. $\mathcal{P}(x) = 4x$ car le périmètre d'un carré est égale au quadruple de la mesure d'un côté. $\mathcal{P}(x)$ est de la forme ax donc $\mathcal{P}$ est bien une fonction linéaire.
b Faux. $\mathcal{A}(x) = x^2$ donc l'aire est la fonction carré.
c Faux. $\mathcal{P}(x) = \mathcal{A}(x) \iff 4x = x^2$

$$\iff x^2 - 4x = 0$$

$$\iff x(x - 4) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } x = 4.$$

Donc l'aire est égale au périmètre quand $x = 4$ et quand $x = 0$.

2 **V/F** Fonctions inverse et carré

Enoncé
p. 276

- a** Faux. La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R}$.
b Vrai. En effet, il n'existe qu'un nombre dont l'inverse est égal à son carré : $x = 1$. Donc le seul point d'intersection est le point de coordonnées $(1 ; 1)$.
c Vrai. $-x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x - 1)^2$. Cette dernière forme $(a(x - p)^2 + q)$, forme canonique) nous indique que le sommet de la parabole qui représente la fonction a pour coordonnées $(p ; q) = (1 ; 0)$.

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

3 Fonctions affines

Enoncé
p. 276

Lycée Édouard Herriot, Lyon

Une fonction affine est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux réels fixés.

Dans un premier temps, supposons que f existe, donc que $a \times \frac{1}{2} + b = 1$ et que $a \times 1 + b = \frac{1}{4}$.

Pour trouver a et b , nous devons donc résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b = 1 \\ a + b = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{a}{2} = \frac{3}{4} \\ a + b = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{7}{4} \end{cases}$$

La fonction affine f est donc définie par :

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Vous pouvez vérifier que cette fonction répond à la question.

4 Alignement de points

Enoncé
p. 276

Lycée Les Francs-Bourgeois, Paris

1 Notons $\mathcal{D}$ la droite représentant la fonction f dans (O, I, J) .

$$\begin{array}{ll} \bullet A \in \mathcal{D} \iff f(x_A) = y_A & \bullet B \in \mathcal{D} \iff f(x_B) = y_B \\ \iff f(-1) = -5 & \iff f(2) = 1 \\ \iff -a + b = -5 & \iff 2a + b = 1 \\ \iff b = -5 + a; & \iff 2a + (-5 + a) = 1 \\ & \iff 3a = 6 \\ & \iff a = 2. \end{array}$$

Donc $a = 2$ et $b = -5 + 2 = -3$.

Finalement, on trouve : $f(x) = 2x - 3$.

2 $f(3) = 2 \times 3 - 3 = 6 - 3 = 3$ donc $f(x_C) = y_C$; par conséquent, $C \in \mathcal{D}$, ce qui signifie que les points A , B et C sont alignés.

5 Fonctions affines

Enoncé
p. 277

Lycée P. et I. Joliot-Curie, Nanterre

1 f_1 est bien sûr une fonction affine, puisqu'on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{11}{6}x + \frac{3}{6}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

L'ordonnée à l'origine de la droite qui représente f_1 est $\frac{3}{6}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. Son coefficient directeur est $\frac{11}{6}$. Il est positif (strictement), donc f_1 est croissante (strictement).

2 f_2 est une fonction constante (donc en particulier affine), représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses, d'ordonnée à l'origine -5 . Le coefficient directeur de cette droite « horizontale » est bien entendu 0.

3 f_3 est clairement une fonction affine. L'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 7, son coefficient directeur est -1 . Il est négatif et non nul, donc la fonction est strictement décroissante.

4 f_4 n'est pas une fonction affine. J'espère que cela vous a sauté aux yeux ($f(x)$ ne peut être mis sous la forme $ax + b$). La méthode la plus rapide pour prouver que f_4 n'est pas une fonction affine est de remarquer que f n'est pas définie en 8, alors que les fonctions affines sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5 f_5 est une fonction affine. Elle est même linéaire : l'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 0. Le coefficient directeur de cette droite est $\frac{2}{3}$; il est positif et non nul, donc f_5 est strictement croissante.

6 Si on jette un coup d'œil (trop !) rapide sur f_6 , celle-ci ne paraît pas affine, vue la présence de termes en x^2 . Néanmoins, si l'on développe la formule, on obtient :

$$f_6(x) = x^2 + 2x - 4x - 8 - x^2 + 10 = -2x + 2.$$

f_6 est donc bien une fonction affine. L'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 2, son coefficient directeur est -2 . f_6 est donc strictement décroissante.

6 Étude graphique

➔ **Énoncé**
p. 277

Lycée Vaugelas, Chambéry

1 La courbe est une parabole.

2 On déduit de la courbe les variations de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	8	$-\infty$

3 $f(0) = 6$ et $f(-3) = 0$. La seule solution est donc :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6.$$

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

7 Sous diverses formes

Enoncé
p. 278

Lycée Les-Francis-Bourgeois, Paris

1 On développe :

$$(2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 3x - 2 = f(x).$$

$$\begin{aligned} 2 \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{25}{8} &= 2 \left(x^2 + 2 \times \frac{3}{4} \times x + \frac{3^2}{4^2} \right) - \frac{25}{8} \\ &= 2 \left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} \right) - \frac{25}{8} \\ &= 2x^2 + 3x + \frac{9}{8} - \frac{25}{8} \\ &= 2x^2 + 3x - \frac{16}{8} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

3 Pour déterminer les points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$. Il est donc préférable de prendre la forme factorisée.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (2x - 1)(x + 2) = 0 \\ &\iff 2x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0 \\ &\iff x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -2. \end{aligned}$$

Les points d'intersection ont donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et $(-2; 0)$.

8 Aires et fonctions

Enoncé
p. 278

Lycée Paul Langevin, Suresnes

1 • Pour la première configuration (bleue), on peut remarquer qu'il faut enlever au carré, d'aire 1, quatre triangles rectangles identiques, de côtés x et $1 - x$. L'aire cherchée s'écrit donc :

$$A_1(x) = 1 - 4 \frac{x(1-x)}{2} = 2x^2 - 2x + 1.$$

On peut retrouver aussi ce résultat en remarquant que l'aire hachurée est un carré, dont le côté est l'hypoténuse des petits triangles, et d'après le théorème de Pythagore :

$$A_1(x) = x^2 + (1 - x)^2, \text{ soit encore : } A_1(x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

• Pour la seconde configuration (rouge), il faut enlever deux triangles rectangles isocèles, de côté $1 - x$, d'où :

$$A_2(x) = 1 - (1 - x)^2.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- Pour la troisième configuration (verte), on enlève encore deux triangles rectangles, de côtés 1 et $1 - x$, d'où :

$$A_3(x) = 1 - (1 - x) = x.$$

- On peut appliquer la même méthode au trapèze de la quatrième configuration (violette). Plus astucieusement, si on considère les diagonales du trapèze, on fait apparaître des rectangles, la moitié est hachurée. Le trapèze a donc pour aire la moitié de celle du carré, soit :

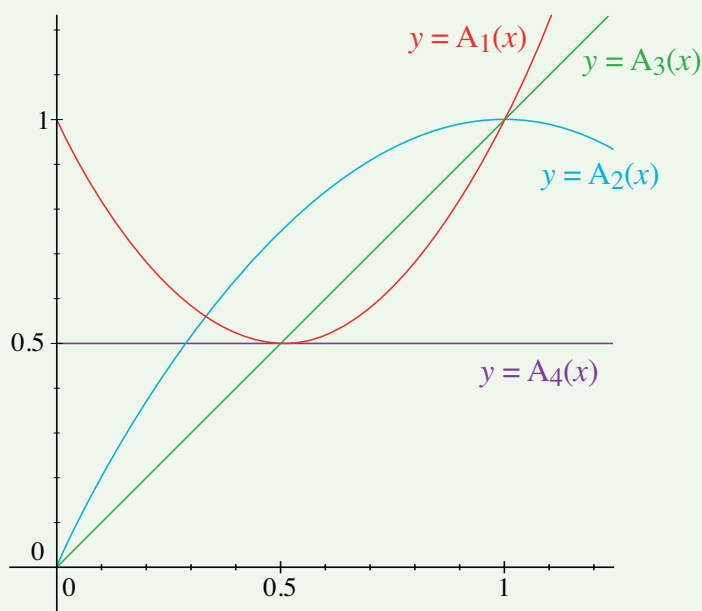
$$A_4(x) = \frac{1}{2}.$$

- 2** Vu le tracé des quatre courbes, on voit que l'aire la plus petite est $A_3(x)$ si $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, puis $A_4(x)$ pour $x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

Pour l'aire la plus grande, la compétition est entre $A_1(x)$ et $A_2(x)$. Vérifions pour quels x ces deux expressions sont égales. On calcule :

$$\begin{aligned} A_1(x) - A_2(x) &= 2x^2 - 2x + (1 - x)^2 \\ &= 2x(x - 1) + (1 - x)^2 \\ &= (1 - x)(1 - 3x) \end{aligned}$$

donc les courbes se coupent au point d'abscisse $\frac{1}{3}$. On en déduit que l'aire la plus grande est $A_1(x)$ si $x \in \left[0 ; \frac{1}{3}\right]$, et $A_2(x)$ si $x \in \left[\frac{1}{3} ; 1\right]$.



FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

9 Variations

Enoncé
p. 279

Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, Étampes

1 On factorise :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= (x_1^2 - 4x_1 + 3) - (x_2^2 - 4x_2 + 3) \\ &= x_1^2 - 4x_1 + 3 - x_2^2 + 4x_2 - 3 \\ &= x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 4(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)[4 - (x_1 + x_2)]. \end{aligned}$$

2 Si $x_1 < x_2$, on peut écrire $x_1 + x_2 < 2x_2$. Avec l'hypothèse : $x_2 \leq 2$, on obtient $x_1 + x_2 < 4$.

Toujours avec $x_1 < x_2$, on écrit $x_1 + x_2 > 2x_1$. Avec $x_1 \geq 2$, on peut écrire $x_1 + x_2 > 4$.

3 Donnons-nous x_1 et x_2 dans $] -\infty ; 2]$, tels que $x_1 < x_2$. D'après les questions précédentes, on sait que $4 - (x_1 + x_2) > 0$ et, par ailleurs, $x_2 - x_1 > 0$, donc $f(x_1) - f(x_2) > 0$. On en déduit que $f(x_1) > f(x_2)$, donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 2]$.

De la même façon, on montre que dans $[2 ; +\infty[$, f est strictement croissante. Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$
		-1	

4 Il suffit de développer $(x - 1)(x - 3)$.

5 D'après la factorisation précédente, l'égalité est vérifiée pour $x = 1$ et $x = 3$, donc $S = \{1 ; 3\}$.

6 L'inéquation proposée revient à l'inéquation : $f(x) \geq 0$. f s'annule pour $x = 1$ et $x = 3$. Sur $] -\infty ; 1]$, f décroît, donc f est positive. Elle devient négative à partir de 1. Sur $[2 ; +\infty[$, la fonction croît, passe par la valeur 0 en $x = 3$, puis devient positive. Ces considérations apparaissent plus clairement dans le tableau de variations :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
		0	$\searrow$	0	$\nearrow$
			-1		

L'ensemble des solutions est donc :

$$S =]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 7 L'énoncé vous demande en fait de procéder directement à la résolution de l'inéquation, par un tableau de signes :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x - 1$	—	0	+	+
$x - 3$	—	—	0	+
$f(x)$	+	0	—	+

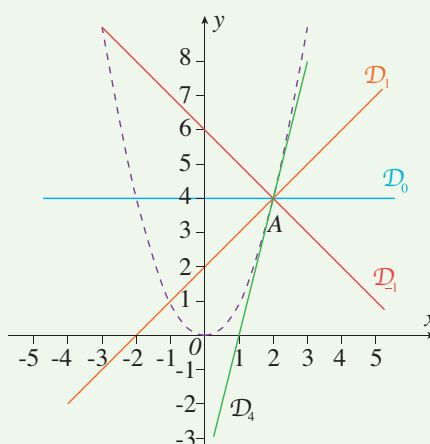
On retrouve le résultat de la question précédente.

10 Intersections

Enoncé
p. 279

Lycée Michelet, Vanves

- 1 La droite d'équation $y = m(x - 2) + 4$ est de coefficient directeur m , et elle passe visiblement par A , puisque $m(2 - 2) + 4 = 4$. Il s'agit donc bien de $\mathcal{D}_m$.



- 2 $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_{-1}$ ont pour équations respectives $y = 4$, $y = x + 2$ et $y = -x + 6$. En lisant l'ordonnée à l'origine, on peut donc représenter ces trois droites, sachant qu'elles passent toutes par A et, respectivement, par les points de coordonnées $(0 ; 4)$, $(0 ; 2)$ et $(0 ; 6)$. On peut lire les coordonnées des deux points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}_1$ sur la figure. L'un est bien sûr A , et l'autre a pour coordonnées $(-1 ; 1)$.
- 3 Un point d'intersection de coordonnées $(x ; y)$ vérifie à la fois l'équation de la droite et celle de la parabole, donc :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = m(x - 2) + 4 \end{cases}$$

On est donc amené à résoudre l'équation :

$$x^2 = m(x - 2) + 4.$$

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

On obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= m(x - 2) + 4 - x^2 = m(x - 2) - (x^2 - 4) \\ &= m(x - 2) - (x - 2)(x + 2) \\ &= (x - 2)(m - x - 2). \end{aligned}$$

On a enfin deux solutions (donc deux points d'intersection) :

- $x = 2$ (donc $y = 4$, on retrouve le point A) ;
- $x = m - 2$, donc $y = (m - 2)^2$.

Il y a en général deux points d'intersection, sauf ... quand ces deux points sont confondus, c'est-à-dire si $m - 2 = 2$, donc $m = 4$. La droite $\mathcal{D}_4$ n'a que le seul point d'intersection A avec la parabole. Traçons-la. Il s'agit de la tangente en A à la parabole.

11 Aire minimale

Enoncé
p. 280

Lycée Jacques Decour, Paris

- 1 Le triangle AMQ est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} QM^2 &= x^2 + (20 - x)^2 \\ &= x^2 + 400 - 40x + x^2 \\ &= 2x^2 - 40x + 400. \end{aligned}$$

L'aire du carré $MNPQ$ est égale à QM^2 donc :

$$S(x) = 2x^2 - 40x + 400.$$

- 2 On développe :

$$\begin{aligned} 2(x - 10)^2 + 200 &= 2(x^2 - 20x + 100) + 200 \\ &= 2x^2 - 40x + 400 \\ &= S(x). \end{aligned}$$

- 3 $S(x) = 200 + \underbrace{2(x - 10)^2}_{\geq 0} \geq 200$. L'aire minimale de $MNPQ$ est donc égale à 200 cm^2 .

- 4 (a) Dans l'algorithme, on voit que les instructions de la boucle « Tant que » s'exécutent dès lors que S est supérieur à 272. La valeur initiale de S étant 400, on entre dans la boucle et on calcule $S(x)$ jusqu'à trouver un résultat inférieur à 272. Quand ce sera le cas, on sortira de la boucle et la valeur de x sera affichée.
- Cependant, l'algorithme n'affiche qu'une valeur... Et on se doute bien qu'il y en a d'autres ! Il ne répond donc pas à notre souhait de trouver toutes les valeurs de x telles que $S(x) < 272$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(b) Un algorithme possible est le suivant :

```
Variables : x, S nombres réels
Initialisation
  x ← 0
  S ← 400
Début :
  Tant que x < 20
    x ← x+1
    S ← 2x2 - 40x + 400
    Si S = 272 alors
      Afficher x
    Fin Si
  Fin Tant que
```

L'énoncé nous dit que les valeurs de x telles que $S(x) = 272$ sont entières donc nous allons faire un balayage de l'intervalle $[0;20]$ avec un pas de x égal à 1 (c'est-à-dire que x va augmenter de 1 en 1). Pour chaque valeur de x , on calcule $S(x)$ et si le résultat est égal à 272, on affiche la valeur de x .

D'après les variations de S , la première valeur qui s'affiche est la première valeur de x à partir de laquelle $S(x) \leq 272$ et la seconde sera celle à partir de laquelle $S(x) \geq 272$. Ainsi, entre les deux valeurs affichées, on est assuré que $S(x) \leq 272$.

Voici le programme Python correspondant :

```
x = 0
S = 400
while x < 20 :
    x = x + 1
    S = 2 * x**2 - 40 * x + 400
    if S == 272 :
        print(x)
```

12 Les coins du carré

Lycée Les-Francis-Bourgeois, Paris

→ Enoncé
p. 281

1 L'aire d'un coin est x^2 et l'aire du carré central est $(4 - 2x)^2$ donc :

$$\begin{aligned} A_1 &= 4x^2 + (4 - 2x)^2 \\ &= 4x^2 + 16 - 16x + 4x^2 \\ &= 8x^2 - 16x + 16. \end{aligned}$$

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned} 2 \quad A_2 &= 4^2 - A_1 \\ &= 16 - (8x^2 - 16x + 16) \\ &= 16 - 8x^2 + 16x - 16 \\ &= -8x^2 + 16x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad -8(x-1)^2 + 8 &= -8[(x-1)^2 - 1] \\ &= -8(x^2 - 2x + 1 - 1) \\ &= -8(x^2 - 2x) \\ &= -8x^2 + 16x \\ &= A_2. \end{aligned}$$

La courbe de la fonction $x \mapsto -8(x-1)^2$ est une parabole qui est maximale pour $x = 1$, donc A_2 est maximale pour $x = 1$.

On a alors $A_2 = 8 \text{ cm}^2$.

13 Algorithmique

Enoncé
p. 281

Lycée Stanislas, Paris

- 1 Puisqu'on nous dit que la racine est un nombre entier compris entre 0 et 20, il suffit de tester chacun de ces nombres.

```
Variables x , y : nombres
Début
  Pour x allant de 0 à 20 Répéter
    y <-- 3*x^2-19*x-14
    Si y = 0 Alors
      Afficher x
    Fin Si
  Fin Pour
Fin
```

2 En Python

```
live!
for x in range(0,21) :
    y = 3 * x**2-19*x-14
    if y == 0 :
        print(y)
```

Il faut se rappeler qu'en Python, la valeur finale de l'intervalle est exclue, il faut donc écrire `range(0, 21)` si on veut tester toutes les valeurs jusqu'à 20 inclus.

Notez également le double signe égale, opérateur qui teste l'égalité (==) et renvoie *True* ou *False*, à ne pas confondre avec le signe égale simple, opérateur d'affectation.

Sur Casio

```
===== RACINE =====
For 0→X To 20
3X2-19X-14→Y
If Y=0: Then X ◀
IfEnd
Next
```

Sur TI

```
PROGRAM: RACINE
:For(X,0,20) 0→X To 20
:3X2-19X-14→Y
:If Y=0
:Then
:Disp X
:End
:End
```

14 De l'inverse à une fonction carré

➔ **Énoncé**
p. 282

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

- 1** Notons $M(x ; y)$ l'un des éventuels points d'intersection des deux courbes. M est sur la courbe représentative de f donc $y = f(x)$; de même, M est sur celle de g donc $y = g(x)$ d'où $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \iff \frac{1}{x} = 2x - 7 \iff \frac{1}{x} - 2x + 7 = 0.$$

En mettant au même dénominateur, on obtient alors : $\frac{-2x^2 + 7x + 1}{x} = 0$.

- 2** Développons la forme donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} -2 \left(x - \frac{7}{4} \right)^2 + \frac{57}{8} &= -2 \left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} \right) + \frac{57}{8} \\ &= -2x^2 + 7x - \frac{49}{8} + \frac{57}{8} \\ &= -2x^2 + 7x + 1. \end{aligned}$$

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

3 Des questions précédentes, on déduit que

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{57}{8} = 0 \\ &\iff -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{57}{8} \\ &\iff \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{57}{8} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\iff \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{57}{16} \\ &\iff x - \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{57}{16}} \quad \text{ou} \quad x - \frac{7}{4} = -\sqrt{\frac{57}{16}} \\ &\iff x = \frac{\sqrt{57}}{4} + \frac{7}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{57}}{4} + \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, il y a deux points d'intersection, d'abscisses $x_1 = \frac{7 - \sqrt{57}}{4}$ et $x_2 = \frac{7 + \sqrt{57}}{4}$.

15 Changement de repère

→ **Enoncé**
p. 282

Lycée Fernand Daguin, Mérignac



1 L'expression de la fonction f contient un quotient donc f est définie quand le dénominateur de ce dernier est différent de 0.

Le domaine de définition de f est donc : $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \quad 1 + \frac{1}{x-2} &= \frac{x-2}{x-2} + \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{x-2+1}{x-2} \\ &= \frac{x-1}{x-2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

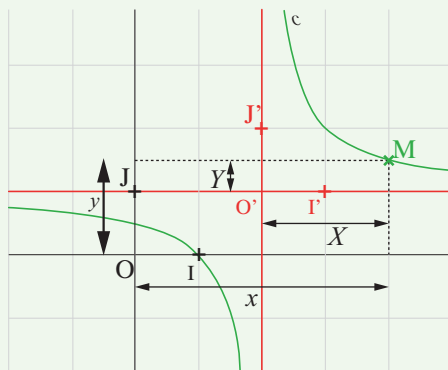
Suite du corrigé page suivante.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 (a)



On voit alors que $x = X + x_{O'} = X + 2$ et $y = Y + y_{O'} = Y + 1$.
Sur le schéma, toutes les coordonnées sont positives, mais les égalités sont bien sûr valables quand elles sont négatives.

(b) On sait que dans le repère (O, I, J) ,

$$y = f(x) = 1 + \frac{1}{x - 2};$$

ainsi, à l'aide des égalités trouvées à la question précédente, on obtient :

$$Y + 1 = 1 + \frac{1}{X + 2 - 2} \quad \text{soit} \quad Y = \frac{1}{X}.$$

On peut alors conclure que la fonction f est la fonction inverse dans le repère (O', I', J') et donc que $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

16 Domaine

Lycée Stanislas, Paris

Enoncé
p. 283

Pour déterminer l'ensemble de définition de f , il faut savoir pour quels x la fraction $g(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 5}$ existe et est positive.

À cause du dénominateur, il faudra exclure la valeur -5 .

Après avoir remarqué que $\frac{x^2 - 2}{x + 5} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x + 5}$, on dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	-5	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x - \sqrt{2}$	—	—	—	0	+
$x + \sqrt{2}$	—	—	0	+	+
$x + 5$	—	0	+	+	+
$g(x)$	—		+	0	+

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 8

Ainsi, $g(x) \geq 0$ si $-5 < x \leq -\sqrt{2}$ ou $x \geq \sqrt{2}$. L'ensemble de définition de f est donc une réunion de deux intervalles :

$$D_f =]-5, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[.$$

17 Parité

➔ **Enoncé**
p. 283

Lycée Marcelin Berthelot, Châtelleraut

- 1** $f_1(x)$ est définie quand son dénominateur est non nul, et que l'expression sous le radical est positive. On peut résumer ces deux conditions par : $x^2 - 1 > 0$, c'est-à-dire $x^2 > 1$.

C'est une inégalité entre nombres positifs, on obtient une inégalité équivalente en appliquant la racine carrée : $|x| > 1$.

Nous écrivons bien $\sqrt{x^2} = |x|$ et pas seulement x , sinon nous allons oublier la moitié des solutions !

Or $|x| > 1$ se traduit facilement par $x < -1$ ou $x > 1$.

L'ensemble de définition est donc $D_1 =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Cet ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 (si $x \in D_1$, alors $-x \in D_1$). On peut donc étudier la parité.

Prenons $x \in D_1$ et calculons $f_1(-x)$:

$$f_1(-x) = \frac{(-x)^3 - x}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{-x^3 - x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -f_1(x).$$

La fonction f_1 est donc impaire.

- 2** $f_2(x)$ est définie dès que son dénominateur est non nul, donc pour $x \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, l'ensemble de définition de f_2 est $D_2 = \mathbb{R}^*$. Cet ensemble est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D_2$,

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \frac{(-x)^2 - 5}{(-x)^3} \\ &= -\frac{x^2 - 5}{x^3} \\ &= -f_2(x). \end{aligned}$$

La fonction f_2 est elle aussi impaire.

- 3** Notons $g(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$. À cause du radical, $f_3(x)$ est définie si et seulement si $g(x)$ est définie et positive.

Le dénominateur de $g(x)$ est toujours strictement positif, donc $g(x) \geq 0$ si et seulement si $x^2 - 2 \geq 0$, c'est à dire $x^2 \geq 2$.

En raisonnant comme à la question 1, on obtient l'inégalité équivalente $|x| \geq \sqrt{2}$, d'où $x \leq -\sqrt{2}$ ou $x \geq \sqrt{2}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Conclusion : $D_3 =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.

Cet ensemble est symétrique par rapport à 0 et si $x \in D_3$,

$$g(-x) = \frac{(-x)^2 - 2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} = g(x)$$

et donc $f_3(-x) = \sqrt{g(-x)} = \sqrt{g(x)} = f_3(x)$.

On en déduit que f_3 est paire.

- 4 f_4 est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien entendu symétrique par rapport à 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_4(-x) = \frac{-x + 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x + 1}{x^2 + 1}$. On « sent » que cette expression n'est pas identique, ni opposée à $f_4(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$, mais il faut le prouver, d'autant que dans le cas de $x = 0$, on a une égalité. Deux méthodes sont possibles.

- On résout l'équation $f_4(-x) = f_4(x)$. Comme les dénominateurs sont les mêmes, on est vite ramené à $-x + 1 = x + 1$, donc $2x = 0$ puis $x = 0$, ce qui montre que l'égalité n'a lieu que pour le cas particulier $x = 0$: la fonction f_4 n'est donc pas paire. On procède ensuite de la même façon avec $f_4(-x) = -f_4(x)$ pour montrer que f_4 n'est pas impaire. Il y a mieux. En effet, en résolvant ces équations, on effectue un travail inutile.
- Il suffit de trouver un x pour lequel $f_4(-x) \neq f_4(x)$ pour affirmer que f_4 n'est pas paire, de même qu'il suffit de trouver un x pour lequel $f_4(-x) \neq -f_4(x)$ pour montrer que f_4 n'est pas impaire. Par exemple, $f_4(-1) = 0$ et $f_4(1) = 1$. Comme 0 et 1 ne sont ni égaux, ni opposés, f_4 n'est ni paire, ni impaire.

⚠ ATTENTION

Un entier est soit pair, soit impair. On a donc l'habitude de penser que ces deux mots sont des contraires.

Ce n'est pas le cas lorsqu'ils s'appliquent à des fonctions. Une fonction peut être paire (comme f_3), impaire (comme f_1 et f_2), ni l'une ni l'autre (comme f_4), et la fonction nulle est à la fois paire et impaire !

- 5 L'ensemble de définition de f_5 est $\mathbb{R} \setminus \{+1\}$. Il n'est pas symétrique par rapport à 0. La fonction f_5 n'a donc pas de parité.

Chapitre

9

Statistiques et probabilités

Plan du chapitre

1. Traitement de l'information
2. Probabilités

1 Traitement de l'information

Exercice type 1

Lycée Saint Aspais, Melun

 Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo avec 

Dans une classe de 30 élèves, il y a 12 filles et 18 garçons. Au contrôle de mathématiques, les filles ont obtenu :

7, 8, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 14, 17, 18

et les garçons :

5, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 14, 16.

- 1 Calculer la moyenne des notes pour les deux groupes (on arrondira les résultats au dixième près).
- 2 À partir de ces résultats, calculer la moyenne de la classe.
- 3 Par mesure de clémence, le professeur ajoute 1 point à toutes les notes. Quelle est la nouvelle moyenne ?
- 4 Le dernier garçon n'avait en fait pas 5, mais 8. Quelle est, finalement, la moyenne de la classe ?

Voir corrigé page 305

1.1 Bien manier les pourcentages

À la rentrée 2020, on compte en 2de A 20 filles et 15 garçons, soit 35 élèves en tout.

La *proportion* de filles dans la classe est $\frac{20}{35} \approx 0,571$.

Pour comparer plus aisément les proportions, on les exprime avec un dénominateur 100 : $\frac{20}{35} \approx \frac{57,1}{100}$ (le numérateur n'est pas toujours entier).

On dit alors que la proportion est de 57,1%.

➔ À RETENIR

Si n_{total} est l'effectif total d'une population (ici, le nombre d'élèves de 2de A) et n_{partiel} celui d'une sous-population (le nombre de filles de 2de A), alors

$$\text{proportion} = \frac{n_{\text{partiel}}}{n_{\text{total}}} = \frac{\text{pourcentage}}{100}.$$

En renversant l'égalité, on obtient : $\text{pourcentage} = 100 \times \frac{n_{\text{partiel}}}{n_{\text{total}}}.$

On note qu'une proportion exprime un quotient entre des grandeurs de même nature exprimées dans la même unité. Une proportion n'a donc pas d'unité. Si on divise le nombre d'élèves du lycée par le nombre de classes, on obtient une grandeur utile, exprimée en « élèves par classe », mais *ce n'est pas une proportion*.

Si un escargot a parcouru 15 cm sur une barre de 2 m, il faut exprimer ces deux longueurs *dans la même unité* pour calculer le pourcentage de la barre parcouru par l'escargot : $\frac{15}{200} = 0,075$, soit 7,5%.

En 2019, il y avait 36 élèves en 2de A. L'effectif total a donc diminué de 1.

La *variation absolue* de l'effectif est : -1 . La variation est ici absolue parce qu'elle n'exprime pas une proportion. On ne confondra pas avec la notion de valeur absolue, qui n'a rien à voir (distance entre un réel et 0).

La *variation relative* exprime quelle proportion de la population initiale représente la variation absolue. Il y avait 36 élèves en 2019, la baisse représente $\frac{1}{36} = 2,8\%$ de l'effectif.

➔ À RETENIR

$$\text{Variation relative} = \frac{\text{Variation absolue}}{\text{Valeur initiale}} = \frac{\text{Valeur finale} - \text{Valeur initiale}}{\text{Valeur initiale}}.$$

On prévoit pour 2021 une augmentation de l'effectif de 8,6%. La valeur de référence est l'effectif de 2020 ($n_{2020} = 35$) et l'effectif prévu est donc :

$$n_{2021} = n_{2020} + n_{2020} \times \frac{8,6}{100},$$

ou plus simplement : $n_{2021} = 1,086 \times n_{2020} \approx 38$.

Pour 2022, on s'attend cette fois à une baisse de 10,5%. Attention, l'effectif de référence a changé : c'est maintenant celui de 2021, soit 38 élèves, puisqu'on parle d'une baisse entre 2021 et 2022.

On peut calculer l'effectif de 2022 de deux manières.

Premièrement, on peut appliquer la méthode précédente :

$$n_{2022} = n_{2021} \times (1 - 0,105) = 38 \times (1 - 0,105) \approx 34.$$

Une autre méthode est de *composer* les pourcentages. L'effectif de 2020 est multiplié par $1 + 0,086$ pour obtenir n_{2021} , qui lui-même est multiplié par $1 - 0,105$. On peut donc calculer directement : $n_{2022} = n_{2020} \times (1 + 0,086) \times (1 - 0,105) \approx 34$.

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

Remarque : il arrive souvent que le calcul des pourcentages à la calculatrice donne une approximation avec de nombreux chiffres après la virgule, par exemple : $\frac{20}{35} \approx 57,14285714$. Une telle précision n'a pas de sens. En général, on se contente de 3 chiffres significatifs : le premier chiffre significatif est le premier chiffre non nul le plus à gauche (ici, 5). On conserve tous les zéros à sa gauche, s'il y en a (ne pas retirer les 0 de 0,0124, par exemple). Si on veut 3 chiffres significatifs, on conserve aussi les 2 chiffres suivants (qui peuvent être égaux à 0). Notez bien qu'il ne s'agit pas d'un nombre de chiffres après la virgule. Par exemple, 0,0023 a deux chiffres significatifs, 401 en a trois. On arrondit le troisième chiffre en fonction de ce qui suit (par exemple $0,5714 \approx 0,571$ mais $0,5718 \approx 0,572$).

1.2 Comment comparer des séries quantitatives ?

Un professeur compare les notes de deux élèves :

Paul	19	6	18	5
Pierre	10	10	12	12

On observe deux suites de quatre valeurs, appelées *séries statistiques*.

La moyenne de Paul est plus élevée que celle de Pierre.

La moyenne de Paul est :

$$\frac{19 + 6 + 18 + 5}{4} = 12.$$

La moyenne de Pierre est :

$$\frac{10 + 10 + 12 + 12}{4} = 11.$$

La moyenne reflète la *position* de la série statistique. On parle également d'indicateur de *tendance centrale*, ce qui signifie simplement qu'elle indique le « centre » de la série statistique. Dans notre exemple, les notes de Paul sont *globalement* meilleures.

La médiane, qui sépare les valeurs de la série (une fois ordonnée) en deux moitiés, est un autre indicateur de tendance centrale.

Cependant, Pierre est plus régulier que Paul. Paul a complètement raté deux devoirs. Les notes de Pierre sont moins *dispersées*.

Pour comparer deux séries statistiques, on doit tenir compte de ces deux caractéristiques : position et dispersion.

L'*étendue* $e = \max x_i - \min x_i$ est l'écart entre la plus grande valeur ($\max x_i$) et la plus petite ($\min x_i$). C'est un indicateur de dispersion : une faible étendue montre que la série est resserrée autour de sa moyenne. Il est rudimentaire car il ne dépend que des deux valeurs extrêmes de la série.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1.3 Qu'est-ce qu'une moyenne pondérée ?

On considère une série statistique de n valeurs réelles.

Nous utilisons les notations suivantes :

- $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont les valeurs observées ;
- $n_1, n_2, \dots, n_k$ les effectifs correspondants, ce qui signifie que la valeur x_i apparaît n_i fois dans la série ;
- $f_1, f_2, \dots, f_k$ les fréquences : $f_i = \frac{n_i}{n}$ est la *proportion* (donc, entre 0 et 1) du nombre des valeurs égales à x_i par rapport à l'effectif total n .

La moyenne de la série statistique est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_1 + x_2 \dots x_2 + \dots + x_k + \dots x_k}{n}$$

où chaque x_i est compté n_i fois.

On peut simplifier la formule :

- *Calcul à partir des effectifs* : $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$.
- *Calcul à partir des fréquences* : $\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k$.

Pour calculer la moyenne des valeurs x_i , on ne s'est pas contenté de la moyenne simple $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$. On a donné à chaque valeur x_i un *poids* correspondant à son effectif. On dit qu'on a calculé une moyenne des valeurs x_i , pondérée par les effectifs n_i ou les fréquences f_i (*poids* et *pondéré* sont des mots qui viennent du latin *pondus*, *ponderis* : le poids).

On peut décider d'accorder un poids qui n'est pas relatif à la fréquence. Par exemple, si on a eu 14 au devoir commun (coefficient 2), 12 au contrôle (coefficient 1) et 18 à l'interrogation surprise (coefficient 0,5), la moyenne pondérée est :

$$m = \frac{2 \times 14 + 1 \times 12 + 0,5 \times 18}{2 + 1 + 0,5} = 14.$$

Les coefficients sont choisis pour que la note du devoir commun ait plus d'importance que celle de l'interrogation surprise.

1.4 La linéarité de la moyenne, qu'est-ce que c'est ?

Nous étudions une série statistique donnée comme ci-dessus par les valeurs x_i , leurs effectifs respectifs n_i .

Si on applique une fonction affine aux valeurs x_i , c'est-à-dire que l'on calcule, pour chaque i , la valeur $y_i = mx_i + p$ (où m et p sont deux constantes).

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

Alors :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{n_1 y_1 + n_2 y_2 + \cdots + n_k y_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \\ &= \frac{n_1 (mx_1 + p) + n_2 (mx_2 + p) + \cdots + n_k (mx_k + p)}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \\ &= \frac{n_1 mx_1 + n_2 mx_2 + \cdots + n_k mx_k + n_1 p + n_2 p + \cdots + n_k p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \\ &= \frac{m(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k) + p(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \\ &= m \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} + p \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \\ &= m\bar{x} + p.\end{aligned}$$

On peut donc retrouver la moyenne $\bar{y}$ de la nouvelle série en appliquant la même fonction affine à la moyenne $\bar{x}$ de l'ancienne.

On utilise la linéarité de la moyenne sans même y penser lorsque l'on change d'unité. Par exemple, si dans un concours de saut en hauteur, la moyenne des sauts (en mètres) a été de 1,81, il est évident que la moyenne des sauts (en centimètres) a été de 181. Les valeurs x_i étaient exprimées en mètres, on obtient les valeurs y_i en centimètres en calculant $y_i = 100x_i$, et donc $\bar{y} = 100\bar{x}$.

Remarque : par linéarité, la précision des données se retrouve sur la moyenne. Lorsqu'on calcule une moyenne, on doit donc fournir un résultat raisonnable compte tenu de la précision des données. Donner une moyenne au cm près des distances parcourue en km par des avions n'a pas de sens. En revanche, parler d'une moyenne de 1,96 enfants par femme a un sens car le nombre d'enfants, dans chaque cas, est un entier, donc connu avec une précision infinie. On pourrait donc donner encore plus de chiffres. Cependant, on s'arrête en général à 3 chiffres significatifs car cela suffit pour les comparaisons et interprétations courantes.

1.5 L'écart inter-quartile

On compare deux séries de vingt notes rangées par ordre croissant. La série 1 :

6	6	7	8	8	10	10	10	11	11
12	12	12	14	15	17	17	18	18	20

et la série 2 :

6	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	20

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Ces deux séries ont la même moyenne (12,1) et la même étendue $20 - 6 = 14$. Or elles sont très différentes.

Pour mieux caractériser leur dispersion, on parcourt les valeurs dans l'ordre croissant. On atteint un *quartile* lorsque 25%, 50%, puis 75% des valeurs sont dépassées. Observons que les quartiles sont toujours des valeurs de la série.

La série 1 contient 20 notes. Lorsqu'on atteint la 5^{ème} note, c'est-à-dire 8, on peut affirmer qu'un quart des notes sont inférieures ou égales à 8 : 8 est le *premier quartile* q_1 de la série 1.

Le second quartile q_2 correspond à la 10^{ème} note, 11 (la moitié des notes sont inférieures ou égales à 11). Il est très proche de la *médiane* de la série (ici, 10 notes sont inférieures à 11, 10 notes supérieures à 12, la médiane est donc 11,5).

Le troisième quartile q_3 correspond à la 15^{ème} note, 15.

Par définition, l'écart inter-quartile est $q_3 - q_1$. Plus il est petit, plus la série est resserrée.

Il est moins sensible aux valeurs extrêmes de la série, puisqu'on ne tient compte ni du quart supérieur, ni du quart inférieur de la série.

Dans la série 2, on a : $q_1 = q_3 = 12$, donc l'écart inter-quartile est nul. La série est quasiment constante (les deux valeurs extrêmes 6 et 20 sont *aberrantes*).

1.6 Écart-type

L'étendue ou l'écart inter-quartile ont l'inconvénient de ne reposer, finalement, que sur deux valeurs particulières de la série.

Pour fabriquer un indicateur qui rende compte de tous les écarts $|x_i - \bar{x}|$, on pourrait calculer la moyenne de ces écarts.

Pour éviter les calculs avec les valeurs absolues, on préfère faire la moyenne des *carrés* : $(x_i - \bar{x})^2$. Une moyenne de carrés est homogène au carré des valeurs de la séries. On obtient une grandeur comparable à celles de la série en revenant à la racine carrée, d'où la formule de l'écart type :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{n_1 + \dots + n_p}}.$$

Lorsque σ est petit, tous les carrés $(x_i - \bar{x})^2$ et donc, comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, tous les écarts $|x_i - \bar{x}|$ sont petits, et la série est resserrée autour de sa moyenne.

Dans une série « normale », on observe habituellement 66% des données dans $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ et 95% des données dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$.

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9



Solution de l'exercice type 1

Lycée Saint Aspais, Melun

1 La calculatrice permet de calculer la moyenne des filles : environ 11,9, et la moyenne des garçons : environ 9,8.

2 On a calculé la moyenne de deux sous-groupes, on peut donc calculer celle de la classe :

$$\bar{x} \approx \frac{12 \times 11,9 + 18 \times 9,8}{12 + 18} \approx 10,6.$$

3 On avait des notes x_i , on ajoute 1 point à chacune, on obtient de nouvelles notes $y_i = x_i + 1$. Par linéarité de la moyenne :

$$\bar{y} = \bar{x} + 1 \approx 11,6.$$

4 On ajoute 3 points au garçon, donc 3 points au total des notes. Dans le calcul de la moyenne, ce total est divisé par 30 (effectif de la classe).

Finalement, on a ajouté $\frac{3}{30} = 0,1$ à la moyenne, qui devient : 11,7.

Voir énoncé page 299

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Probabilités

Exercice type 2

Lycée Montaigne, Paris

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
On suppose qu'il y a équiprobabilité.

1 Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?

2 La carte obtenue est un as. On le remet dans le paquet, on mélange et on tire de nouveau une carte. Quelle est la probabilité d'obtenir encore un as ?

3 On a encore obtenu un as ! On ne le remet pas dans le paquet et on tire une nouvelle carte. Quelle est la probabilité d'obtenir encore un as ?

Voir corrigé page 307

2.1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience (concrète ou abstraite), dont le résultat (appelé *issue*) n'est pas déterminé à l'avance. Par exemple, le jeu de pile ou face, un lancer de dé, la distribution de cartes à jouer sont des expériences aléatoires.

- *L'univers* est l'ensemble des issues de l'expérience. On le note souvent Ω . Par exemple, si on lance un dé à 6 faces, l'ensemble des issues est :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

- Un *événement* regroupe une ou plusieurs issues de l'expérience. C'est un sous-ensemble de Ω . Il est décrit par une propriété, par ex. $A = \text{« le résultat est pair »}$, ou tout simplement par ses éléments : $A = \{2; 4; 6\}$.

On considère deux événements A et B .

- $A \cup B$ (lu : « A ou B ») est l'événement qui contient toutes les issues de l'événement A et toutes celles de B .
- $A \cap B$ (lu : « A et B ») est l'événement qui contient les issues communes à A et B . Deux événements sont *incompatibles* s'ils ne comportent aucune issue commune (par exemple : « le résultat est 2 » et « le résultat est impair »).
- $\bar{A}$ est l'événement contraire de A . Il contient exactement toutes les issues qui ne sont pas dans A . En particulier, A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

2.2 Loi de probabilité

Soit un univers $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ contenant n issues.

Une *loi de probabilité* sur Ω est la donnée de n nombres p_i associés à chaque valeur x_i , pour $1 \leq i \leq n$, avec :

$$p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Dans le cas où $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, on dit que les issues sont *équiprobables* et dans ce cas, $p_i = \frac{1}{n}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Cette situation est souvent indiquée dans l'énoncé par des expressions comme « on choisit au hasard », « le dé n'est pas truqué », etc.

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience et qu'on observe la fréquence d'apparition f_i de chaque issue x_i , on s'aperçoit que ces fréquences sont toujours très proches d'une certaine valeur, qui est la probabilité théorique p_i : c'est ce qu'on appelle la *loi des grands nombres*.

Simulons avec Python une suite de 100 000 tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On obtient ainsi un échantillon de 100 000 tirages. Pour chaque échantillon, notons la proportion de « pile » obtenus (la fonction `randint(2)` fournit 0 ou 1 de manière équiprobable).

```
from numpy.random import randint
s = 0
for i in range(100000):
    s = s + randint(2)
print(s/100000)
```

On répète plusieurs fois l'expérience, et on obtient les proportions :

0,49808 ; 0,49783 ; 0,50053 ; 0,49804 ; 0,50163 ; 0,49903 ; 0,50104.

On n'obtient pas exactement 0,5, mais des valeurs très proches.

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

Plus précisément, la loi des grands nombres prévoit qu'au moins 95% des échantillons devrait présenter une fréquence comprise entre $p - \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $p + \frac{1}{\sqrt{n}}$, avec ici $n = 100\,000$ et $p = 0,5$. Toutes les valeurs ci-dessus sont bien comprises entre 0,497 et 0,503, ce qui est conforme à la théorie.

Inversement, on peut utiliser cette méthode pour estimer expérimentalement une probabilité qui n'est pas connue.

2.3 Probabilité d'un événement

Si $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ est un événement, la probabilité de l'événement A est, par définition : $P(A) = p_{i_1} + \dots + p_{i_k}$.

Dans le cas d'issues équiprobables, tous les p_i étant égaux à $\frac{1}{n}$, on a donc :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

Il existe deux cas particuliers :

- l'événement *certain* Ω regroupe tous les événements élémentaires.
On a donc :

$$P(\Omega) = 1 ;$$

- l'événement *impossible* $\emptyset$ ne contient aucun événement élémentaire.
On a donc :

$$P(\emptyset) = 0.$$

En faisant $P(A) + P(B)$, on compte deux fois la probabilité des événements élémentaires communs à A et B . On en déduit la formule :

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

En particulier :

- si A et B sont incompatibles, on a $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- comme $A \cup \bar{A} = \Omega$, on a : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

➡ Solution de l'exercice type 2

Lycée Montaigne, Paris

- 1 Il y a 32 cartes dans le jeu (32 issues possibles), dont 4 as (4 issues favorables). La probabilité d'obtenir un as est donc $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
- 2 Comme on remet la carte dans le paquet, le second tirage s'effectue dans les mêmes conditions que le précédent, et la probabilité d'obtenir un second as est encore de $\frac{1}{8}$.
- 3 Cette fois, au moment du second tirage, le paquet contient 31 cartes (31 issues possibles) et seulement 3 as (3 issues favorables) car on n'a pas remis la carte dans le paquet. La probabilité d'obtenir un as est cette fois : $\frac{3}{31}$.

Voir énoncé page 305

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 **V/F** **Variation d'une série statistique**

3 min

Corrigé
p. 317

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Si un commerçant augmente tous ses prix de 1 € :

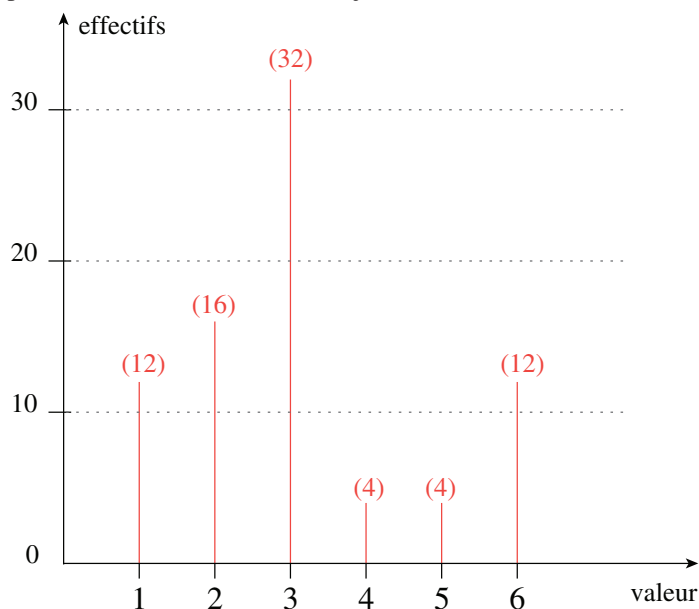
- ☐ a La moyenne des prix ne change pas.
- ☐ b L'étendue des prix ne change pas.
- ☐ c Le prix médian augmente de 1 €.
- ☐ d L'écart inter-quartile augmente de 1 €.

2 **V/F** **Jets de dé**

5 min

Corrigé
p. 317

On représente les résultats obtenus en jetant 80 fois un dé à 6 faces.



Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont correctes ?

- ☐ a Ce graphique est un histogramme.
- ☐ b La moyenne est 3,1.
- ☐ c L'écart inter-quartile est 3
- ☐ d Le mode est 3.
- ☐ e Le maximum est 3.
- ☐ f La fréquence de 5 est $\frac{4}{80}$.
- ☐ g Le dé est pipé (truqué).

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

3 V/F Probabilités

5 min

Corrigé
p. 317

Un jeu de 52 cartes contient 4 couleurs : pique, cœur, carreau, trèfle ; chaque couleur possède 13 cartes : as, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi. On tire au hasard une carte et on suppose qu'il y a équiprobabilité.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a** La probabilité de tirer l'as de pique est de $\frac{1}{52}$.
- b** La probabilité de tirer un as est de $\frac{1}{4}$.
- c** La probabilité de tirer un roi ou une reine est de $\frac{2}{13}$.

Statistiques

4 Temps de trajet



10 min

Corrigé
p. 318

Lycée Brizeux, Quimper

La répartition des 200 salariés d'une entreprise d'après la durée du trajet aller qu'ils effectuent pour se rendre à leur lieu de travail est relevée dans un tableau.

- 1** Compléter ce tableau :

Durée en minutes	n_i (effectifs)	f_i (fréquences) en %	Effectifs cumulés croissants
[5 ; 10[		5	
[10 ; 15[	30		
[15 ; 20[			110
[20 ; 25[		30	
[25 ; 30[			

- 2** On identifie chaque classe à son centre (ce qui revient, par exemple, à considérer qu'un temps de trajet entre 5 et 10 min. est égal à 7,5 min.) Déterminer la moyenne du temps de trajet. Expliquer pourquoi on peut arrondir à la minute près.
- 3** Calculer l'écart-type σ du temps de trajet. Pour combien de valeurs, approximativement, l'écart à la moyenne est-il inférieur à σ ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 Lait en poudre



10 min

Corrigé
p. 318

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

Les quantités de lait en poudre consommées dans une journée par les 45 bébés d'une crèche sont fournies, en grammes, dans le tableau ci-dessous.

Consommation	Effectifs
40	2
45	3
50	5
55	9
60	7
65	8
70	5
75	4
80	2

- Déterminer la consommation journalière moyenne des bébés.
- Déterminer les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants.
- En déduire les quartiles et l'écart inter-quartile.
- Quel pourcentage de bébés consomment dans une journée au moins 60 g de lait en poudre ?
- Quel pourcentage consomment moins de 70 g de lait en poudre ?

6 Série de masses



20 min

Corrigé
p. 319

Lycée Henri IV, Béziers

Les masses en kilogrammes d'une série de personnes se répartissent ainsi :

Masses	62	66	70	74	78	82	86
Fréquences	7 %	12 %	36 %	15 %	16 %	10 %	4 %
Fréquences cumulées							

- Calculer la moyenne des masses de ces personnes.
- Compléter le tableau par les fréquences cumulées croissantes.
- Déterminer l'écart inter-quartile et l'écart-type.
- Quel est le pourcentage des personnes pesant moins de 72 kg ?
- Quel est le pourcentage des personnes pesant au moins 80 kg ?

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

7 Âge des élèves



15 min

Corrigé
p. 320

Lycée Jacques Monod, Clamart

L'âge des élèves d'un lycée, à leur entrée en Seconde, se répartit comme suit :

Âge (ans)	13	14	15	16	17
Répartition (%)	4	12	52	24	8

- Calculer l'âge moyen à l'entrée en Seconde dans le lycée.
- Déterminer l'écart inter-quartile et l'écart-type. Que peut-on en dire ?

8 Notes à un contrôle



15 min

Corrigé
p. 320

Lycée Montesquieu, Bordeaux

On relève les notes obtenues au même contrôle par les élèves d'une même classe :

11	12	9	15	1	18	7
6	10	7	2	14	2	15
4	7	14	13	16	6	17
13	9	15	5	10	4	5
15	7	5	9	11	14	14

Calculer la moyenne et l'écart inter-quartile de cette série.

9 Lancers de dé



15 min

Corrigé
p. 320

Lycée Sacré-Cœur, Aix-en-Provence

On lance deux dés et on ajoute les numéros obtenus à chaque lancer. On remplit le tableau suivant :

Résultats	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs	302	497	904	1 086	1 408	1 640	1 341	1 122	813	575	312
Fréquences (en %)											

- Déterminer pour chaque colonne la fréquence (en %).
- Quelle est la moyenne et l'écart-type de cette série ?
- Quelle est la fréquence de l'événement : « la somme des deux dés est supérieure ou égale à 5 » ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

10 Prix de la baguette



15 min

Corrigé
p. 321

Lycée Descartes, Tours

Le prix d'une baguette a été relevé dans les boulangeries de Farineville :

Prix (en centimes)	75	80	85	90	95
Effectifs	2	5	8	4	1
Fréquences					

- 1 Compléter le tableau.
- 2 Déterminer la moyenne de cette série.
- 3 Quelle est sa classe médiane ?
- 4 Une boulangerie supplémentaire ouvre et vend sa baguette à 70 centimes. Quel est l'effet sur la moyenne ?

11 Télévision



30 min

Corrigé
p. 321

Lycée Paul Lapie, Courbevoie

Dans une classe de cinquième et une classe de seconde, on a demandé aux élèves le nombre d'heures par semaine consacrées à regarder la télévision.

Classe de seconde (32 élèves) :

Temps (h)	2	6	7	8	9	10	11	14	15
Effectifs	1	2	1	1	2	5	1	1	4

Temps (h)	16	17	18	20	21	22	23	24
Effectifs	1	1	4	3	1	1	2	1

Classe de cinquième (27 élèves) :

Temps (h)	0	4	5	8	9	10	11	12	13
Effectifs	1	1	1	1	2	3	2	2	1

Temps (h)	15	16	20	28	30	31	32	40	54	56
Effectifs	3	1	1	1	1	1	1	2	1	1

- 1 Pour chaque série, calculer la moyenne, et l'écart inter-quartile.
- 2 Comparer et commenter les résultats des deux séries à l'aide des résultats de la question précédente.
- 3 Donner la distribution des fréquences en pourcentage de la classe de seconde. Quelle est la fréquence en pourcentage de l'événement : « temps inférieur à 14 h » ?
- 4 On regroupe les données des deux séries pour construire une nouvelle série. Calculer la moyenne de la nouvelle série en utilisant les moyennes des deux séries précédentes.

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

12 Course à pied



20 min

→ Corrigé
p. 322

Lycée Claude Bernard, Paris

Dans un groupe de 25 coureurs de 100 m (15 femmes et 10 hommes) :

- 1 La moyenne des temps des femmes est de 12,32 s ; celle des hommes est de 11,48 s. Quelle est la moyenne de l'ensemble des coureurs ?
- 2 Après un mois d'entraînement, la moyenne des temps des femmes a diminué de 0,21 s et celle des hommes a diminué de 0,13 s. De combien la moyenne de l'ensemble a-t-elle varié ?
- 3 L'entraîneur sélectionne alors 10 hommes et 10 femmes. Outre les 10 hommes, il choisit les 10 femmes les plus rapides, dont la moyenne des temps est de 11,97 s. Quelle est la moyenne des temps des femmes qui n'ont pas été sélectionnées ?

13 Notes d'un élève



10 min

→ Corrigé
p. 323

Lycée Camille Sée, Paris

Après 4 devoirs, la moyenne d'un élève est 9,5. Quelle doit être sa cinquième note pour que sa moyenne soit de 10 ?

Probabilités

14 Cartes



10 min

→ Corrigé
p. 323

Lycée Marie Curie, Sceaux

On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire une carte au hasard. On suppose qu'il y a équiprobabilités. On note A l'événement « la carte est un as » et P l'événement « la carte est un pique ».

- 1 Quelle est la probabilité de A ? De P ?
- 2 Décrire l'événement $A \cap P$ et donner sa probabilité.
- 3 Décrire l'événement $A \cup P$ et donner sa probabilité.
- 4 Quelle est la probabilité que la carte obtenue ne soit pas un as ?

15 Jeu de dés



15 min

→ Corrigé
p. 324

Lycée Edgar Quinet, Paris

Les faces d'un dé sont numérotées de 1 à 6. On jette ce dé deux fois de suite et on forme un nombre à 2 chiffres, celui des dizaines étant le chiffre obtenu au premier jet, celui des unités étant celui obtenu au second jet.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- 1 Reproduire et compléter le tableau ci-dessous, afin d'écrire tous les résultats possibles.

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13			
2	21					
3		32				
4						
5						
6						

Quelle est la probabilité de chaque résultat ?

- 2 Calculer : la probabilité p_1 que le résultat soit un multiple de 5, la probabilité p_2 qu'il soit pair, la probabilité p_3 qu'il soit supérieur à 30.

16 Des urnes



15 min

Corrigé
p. 324

Lycée La Folie Saint James, Neuilly-sur-Seine

Une urne contient 100 boules numérotées 00, 01, 02, ..., 99. On tire au hasard une boule et on lit le numéro obtenu. On considère les événements A : « Le numéro obtenu contient au moins un 0 » et B : « Le numéro obtenu contient au moins un 9 ».

- Déterminer la probabilité des événements A et B .
- Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
- Déterminer la probabilité de l'événement $A \cup B$.

17 Tirages dans un jeu de cartes



20 min

Corrigé
p. 325

Lycée Charlemagne, Paris

Un jeu de 32 cartes contient les cartes 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As dans les quatre couleurs trèfle, carreau, cœur, pique. Les *figures* sont les Valets, Dames et Rois. On tire au hasard une carte en supposant qu'il y ait équiprobabilité. Soit C l'événement « tirer un cœur » et H l'événement « tirer une figure ».

- Définir par une phrase les événements $\bar{C}$, $C \cap H$, $C \cup H$, $C \cap \bar{H}$.
- Calculer la probabilité des événements C , $\bar{C}$, H , $\bar{H}$, $C \cap H$, $C \cup H$ et $C \cap \bar{H}$.
- Écrire $C \cap \bar{H}$ sous la forme d'un ensemble.

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

18 Jetons



15 min

Corrigé
p. 325

Lycée Charlemagne, Paris

Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On tire au hasard un jeton dans l'urne, on note son numéro, on le remet dans l'urne, on tire à nouveau au hasard un jeton dans l'urne et on note son numéro. On forme ainsi une suite (J_1, J_2) de 2 numéros. Attention, la suite $(2, 1)$, par exemple, est différente de la suite $(1, 2)$.

- 1 Justifier brièvement que la probabilité de chaque issue est égale à $\frac{1}{16}$.
- 2 Soit A l'événement : « $J_1 < J_2$ ». Soit B l'événement : « $J_1 + J_2 = 4$ ».
 - (a) Écrire les événements A et B comme des ensembles.
 - (b) Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap \bar{B})$.
 - (c) En déduire $P(\bar{A})$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup \bar{B})$.
- 3 Soit E l'événement : « J_1 et J_2 sont impairs » et F l'événement : « $J_1 + J_2$ est impair ». Déterminer $P(E)$, $P(F)$, $P(E \cap F)$, $P(E \cup F)$.

19 Au supermarché



15 min

Corrigé
p. 326

Lycée Marie Curie, Versailles

Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo avec

Un supermarché de quartier est ouvert de 9h à 19h. Le gérant a mesuré que la première caisse est occupée 5 h par jour (événement A) et la seconde, 6 heures sur dix (événement B). Les deux sont occupées simultanément 3 h par jour.

- 1 Donner les probabilités des événements A , B et $A \cap B$.
- 2 Quelle est la probabilité que la seconde caisse soit libre ?
- 3 Quelle est la probabilité qu'au moins une des caisses soit libre ?
- 4 Quelle est la probabilité que les deux caisses soient libres ?

20 Groupes sanguins



10 min

Corrigé
p. 327

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

La répartition des groupes sanguins dans la population française est présentée dans le tableau suivant :

		Groupe sanguin			
		O	A	B	AB
rhésus	Rh+	37%	39%	7%	2%
	Rh-	6%	6%	2%	1%
Total					100%

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

L'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard une personne dans cette population. On assimile les probabilités aux fréquences observées.

- 1 Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
- 2 Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
 - (a) A : « la personne est du groupe A »
 - (b) Rh+ : « la personne a un rhésus positif »
 - (c) AB- : « la personne est du groupe AB rhésus négatif »
- 3 La personne que l'on a choisie est rhésus négatif. Quelle est la probabilité qu'elle soit du groupe AB ?

21 Feu tricolore



10 min

Corrigé
p. 327

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant un temps égal à rouge et orange (autrement dit, l'automobiliste a autant de chance de passer que de s'arrêter).

- 1 Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
- 2 Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
 - (a) les trois feux verts ?
 - (b) deux des trois feux verts ?

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

1 V/F Variation d'une série statistique

Enoncé
p. 308

- a** Faux. La moyenne augmente également de 1 €.
- b** Vrai. Le prix minimal et le prix maximal augmentent de 1 € donc leur différence ne change pas.
- c** Vrai, puisque tous les prix ont augmenté de 1 €.
- d** Faux, puisque tous les prix ont augmenté de la même façon, l'écart inter-quartile est inchangé.

2 V/F Jets de dé

Enoncé
p. 308

- a** Faux, c'est un diagramme en bâtons.
- b** Vrai. $\frac{1 \times 12 + 2 \times 16 + 3 \times 32 + 4 \times 4 + 5 \times 4 + 6 \times 12}{12 + 16 + 32 + 4 + 4 + 12} = 3,1$.
- c** Faux. Dans l'ordre croissant, la 20^e valeur vaut 2 et la 60^e valeur vaut 3, donc l'écart inter-quartile est 1.
- d** Vrai. L'effectif le plus grand est atteint pour la valeur 3.
- e** Faux. Le maximum est 6 (ne pas confondre avec le mode, qui concerne l'effectif maximal).
- f** Vrai.
- g** On ne peut pas en être absolument certain, mais il est très improbable que la fréquence du 3 soit 8 fois celle du 4 ou du 5 avec un dé normal (on peut calculer qu'avec un dé normal, une telle répartition arrive dans 1 cas sur 1 800 milliards !).

3 V/F Probabilités

Enoncé
p. 309

- a** Vrai. Si le jeu n'est pas truqué, le tirage de chaque carte est équiprobable, or le jeu contient 52 cartes, donc la probabilité de tirer une carte particulière est $\frac{1}{52}$.
- b** Faux. Il y a 4 as. L'événement « tirer un as » contient les 4 événements élémentaires « tirer l'as de pique », « tirer l'as de cœur », « tirer l'as de trèfle », « tirer l'as de carreau ». La probabilité de tirer un as est donc $4 \times \frac{1}{52} = \frac{1}{13}$.
- c** Vrai. Comme dans la question précédente, la probabilité de tirer un roi est de $\frac{1}{13}$, celle de tirer une reine est de $\frac{1}{13}$. Comme ces deux événements sont disjoints (incompatibles), leur réunion a pour probabilité $\frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 Temps de trajet

Enoncé
p. 309

Lycée Brizeux, Quimper

Durée en minutes	n_i (effectifs)	f_i (fréquences) en %	Effectifs cumulés croissants
[5 ; 10[	10	5	10
[10 ; 15[	30	15	40
[15 ; 20[	70	35	110
[20 ; 25[	60	30	170
[25 ; 30[	30	15	200

- 2 On calcule $\bar{x} = (10 \times 7,5 + \dots + \dots + 30 \times 27,5)/200 = 19,25$, soit 19 min et 15 s.

En assimilant chaque classe à son centre, on a pu faire une erreur de 2,5 min. sur chaque valeur, et donc également sur la moyenne (par linéarité de la moyenne). Une précision à la seconde près est donc un peu exagérée.

Cependant, on peut espérer que les erreurs se compensent dans une certaine mesure, donc il est pertinent d'arrondir à 19 min.

- 3 En utilisant la valeur 19 pour la moyenne, on obtient $\sigma \approx 5,3$. Ceci est cohérent avec la série, où on observe 130 valeurs entre 15 et 25 min. (environ deux tiers des valeurs).

5 Lait en poudre

Enoncé
p. 310

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

- 1 On obtient une moyenne d'environ 60,2 g. :

$$\frac{2 \times 40 + 3 \times 45 + 5 \times 50 + 9 \times 55 + 7 \times 60 + 8 \times 65 + 5 \times 70 + 4 \times 75 + 2 \times 80}{45} \approx 60,2.$$

Consommation	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
40	2	2	45
45	3	5	43
50	5	10	40
55	9	19	35
60	7	26	26
65	8	34	19
70	5	39	11
75	4	43	6
80	2	45	2

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

3 Comme il y a 45 bébés, on dépasse le premier quart au 12^e bébé et le troisième au 34^e bébé. D'après la colonne des effectifs croissants, $q_1 = 55$ g (consommation du 12^e bébé) et $q_3 = 65$ g, donc l'écart inter-quartile est de 10 g (la série est peu dispersée).

4 D'après les effectifs cumulés décroissants, 26 bébés consomment au moins 60 g de lait en poudre, soit :

$$\frac{26}{45} \times 100 \approx 58\%.$$

5 D'après les effectifs cumulés croissants, 34 bébés consomment moins de 70 g de lait en poudre soit :

$$\frac{34}{45} \times 100 \approx 76\%.$$

6 Série de masses

Enoncé
p. 310

Lycée Henri IV, Béziers

1 Pour calculer la moyenne $\bar{x}$, on utilise la formule :

$$\bar{x} = f_1 x_1 + \dots$$

où x_i sont les valeurs et f_i leur fréquence.

On a donc :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 62 \times 0,07 + 66 \times 0,12 + 70 \times 0,36 + 74 \times 0,15 \\ &\quad + 78 \times 0,16 + 82 \times 0,10 + 86 \times 0,04 \\ &\approx 72,7 \text{ kg} \end{aligned}$$

Comme les valeurs de la série sont visiblement à 2 kg près, donner la moyenne avec une précision beaucoup plus grande est illusoire. Donnons la moyenne au kg près : 73 kg.

2 Pour les fréquences cumulées, on ajoute les fréquences au fur et à mesure des valeurs. Pensez à contrôler que la dernière fréquence cumulée est de 100% ; si ce n'est pas le cas ... vérifiez vos calculs !

Masses	62	66	70	74	78	82	86
Fréquences	7%	12%	36%	15%	16%	10%	4%
Fréquences cumulées	7%	19%	55%	70%	86%	96%	100%

3 La première fréquence cumulée supérieure ou égale à 25 % correspond à 70 kg. Celle ou dépasse 75 % correspond à 78 kg. Ces deux valeurs sont donc respectivement les premiers et troisième quartiles de la série, et l'écart inter-quartile est de 8 kg.

4 Le pourcentage de personnes pesant moins de 72 kg est justement la fréquence cumulée croissante correspondant à 70 kg, soit 55 %.

5 Dans cette série, « au moins 80 kg » signifie 82 ou 86 kg, donc 14 % de la population totale.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

7 Âge des élèves

Enoncé
p. 311

Lycée Jacques Monod, Clamart

- 1 L'âge moyen est $\bar{x} = 15,2$ (donc 15 ans).
- 2 On dépasse 25% à partir de 15 ans et 75% à partir de 16 ans. L'écart inter-quartile est donc de 1 an.
La calculatrice donne un écart-type de 0,89.
Ces deux valeurs montrent que la série n'est pas très dispersée. Il fallait s'y attendre puisque la plupart des élèves ont des âges très proches dans une classe.

8 Notes à un contrôle

Enoncé
p. 311

Lycée Montesquieu, Bordeaux

On peut ranger les différentes notes dans un tableau d'effectifs (on a indiqué également les effectifs cumulés croissants) :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n_i	1	2	0	2	3	2	4	0	3	2	2	1	2	4	4	1	1	1	0
s_i	1	3	3	5	8	10	14	14	17	19	21	22	24	28	32	33	34	35	35

Les données étaient rangées dans un tableau de 7 colonnes et 5 lignes, donc l'effectif total est $n = 35$. On calcule la moyenne :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + \dots}{n} \approx 9,77.$$

Le premier quart est atteint à partir de la 9^e note, donc 6, et le troisième à partir de la 27^e, donc 14.

On a donc le premier quartile $q_1 = 6$, le troisième quartile $q_3 = 14$, et l'écart inter-quartile est 8.

9 Lancers de dé

Enoncé
p. 311

Lycée Sacré-Cœur, Aix-en-Provence

- 1 On calcule l'effectif total : $N = 10\,000$. Le calcul des fréquences se borne donc à « ajouter » une virgule :

Résultats	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs	302	497	904	1 086	1 408	1 640	1 341	1 122	813	575	312
Fréquences	3,02	4,97	9,04	10,86	14,08	16,40	13,41	11,22	8,13	5,75	3,12

- 2 Avec la calculatrice, on obtient une moyenne de 7,0 et un écart-type de 2,4
- 3 On peut se contenter d'ajouter les fréquences, pour les résultats allant de 5 à 12. Essayons une autre méthode. La somme des 2 dés est strictement inférieure à 5 avec la fréquence :

$$3,02 + 4,97 + 9,04 = 17,03 \%$$

Elle est donc supérieure ou égale à 5 avec la fréquence :

$$100 - 17,03 = 82,97 \%$$

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

10 Prix de la baguette

Enoncé
p. 312

Lycée Descartes, Tours

- 1 L'effectif total est $n = 20$.

Prix (en centimes)	75	80	85	90	95
Effectifs	2	5	8	4	1
Fréquences	0,1	0,25	0,4	0,2	0,05
Fréquences cumulées	0,1	0,35	0,75	0,95	1,00

- 2 La moyenne est $\bar{x} = 84,25$ centimes. La précision des données est au centime près, on donne donc la moyenne au centime près également :

$$\bar{x} \approx 84 \text{ centimes.}$$

- 3 On dépasse 0,25 en fréquences cumulées à partir de 80 c, et 0,75 à partir de 85 c. L'écart inter-quartile est donc de 5 c.

- 4 Tout se passe comme si on avait dans notre nouvelle série deux sous-groupes. Le premier est le sous-groupe des 20 premières boulangeries, de moyenne 84 c. Le second est le sous-groupe constitué par la seule nouvelle boulangerie, de moyenne 70 centimes. La moyenne finale est donc :

$$\bar{X} = \frac{20 \times 84 + 1 \times 70}{21} \approx 83,6.$$

La moyenne n'a donc pratiquement pas été modifiée.

11 Télévision

Enoncé
p. 312

Lycée Paul Lapie, Courbevoie

- 1 Pour la classe de seconde : la moyenne est $\bar{x} \approx 14,4$.
Il y a 32 élèves en seconde. Les premiers et troisièmes quartiles correspondent donc à la 8^e valeur (10 h) et la 24^e (18 h). L'intervalle inter-quartile est donc de 8 h.
Pour la classe de cinquième, on trouve une moyenne de $\bar{y} \approx 19,1$.
Il y a 27 élèves en cinquième, on s'intéresse donc à la 7^e valeur (10 h) et la 21^e (30 h). On obtient donc un intervalle inter-quartile de 20 h.
- 2 Si on regarde la seule moyenne, on voit que les élèves de cinquième regardent la télévision plus longtemps que leurs camarades de seconde. Néanmoins, la comparaison de la dispersion montre que les situations des élèves du collège sont beaucoup plus diverses : certains ne regardent pas du tout la télévision, l'un d'entre eux la regarde... 8 heures par jour ! C'est ce petit nombre de « téléphages » qui tire la moyenne vers le haut.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 Donnons le tableau des fréquences :

Temps (h)	2	6	7	8	9	10	11	14	15
Effectifs	1	2	1	1	2	5	1	1	4
Fréquences (%)	3,1	6,3	3,1	3,1	6,3	15,6	3,1	3,1	12,5

Temps (h)	16	17	18	20	21	22	23	24
Effectifs	1	1	4	3	1	1	2	1
Fréquences (%)	3,1	3,1	12,6	9,4	3,1	3,1	6,3	3,1

La somme des fréquences vaut 100 %. Si, pour des raisons d'arrondi, ce n'était pas le cas, l'habitude veut que l'on corrige les résultats en modifiant la fréquence maximale.

La fréquence cherchée est d'environ 44 %.

- 4 On connaît les moyennes de deux-sous groupes, la moyenne générale est donnée par :

$$\bar{X} = \frac{32\bar{x} + 27\bar{y}}{32 + 27} \approx 16,6.$$

12 Course à pied

Énoncé
p. 313

Lycée Claude Bernard, Paris

- 1 On calcule la moyenne pondérée :

$$m = \frac{15 \times 12,32 + 10 \times 11,48}{25} = 11,984.$$

11,984 est le résultat exact donné par la calculatrice. Pour formuler sa réponse, il faut également s'interroger sur la précision des mesures des temps de chaque coureur. Les moyennes sont données au centième près, il faut donc se contenter de ce niveau de précision. Une réponse plus raisonnable est donc : 11,98 s.

- 2 Pour connaître la variation, on calcule la moyenne pondérée des variations :

$$\Delta = \frac{15 \times 0,21 + 10 \times 0,13}{25} = 0,178.$$

Au centième près, on calcule donc une amélioration de 0,18 s de l'ensemble des performances.

- 3 La moyenne de l'ensemble des femmes (on la note F) est donnée par l'énoncé, compte tenu de l'amélioration de leurs performances :

$$F = 12,32 - 0,21 = 12,11 \text{ s.}$$

$\bar{x}$ la moyenne des femmes sélectionnées et $\bar{y}$ celle des autres femmes.

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

La moyenne du groupe féminin est la moyenne pondérée de $\bar{x}$ et $\bar{y}$, d'où l'équation :

$$\begin{aligned} F &= \frac{10\bar{x} + 5\bar{y}}{15} \\ \Leftrightarrow 15 \times F &= 10\bar{x} + 5\bar{y} \\ \Leftrightarrow \frac{15 \times F - 10\bar{x}}{5} &= \bar{y}. \end{aligned}$$

Comme $\bar{x} = 11,97$ et $F = 12,11$, il vient : $\bar{y} = 12,39$.

13 Notes d'un élève

Enoncé
p. 313

Lycée Camille Sée, Paris

Pour avoir une moyenne de 10 sur 5 notes, il faut que le total des notes obtenu soit 50. Pour l'instant, l'élève a une moyenne de 9,5 sur 4 notes, soit un total de $4 \times 9,5 = 38$. Il lui faut donc obtenir $50 - 38 = 12$ au prochain devoir pour obtenir 10 de moyenne.

14 Cartes

Enoncé
p. 313

Lycée Marie Curie, Sceaux

- 1 Il y a 4 as dans le jeu, donc 4 issues favorables. Le jeu contient 52 cartes, donc 52 issues possibles. L'événement A a donc pour probabilité la valeur suivante : $4 \times \frac{1}{52} = \frac{1}{13}$.

Chaque couleur ayant le même nombre de cartes, on peut considérer que le tirage de chaque couleur est équiprobable. Il y a 4 couleurs, donc la probabilité de tirer un pique est $\frac{1}{4}$.

- 2 L'événement $A \cap P$ est « la carte est l'as de pique ». Une seule issue favorables pour 52 possibles, donc la probabilité de cet événement est $\frac{1}{52}$.

- 3 $A \cup B$ signifie « la carte est un as ou un pique ». Il y a 13 piques, auxquels on ajoute les 3 autres as, donc 16 issues favorables, pour 52 possibles, donc : $P(A \cup P) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

On peut également appliquer directement la formule du cours :

$$P(A \cup P) = P(A) + P(P) - P(A \cap P) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$

- 4 Il s'agit de l'événement contraire $\bar{A}$ dont la probabilité est :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{12}{13}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

15 Jeu de dés

Enoncé
p. 313

Lycée Edgar Quinet, Paris

1 On complète le tableau :

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Si les dés ne sont pas pipés, les 6 valeurs sont équiprobables pour les deux chiffres, donc chaque résultat est équiprobable. On dénombre $6 \times 6 = 36$ résultats, qui ont donc tous une probabilité de $\frac{1}{36}$.

- 2
- Le résultat est un multiple de 5 si et seulement si le deuxième jet donne 5, ce qui arrive avec probabilité $p_1 = \frac{1}{6}$.
 - Le résultat est pair si et seulement si le deuxième jet donne 2, 4, ou 6, ce qui est la moitié des cas possibles, donc $p_2 = \frac{1}{2}$.
 - Le résultat est supérieur à 30 si et seulement si le premier jet donne 3, 4, 5 ou 6, soit deux tiers des cas possibles, d'où $p_3 = \frac{2}{3}$.

16 Des urnes

Enoncé
p. 314

Lycée La Folie Saint James, Neuilly-sur-Seine

- 1 On dénombre 100 issues possibles (les 100 numéros). 10 numéros commencent par 0, 10 numéros se terminent par 0. Attention à ne pas compter deux fois 00, qui relève des deux cas. Il y a donc 19 cas favorables. La probabilité de A est donc $P(A) = 0,19$.
De même, 19 numéros contiennent au moins un 9, donc $P(B) = 0,19$.
- 2 On cherche les numéros qui contiennent au moins un 0 et au moins un 9. Comme les numéros ont deux chiffres, il y a donc deux issues favorables : 09 et 90. On en déduit : $P(A \cap B) = \frac{2}{100} = 0,02$.
- 3 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,36$.

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

17 Tirages dans un jeu de cartes

Enoncé
p. 314

Lycée Charlemagne, Paris

- 1 $\bar{C}$ est l'événement « tirer une autre couleur que cœur ».
 $C \cap H$ est l'événement « tirer une figure de cœur ».
 $C \cup H$ est l'événement « tirer une figure ou un cœur ».
 $C \cap \bar{H}$ est l'événement « tirer un cœur qui n'est pas une figure ».
- 2 Il y a 32 cartes, donc 32 cas possibles. Il suffit de dénombrer pour chaque événement les cas favorables :
 - $P(C) = \frac{1}{4}$ car un quart des cartes sont des cœurs.
 - $P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (événement contraire)
 - $P(H) = \frac{3}{8}$ car pour chaque couleur, on dénombre 3 figures sur 8 cartes.
 - $P(\bar{H}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ (événement contraire)
 - $P(C \cap H) = \frac{3}{32}$ (trois figures cœurs, donc 3 cas favorables sur 32 cartes possibles). Si vous avez répondu $\frac{3}{8}$, c'est que vous avez oublié que la carte prise au hasard n'a pas de raison d'être un cœur.
 - $P(C \cup H) = \frac{8 + 3 \times 3}{32} = \frac{17}{32}$ (huit cœurs, et trois figures dans les trois autres couleurs, soit 17 cas favorables sur 32 cartes possibles).
 - $P(C \cap \bar{H}) = \frac{5}{32}$ (5 cœurs ne sont pas des figures, soit 5 cas favorables sur 32 cartes possibles).
- 3 Il s'agit de recenser les cartes à cœur qui ne sont pas des figures, donc :
 $C \cap \bar{H} = \{7C, 8C, 9C, 10C, AC\}$ (xC désignant la carte x de cœur).

18 Jetons

Enoncé
p. 315

Lycée Charlemagne, Paris

- 1 Une issue est une suite (J_1, J_2) . Il y a donc 4 possibilités pour J_1 , et pour chaque valeur de J_1 , 4 possibilités pour J_2 , soit 16 issues possibles, l'expression « au hasard » signifiant, sauf mention contraire, que les valeurs possibles pour J_1 ou J_2 sont équiprobables, les issues (J_1, J_2) le sont également, donc la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{16}$.
- 2 (a) $A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
 et $B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(b) L'événement A contient 6 issues favorables, donc nous avons

$$P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

L'événement B contient 3 issues favorables, donc $P(B) = \frac{3}{16}$.

$(1,3)$ est la seule issue commune aux deux événements, donc nous avons $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$.

$A \cap \bar{B}$ contient toutes les issues de A qui ne sont pas dans B , donc 5 issues favorables, d'où $P(A \cap \bar{B}) = \frac{5}{16}$.

(c) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{8}$ (événement contraire), et nous avons

$$P(A \cup B) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \text{ (8 issues favorables distinctes au total),}$$

$$P(A \cup \bar{B}) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

3 On peut expliciter $E = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}$ et $F = \{(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)\}$. On en déduit facilement : $P(E) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, nous avons aussi $P(E \cap F) = 0$ (la somme de deux nombres impairs est paire), et l'égalité suivante $P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{3}{4}$ (événements incompatibles).

19 Au supermarché

Enoncé
p. 315

Lycée Marie Curie, Versailles

live! 1 Il s'agit d'une simple traduction de l'énoncé. On obtient $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,6$ et $P(A \cap B) = 0,3$ car $A \cap B$ est l'événement : « les deux caisses sont occupées ».

2 « La seconde caisse est libre » est $\bar{B}$, l'événement contraire de B . Or $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,4$.

3 « Au moins une des deux caisses est libre » est l'événement contraire de $A \cap B$. On calcule $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,7$.

4 Considérons l'événement contraire, c'est-à-dire : « au moins une caisse est occupée ». Il s'agit de $A \cup B$. On a :

$$P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)$$

donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. L'événement cherché, $\overline{A \cup B}$, a pour probabilité :

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B).$$

On en déduit que $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$, et donc $P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,5 - 0,6 + 0,3 = 0,2$.

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS • CHAP. 9

20 Groupes sanguins

Enoncé
p. 315

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Complétons avant tout le tableau :

		Groupe sanguin			
		O	A	B	AB
rhésus	Rh+	37%	39%	7%	2%
	Rh-	6%	6%	2%	1%
Total		43	45%	9%	3%
			100%		

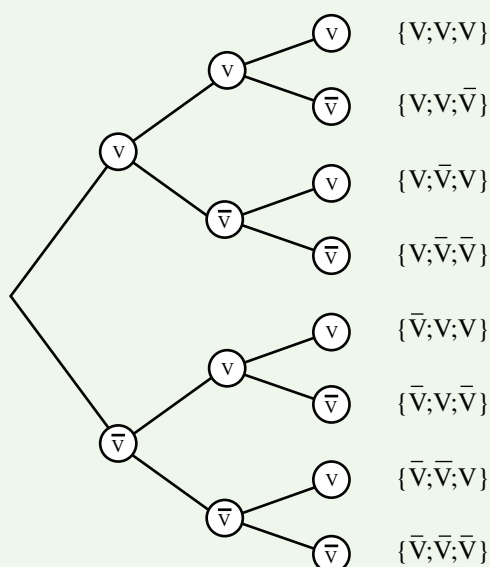
- 1 L'univers de l'expérience est la population française.
- 2 (a) Il y a 45% de personnes qui ont un groupe sanguin A, donc $P(A) = 0,45$.
(b) Il y a 85% de personnes ayant un rhésus positif, donc $P(Rh+) = 0,85$.
(c) Il y a 1% de personnes ayant un groupe sanguin AB avec un rhésus négatif, donc $P(AB-) = 0,01$.
- 3 Ici, l'univers change : c'est désormais l'ensemble des personnes ayant un rhésus négatif. Il y a 1% de personnes du groupe AB sur les 15%, donc la probabilité demandée est égale à $\frac{1}{15}$.

21 Feu tricolore

Enoncé
p. 316

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

- 1 On note V l'événement « le feu est vert » et $\bar{V}$ son événement contraire :



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

- 2** (a) Nous sommes en situation d'équiprobabilité donc la probabilité qu'il rencontre trois feux verts est $\frac{1}{8}$ car une seule issue sur 8 réalise cet événement.
- (b) D'après l'arbre, dans 3 cas sur 8, deux des feux sont verts donc la probabilité cherchée est $\frac{3}{8}$.

Annexe

Liste des vidéos



Chapitre	Titre	Page
Chapitre 2	Cours : les nombres réels ne sont pas tous rationnels, l'exemple $\sqrt{2}$	28
Chapitre 2	Cours : les nombres réels ne sont pas tous décimaux, l'exemple de $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal	29
Chapitre 3	Exercice 10 : bien choisir son taxi	78
Chapitre 4	Exercice 16 : jouer au géomètre	135
Chapitre 5	Exercice type du cours sur les vecteurs et coordonnées dans le plan	153
Chapitre 6	Cours : comment déterminer l'équation d'une droite ?	195
Chapitre 6	Exercice 9 : résolution d'un problème de géométrie en utilisant les coordonnées	203
Chapitre 7	Exercice 14 : variations de la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$	245
Chapitre 8	Exercice 15 : changement de repère	282
Chapitre 9	Exercice type de statistiques	299
Chapitre 9	Exercice 19 : au supermarché	315

Pour télécharger les programmes contenus dans cet ouvrage :
<http://www.prepamath.fr/IL2M>

