

Définition 3 : Crochets

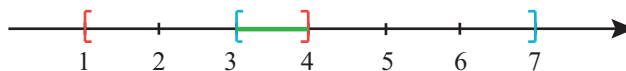
Le sens des crochets indique si la borne est contenue ou non dans l'intervalle. Si le crochet est tourné vers l'intérieur, on « prend » la borne. Par exemple, $] - 7, - 3]$ contient -3 mais ne contient pas -7 . Comme les bornes $-\infty$ et $+\infty$ sont de pures conventions, elles sont toujours exclues de l'intervalle.

Définition 4 : Réunion

L'ensemble $[1,3] \cup [5,6]$ contient les éléments de $[1,3]$ et ceux de $[5,6]$. Autrement dit, il contient tous les réels qui sont dans $[1,3]$ *ou* dans $[5,6]$. Remarque : cet ensemble n'est pas lui-même un intervalle.

Définition 5 : Intersection

$[1,4] \cap [3,7]$ contient les réels qui sont dans les deux intervalles à la fois, c'est-à-dire les réels qui sont dans $[1,4]$ *et* dans $[3,7]$. Concrètement, il s'agit des points compris entre 3 et 4, comme le confirme le schéma suivant, on l'on a grisé la partie commune aux deux intervalles :



$$[1,4] \cap [3,7] = [3,4]$$

2 Opérations permises sur les inégalités

On est amené, pour comparer ou encadrer des nombres, à effectuer des opérations sur les inégalités, par exemple pour passer de $2x < 6$ à $x < 3$. Certaines opérations ne posent aucun problème. Pour d'autres, il faut changer le sens de l'inégalité. D'autres enfin ne s'appliquent que si les nombres concernés vérifient une condition de signe. Concrètement, on peut :

- *Ajouter un même réel à une inégalité ou ajouter deux inégalités de même sens membre à membre.*
Si l'une des inégalités était au sens large, l'inégalité obtenue l'est aussi.
Exemple : si $x + 7 \geq 5$, on peut ajouter -7 aux deux membres et obtenir $x \geq -2$.
- *Multiplier les deux membres de l'inégalité par un réel.*
Si ce réel est positif, on garde le sens ;
s'il est négatif, on change le sens de l'inégalité.
Exemple : si $7x \leq -3$, on peut diviser par 7 les deux membres pour obtenir $x \leq -\frac{3}{7}$. Le sens ne change pas car 7 est positif.

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS • CHAP. 3

- *Élever les deux membres de l'inégalité au carré ou prendre leur racine carrée.*
Si les deux membres sont *positifs*, on peut les élever au carré ou prendre leur racine carrée sans changer le sens de l'inégalité.
Exemple : si $x > 5$, on peut écrire $x^2 > 25$ et $\sqrt{x} > \sqrt{5}$.
Attention : si $-2 < x < 5$, on ne peut pas écrire $(-2)^2 < x^2 < 5^2$ car cela serait faux pour $x = 0$ ou $x = 1$ par exemple.
Dans ce cas, le meilleur encadrement possible est : $0 \leq x^2 < 5^2$ (voir chapitre 8 page 271, « La fonction carré »).
- *Inverser les deux membres en changeant le sens de l'inégalité à condition que ces deux membres soient non nuls et de même signe.*
Exemple : si $0 < x \leq 5$, alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{5}$.

⚠ ATTENTION

Lorsqu'on inverse une inégalité contenant une variable, il faut faire très attention de conserver le signe de la variable.

Exemples : si $x \geq 5$, on ne peut pas en déduire que $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$, mais que : $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$, car l'inverse d'un nombre positif est forcément positif.

De même, si $x < -2$, alors : $0 > \frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$, et non $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$.

3 Utiliser les carrés et les produits croisés

On sait que, pour deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

(Propriété dite des produits « en croix » ou « croisés »).

Lorsque a , b , c et d sont positifs, on peut utiliser ces produits croisés avec une inégalité :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} &\iff ad < bc \\ \frac{a}{b} > \frac{c}{d} &\iff ad > bc \\ \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} &\iff ad \leq bc \\ \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} &\iff ad \geq bc \end{aligned}$$

Exemple : montrons que $\frac{23}{5} > \frac{7}{2}$. Il suffit de constater que
 $23 \times 2 = 46 > 5 \times 7 = 35$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS