

DÉRIVATION ET CONVEXITÉ • CHAP. 3

- 4 La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $[1; +\infty[$, donc dans $\mathbb{R}_+^*$. Or, $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, cette dernière fonction est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x^2 + 1}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables.

Posons $G(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Alors :

$$G'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Or, $\ell = \sqrt{G}$, donc $\ell'(x) = \frac{G'(x)}{2\sqrt{G(x)}}$.

Soit :

$$\ell'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{\sqrt{x^2 + 1}}}.$$

11 Étude de convexité

Énoncé
p. 87

Lycée Victor Duruy, Paris

- 1 Pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 - 4$, et $f''(x) = 6x$.
 $f''(x) < 0 \iff x < 0$, donc f est concave sur $\mathbb{R}_-^*$, et f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2 Le point $A(0; 1)$ est le seul point d'inflexion, car 0 est la seule valeur de x pour laquelle $f''(x)$ s'annule et change de signe.

12 Convexité et inégalité

Énoncé
p. 87

Cité scolaire internationale, Grenoble

- 1 Pour tout réel x : $f'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$
 $f''(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$.
- 2 $f''(x) > 0 \iff x > -2$.
Par conséquent, f est concave sur $]-\infty; -2]$ et convexe sur $[-2; +\infty[$.
- 3 (a) L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :
 $y = f'(0)x + f(0)$, donc $y = x$.
(b) f est convexe sur $[-2; +\infty[$. 0,0001 fait partie de cet intervalle, donc C est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, dont l'équation est $y = x$.
On a donc $f(0,0001) > 0,0001$ car à gauche se trouve l'ordonnée du point de C d'abscisse 0,0001 et à droite l'ordonnée du point de la tangente en O d'abscisse 0,0001 également.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS