

27 Suite convergente

Énoncé
p. 146

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

- 1 Considérons la fonction définie pour tout réel x positif par :

$$f(x) = \ln(x+1) - x.$$

La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

La fonction f' est donc négative sur $[0; +\infty[$, donc la fonction f est décroissante sur son ensemble de définition. Elle admet ainsi un maximum en 0 et, pour tout réel x positif, on a : $f(x) \leq f(0)$, soit $f(x) \leq 0$.

Il en résulte que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$.

MÉTHODE

Pour prouver une inégalité du type $f(x) < g(x)$, on étudie la fonction $d(x) = f(x) - g(x)$, et son tableau de variation permettra d'en déterminer le signe.

- 2 Par hypothèse, $v_n = \ln u_n$.

On remplace alors u_n par l'expression obtenue à la première question :

$$v_n = \ln \left[(1+k)(1+k^2)(1+k^3) \cdots (1+k^{n-1}) \right].$$

Comme $0 < k < 1$, tous les facteurs du produit sont strictement positifs, donc, en appliquant les propriétés de la fonction logarithme,

$$v_n = \ln(1+k) + \ln(1+k^2) + \cdots + \ln(1+k^{n-1}).$$

Comme $0 < k < 1$, on peut appliquer l'inégalité démontrée dans la question précédente à chacun des termes de la somme :

$$\begin{aligned} \ln(1+k) &\leq k \\ \ln(1+k^2) &\leq k^2. \end{aligned}$$

On additionne ensuite membre à membre les $n-1$ inégalités ainsi obtenues :

$$v_n \leq k + k^2 + k^3 + \cdots + k^{n-1}.$$

On reconnaît dans le second membre de l'inégalité la somme des $n-1$ premiers termes de la suite géométrique de raison k et de premier terme k . On peut alors écrire, comme $0 < k < 1$:

$$v_n \leq k \left(\frac{1-k^{n-1}}{1-k} \right),$$

soit :

$$v_n \leq \left(\frac{k}{1-k} \right) - \left(\frac{k^n}{1-k} \right).$$