

SUITES NUMÉRIQUES • CHAP. 1

19 Somme des inverses des carrés

Énoncé
p. 14

Lycée Hoche, Versailles

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

La suite est donc croissante.

2 Pour tout $p \geq 2$,

$$\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = \frac{p - (p-1)}{p(p-1)} = \frac{1}{p^2 - p}.$$

Or, $p^2 - p < p^2$ donc $\frac{1}{p^2 - p} > \frac{1}{p^2}$.

On a donc bien $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$.

3 (a) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$ donc, d'après la question 2,

$$u_n \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Or,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \\ & \quad + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right)$, soit :

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

(b) La suite est croissante (question 1) et majorée par 2 (question 3a), donc elle converge.

(c) $u_9 \approx 1,540$ et $u_{10} \approx 1,550$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS