

INTERROS des LYCÉES

Collection dirigée par Éric MAURETTE

maths



Érick DE BRAUWÈRE
Stéphane PASQUET

 Nathan

Remerciements

Les auteurs et l'équipe de Prepamath Édition tiennent à remercier Jean-Côme Charpentier et Carlos Gomez pour l'aide précieuse qu'ils ont apportée à cet ouvrage.

Illustrations : Anna Michalak, Stéphane Pasquet
Coordination éditoriale : François Déliac
Conception couverture : Simon Geliot

Votre avis nous intéresse : contact@prepamath.fr

Retrouvez les Interros des Lycées et des informations scientifiques sur :

Facebook : facebook.com/interrosdeslycees
Instagram : [@interrosdeslycees](https://www.instagram.com/interrosdeslycees)

© PREPAMATH Éditions 2024
© Éditions NATHAN 2024 - ISBN 9782095038618

Avant-propos

Dernière année avant le choix des spécialités, la classe de seconde marque un tournant décisif dans le parcours scolaire de l'élève. C'est particulièrement le cas en mathématiques où le programme s'intensifie et s'élargit, jetant pour nombre d'entre eux les bases d'une future spécialisation scientifique. Cet ouvrage est conçu pour accompagner les élèves en proposant une structure claire et des exercices adaptés à chaque thème abordé.

Complètement revue et corrigée, cette nouvelle édition comporte de nouveaux exercices très récents et variés, issus de différents lycées français. Certains chapitres ont de plus été réorganisés pour répondre au mieux aux attentes des élèves. La structure de chaque chapitre, comme dans tous les « Interros des lycées », est la suivante :

- un rappel de cours, qui s'appuie sur la résolution pratique d'un exercice type, et qui donne de manière concise tout ce que l'on doit retenir du chapitre étudié ;
- des questionnaires à choix multiples (QCM) ou des vrai-faux (V/F) pour vous assurer d'avoir la maîtrise des concepts fondamentaux du chapitre ;
- des exercices corrigés de tous types, qui ont tous été réellement posés en lycée, classés par notion et par degré de difficulté.

Des compléments numériques (vidéos et sources de programmes informatiques) sont aussi présentes, et repérés par des pictogrammes et un QR Code. Vous pourrez ainsi accéder à des ressources numériques qui vous aideront de manière vivante à préciser certains points de cours, mieux comprendre la résolution d'exercices importants, ou récupérer les sources Python des programmes contenus dans ce livre. La liste complète des vidéos se trouve en annexe en fin d'ouvrage, et vous pouvez télécharger les programmes qu'il contient en visitant le lien suivant :

<https://www.prepamath.fr/IL2M>.

N'hésitez pas à nous faire part de vos remarques ou suggestions en nous contactant par mail à l'adresse contact@prepamath.fr.

Nous vous souhaitons une bonne et profitable lecture, pour un entraînement en maths réussi tout au long de l'année.

Les auteurs

Table des matières

Chap 1	Notions d'algorithmique	1
	• Cours	1
	• Interros	12
	• Corrigés	18
Chap 2	Nombres et calculs	25
	• Cours	25
	• Interros	37
	• Corrigés	45
Chap 3	Calcul littéral, équations et inéquations	61
	• Cours	61
	• Interros	73
	• Corrigés	86
Chap 4	Configurations du plan	121
	• Cours	121
	• Interros	133
	• Corrigés	139
Chap 5	Généralités sur les fonctions	157
	• Cours	157
	• Interros	166
	• Corrigés	175
Chap 6	Fonctions de référence	189
	• Cours	189
	• Interros	196
	• Corrigés	205
Chap 7	Vecteurs et coordonnées dans le plan	221
	• Cours	221
	• Interros	229
	• Corrigés	238

Chap 8	Équations de droites. Systèmes linéaires	257
	• Cours	257
	• Interros	268
	• Corrigés	276
Chap 9	Informations chiffrées	297
	• Cours	297
	• Interros	305
	• Corrigés	313
Chap 10	Probabilités	323
	• Cours	323
	• Interros	326
	• Corrigés	332
Annexe	Liste des vidéos	341

Méthodes de travail

Tous les conseils qui suivent sont ceux utilisés par un grand nombre de majors (sortis premiers) de Polytechnique ou de l'ÉNA, par des professionnels de l'organisation et sont également recommandés par de nombreux professeurs. Pour en savoir plus sur le sujet, nous vous conseillons le livre « Comment travailler plus efficacement », par F. Déliac, U. Hadrien, E. Matrullo et E. Maurette, aux Éditions Prepamath.

Faire des « feed-back »

Le « feed-back » est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement, sans s'aider de notes, ce que l'on vient d'apprendre (exercices et cours). Ce contrôle peut se faire mentalement, oralement ou par écrit.

- Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement, et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus le matin en classe (feed-back mental).
- Après avoir relu votre cours le soir, essayez de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon (feed-back écrit).
- Après avoir résolu un problème, prenez 5 minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappelez clairement l'énoncé ainsi que la démarche de résolution (feed-back écrit).
- Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent feed-back oral. Choisissez le type de « feed-back » qui vous convient le mieux et faites-en le plus régulièrement possible (après chaque cours et chaque série d'exercices). Pour être efficace, un « feed-back » doit se faire sans l'aide de vos notes. Ainsi, faire des fiches de résumés de cours à partir de vos cahiers ouverts ne constitue nullement un « feed-back ».

Miser sur la qualité

De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limité d'exercices, mais plus approfondis, que d'en survoler une grande quantité de piètre qualité. Une tendance très répandue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, l'on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficace car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématiques ou de physique, c'est de l'avoir parfaitement compris et assimilé.

Ainsi :

- À la fin d'un problème, prenez 5 à 10 minutes pour essayer de trouver un moyen de le généraliser ou de le compliquer (c'est ce que font souvent les professeurs pour concevoir leurs contrôles écrits) ; trouvez ce que cela pourrait changer dans la solution.
- Prenez également l'habitude, après chaque exercice, de faire un « feed-back » en faisant ressortir la démarche générale et en tissant des liens avec le cours. Bref, il ne faut pas vous contenter de résoudre l'exercice, mais il vous faut lui apporter de la valeur ajoutée et vous interroger sur son contenu.
- Idem pour le cours. Ne vous contentez pas de le parcourir de manière passive. Il vous faut avoir la rigueur d'effacer toutes les zones d'ombre. Pour chaque théorème, il faut vous demander quels types d'exercices son utilisation permettra de résoudre.

Travailler par « couches successives »

Cette méthode, très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions, peut également être utilisée dès le lycée.

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace que de l'attaquer de front, de manière linéaire. La bonne manière consiste à d'abord survoler l'ensemble, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grands titres, ainsi que les noms des paragraphes (première couche, étape devant durer 5 minutes). Dans l'étape suivante (deuxième couche, d'une durée de 10 minutes), on reprend son cours du début en retenant cette fois également les théorèmes et résultats importants. Après cette deuxième couche, on a déjà une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (troisième couche) : on reprend son cours au début pour, cette fois-ci, l'étudier en profondeur en apprenant le détail des démonstrations.

Il est à noter que cette méthode peut être également appliquée avec succès à des matières littéraires, ainsi qu'aux révisions du bac de français. Par exemple :

- Pour la préparation d'un contrôle, on commencera par passer en revue rapidement l'ensemble du cours et des exercices du chapitre précédemment étudiés, avant de les réviser en détail. Ainsi aura-t-on développé une compréhension synthétique et claire.
- De même, avant d'aborder un problème volumineux (tel qu'un contrôle écrit), il est préférable de survoler l'ensemble du problème avant de l'attaquer.

Travailler sa rapidité

Pour acquérir de la rapidité, 3 voies sont possibles :

- Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous concentrer sur une seule chose à la fois, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème ou une dissertation, en rêvassant à ce que vous pourriez trouver à manger dans le réfrigérateur ou en écoutant de la musique.
- Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les mêmes conditions qu'en devoirs surveillés. Le minutage de chacun des exercices de ce livre est fait en ce sens. Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne deviendrez jamais rapide.
- Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une plage horaire serrée. Engagez-vous, par exemple, à travailler chez vous tous les jours entre 18 h et 20 h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelle que soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne se donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, l'on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvasser. L'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.



Machine de prototypage rapide
CNC - 3 axes
CIF Technodrill 3

Tu prévois quoi après
ton Bac ?

Rejoins l'ECE :
La Grande Ecole de l'ingénierie
numérique / 1^{ère} école d'ingénieurs
sur l'insertion professionnelle

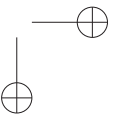
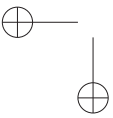
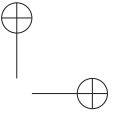
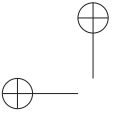
4 Campus Paris - Lyon - Bordeaux - Rennes
3 Programmes Bachelor - Ingénieur - MSc

Retrouvez-nous sur



Inscris-toi
à nos prochains
événements





Chapitre

1

Notions d'algorithmique

Plan du chapitre

1. Qu'est-ce qu'un algorithme ?
2. Les instructions composées
3. Comment écrire une fonction en Python ?

1 Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Exercice type 1

Lycée Marie Curie, Sceaux

On considère la séquence d'instructions :

```
1> a = 3
2> b = a/2
3> a+b = 4.5
4> b = b+1
```

Expliquer ce qui est effectué sur chaque ligne et préciser si chaque opération est autorisée.

Voir corrigé page 3

1.1 Introduction

Au collège, vous avez vu que le logiciel Scratch permettait de construire votre propre programme et ce, rien qu'en déplaçant des blocs d'instructions (les instructions sont des ordres à exécuter par l'ordinateur).

Ces blocs d'instructions constituent un moyen simple de visualiser ce que l'on appelle un *algorithme*.

Définition 1 : algorithme

Un *algorithme* est une suite finie d'instructions.

Dans un premier temps, on peut écrire l'algorithme dans un langage *naturel*.

Exemple :

```
Variable
  x est un nombre
Début
  x ← 5
  Afficher x
  x ← 10
  Afficher x
Fin
```

L'instruction $x \leftarrow 5$ est une *affectation*. La valeur 5 est stockée dans la variable x . Au départ, le nombre « 5 » s'affiche (car c'est la première valeur de la variable x) et dans un second temps, c'est « 10 » qui s'affiche (car on a *affecté* à x une autre valeur après le premier affichage).

On traduit l'algorithme pour l'ordinateur sous forme de *programme*, à l'aide d'un *langage de programmation*, comme Python.

Exemple :

```
x = 5
print(x)
x = 10
print(x)
```

1.2 Type des variables

Dans le programme précédent, on remarque que Python n'a pas besoin qu'on lui précise que la variable x va contenir un nombre.

Au moment de l'affectation $x = 5$, Python détermine lui-même que 5 est un entier et que x va contenir un entier. On dit alors que la variable x est du *type* entier.

Le type d'une variable est important car il détermine (entre autres) quelle place la variable peut occuper en mémoire.

En Python, on distingue les types suivants :

- entier (en Python, `int`, de l'anglais *integer*) : -234.
- booléen (du mathématicien et logicien anglais George Boole, 1815-1864). Ce type ne contient que deux valeurs : `True` (vrai) et `False` (faux)
- flottant (en Python `float`) 45.156, -8.11. À noter : Python utilise le point décimal au lieu de la virgule. La position « flottante » de la virgule donne son nom à ce type.
- chaînes de caractères (en Python, `str` pour *string*), 'mathématiques', "bonjour".

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

Le nom d'une variable obéit à certaines règles. Pour simplifier, disons qu'il consiste en une suite de lettres, y compris le caractère « _ », suivie éventuellement d'une suite de chiffres. Noter que Python fait la différence entre majuscules et minuscules.

Par exemple,

- `ab1`, `ma_variable`, `Résultat`, `vAriAble` sont des noms autorisés;
- `2`, `51ab`, `x+y`, `'hello'` sont interdits (`'hello'` est une chaîne de caractères, `2` est un entier : ce sont des *constantes*).

1.3 L'affectation

En Python, le symbole d'affectation est le signe égal (« = »).

Contrairement à ce qui se passe en mathématiques, le signe « = » n'est pas du tout symétrique.

Le membre de gauche est toujours un nom de variable. Si cette variable n'existe pas encore, elle est créée.

En revanche, le membre de droite peut contenir des variables mais elles doivent déjà contenir une valeur. La valeur du membre de droite est alors calculée puis stockée dans la variable située du côté gauche du « = ».

Par exemple, dans l'instruction `x=5`, on calcule la valeur du membre de droite (donc 5), qui est stockée dans la variable `x`.

Si maintenant on effectue `x=10`, la valeur 10 vient remplacer la valeur 5 dans la variable `x`.

➔ Solution de l'exercice type 1

Lycée Marie Curie, Sceaux

```
1> a = 3
```

La valeur 3 est évaluée et stockée dans la variable `a`, qui est donc de type entier.

```
2> b = a/2
```

Le membre de droite est évalué. Comme `a` contient 3, le quotient n'est pas entier et sa valeur est 1.5, qui est stockée dans `b`. Cette variable est de type flottant.

Si l'instruction avait été :

```
2> b = a//2
```

on aurait alors une division *entière*, et c'est l'entier 1 qui serait stocké dans `b`.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type 1 (suite)

Lycée Marie Curie, Sceaux

```
3> a+b = 4.5
```

Le membre de droite n'est pas un nom de variable autorisé, cette instruction est donc fautive. Pourtant, l'instruction :

```
3> print(a+b)
```

devrait bien donner 4.5 mais le signe '=' n'est pas un symbole de comparaison, mais d'affectation.

```
4> b = b+1
```

b contient la valeur 1.5, donc le membre de droite a pour valeur 2.5. Cette valeur est stockée dans b et remplace la valeur précédente. La variable b reste du type flottant.

Remarquons qu'on vient d'assister à l'addition de 1, qui est de type entier, avec 1.5, qui est de type flottant. Ceci peut paraître anodin, mais c'est une opération qui ne va pas de soi sur un ordinateur. En fait, Python convertit automatiquement l'entier 1 en le flottant 1.0 pour pouvoir faire l'addition. Certains langages de programmation ne font pas cette conversion automatiquement et produiraient un message d'erreur.

Voir énoncé page 1

2 Les instructions composées

Exercice type 2

Lycée Jules Ferry, Versailles

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$.

Écrire un algorithme qui permet d'afficher $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(20)$.

Voir corrigé page 10

2.1 Les séquences d'instruction

Une séquence d'instructions est tout simplement une suite d'instructions à exécuter les unes après les autres. En Python, les instructions de la séquence doivent être écrites les unes sous les autres, avec la même indentation (c'est-à-dire, le même retrait).

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

```
a=3
print(a)
```

Si on manque de place, ou pour la clarté du code, on peut écrire les instructions de la séquence sur une même ligne. Elles doivent alors être séparées par un point-virgule :

```
a=3 ; print(a)
```

Chaque instruction de la séquence peut elle aussi être une séquence :

```
a=3 ; print(a)
b=2 ; print(b)
```

Une instruction simple est un cas particulier de séquence d'instructions.

2.2 Instruction conditionnelle : SI ... ALORS ...

L'instruction « SI ... ALORS ... » permet d'exécuter une ou plusieurs instructions si une condition est remplie. Sa structure générale est :

```
SI condition ALORS
    instruction(s) à exécuter si la condition est remplie
FIN SI
```

Le plus souvent, la condition est une égalité ou une inégalité portant sur une variable.

Exemple :

```
Variable x : nombre
Début
    x ← 0
    Si x>10 alors
        Afficher x
    Ajouter 20 à x
    Si x>10 alors
        Afficher x
    Fin Si
Fin
```

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Au début, x vaut 0. Comme la condition $x > 10$ est fausse, il ne se passe rien et on passe à la ligne suivante. On ajoute alors 20 à x , qui vaut maintenant 20. L'instruction suivante teste si $x > 10$, ce qui est vrai, donc la valeur de x est affichée, c'est-à-dire 20. Voici la version Python :



En Python

```
x = 0
if x > 10:
    print(x)
x = x + 20
if x > 10:
    print(x)
```

La séquence concernée par la condition doit être indentée (c'est-à-dire, qu'on doit faire un retrait). L'instruction `x = x + 20` n'est pas indentée et doit donc être exécutée quelle que soit la valeur de la condition `x > 10`.

Une variante de cette instruction est « SI ... ALORS ... SINON ... » :

```
SI condition ALORS
    instruction(s) à exécuter si la condition est remplie
SINON
    instruction(s) à exécuter si la condition n'est pas
    remplie
FIN SI
```

Exemple :

```
Variable x : nombre
Début
    x ← 0
    Si x > 10 alors
        Afficher x
    Sinon
        Afficher : "trop petit"
    Fin Si
Fin
```

Ici, x contient la valeur 0. Comme la condition $x > 10$ est fausse, c'est l'instruction qui suit "sinon" qui est exécutée et la chaîne de caractères : « trop petit » s'affiche à l'écran.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1



En Python

```
x = 0
if x > 10:
    print(x)
else:
    print("trop petit")
```

2.3 Les boucles POUR et TANT QUE

Une *boucle* permet d'exécuter plusieurs fois une ou plusieurs instructions.

2.3.1 - La boucle itérative POUR

On utilisera la boucle POUR quand on saura le nombre de fois qu'il faut exécuter un bloc d'instructions.

Sa structure générale est de la forme :

```
POUR variable ALLANT DE valeur initiale À valeur finale
    instruction(s) à répéter
FIN POUR
```

Remarques

- La variable, qui change de valeurs à chaque fois que la boucle s'exécute, est aussi appelée *variable de boucle* ou *compteur*, pour ne pas qu'il y ait d'ambiguïté avec les autres variables de l'algorithme.
- « FIN POUR » indique la fin de la liste des instructions à répéter.

Exemple : soit $f(x) = x^2 - 3x$.

Pour calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(20)$, on peut utiliser l'algorithme suivant.

```
Variables x,y : nombres
Début
    Pour x allant de 0 à 20
        y prend la valeur x**2-3*x
        Afficher y
    Fin Pour
Fin
```

On note que $x**2$ signifie que la valeur de x est mise au carré.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

En Python, on utilise le mot-clé *range* (*intervalle*, en anglais). Attention, par convention, la valeur finale est toujours exclue. Si on veut que *x* décrive les valeurs de 0 à 20 inclus, il faut donc demander que *x* prenne les valeurs de 0 à 21 (exclu) :



En Python

```
for x in range(0,21):
    y=x**2-3*x
    print(y)
```

Remarque : il n'est pas obligatoire d'utiliser la variable de boucle à l'intérieur même de la boucle. Par exemple, si on veut afficher 100 fois la chaîne « Bonjour ! », on pourra utiliser l'algorithme suivant.

```
Variable : i
Début
    Pour i allant de 1 à 100
        Afficher "Bonjour !"
    Fin Pour
Fin
```

En Python

```
for i in range(1,101):
    print("Bonjour !")
```

2.3.2 - La boucle conditionnelle TANT QUE

On utilise une boucle TANT QUE lorsque la longueur de la boucle n'est pas connue (ou difficile à prévoir) au moment de l'écriture de l'algorithme.

La forme générale de cette boucle s'écrit :

```
TANT QUE condition FAIRE
    instruction(s)
FIN TANT QUE
```

Remarque : « FIN TANT QUE » indique la fin de la liste des instructions à répéter.

On utilisera la boucle TANT QUE quand la condition dépendra du contenu de la boucle.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

Exemple : on veut afficher le plus petit entier n pour lequel $\frac{1}{n^2 + n + 1} \geq 10^{-6}$.
Pour cela, on utilise l'algorithme suivant.

```
Variable : n
Initialisation : n prend la valeur 0
Début
    Tant que  $1/(n*n+n+1) > 10^{-6}$ 
        n prend la valeur n+1
    Fin Tant que
    Afficher n
Fin
```

- Avant d'entrer dans la boucle, n vaut 0, et donc :

$$\frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{1}{0^2 + 0 + 1} = 1,$$

qui est strictement supérieur à 10^{-6} . Donc on exécute l'instruction dans la boucle : n est augmenté de 1, donc vaut 1.

- On teste à nouveau la condition :

$$\frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{1}{3},$$

qui est encore plus grand que 10^{-6} donc on exécute l'instruction à l'intérieur de la boucle.

- Ainsi de suite jusqu'à ce que $\frac{1}{n^2 + n + 1}$ soit strictement plus petit que 10^{-6} . Dans ce cas, on sort de la boucle et on affiche la dernière valeur de n , celle pour laquelle $\frac{1}{n^2 + n + 1} \leq 10^{-6}$ pour la première fois.



```
n = 0 # initialisation
while 1 / (n**2 + n + 1) > 10**(-6):
    n = n+1 # incrémentation
print(n)
```

Pour information, ce programme affiche le nombre 1 000.

Les boucles non bornées sont délicates à manier. Dans l'algorithme ci-dessus, il ne faut pas oublier d'initialiser ou d'incrémenter la variable n . Il faut s'assurer également que la condition finira par devenir fausse, sous peine que la boucle ne s'arrête plus (c'est ce qu'on appelle un « plantage »). Il n'y a pas ces difficultés avec une boucle bornée, pour laquelle l'initialisation, l'incrémentement et l'arrêt sont en général assurés.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type 2

Lycée Jules Ferry, Versailles

Il s'agit de répéter le calcul de $f(x)$, x prenant les valeurs 0, 1, etc. jusqu'à 20.

Une boucle POUR paraît tout indiquée.

📄 Algorithme

```
Variable : x
Début
  x ← 0
  Pour x allant de 0 à 20
    y ← (2*x**2+x)/(x**2+2*x+1)
    Afficher y
  Fin Pour
Fin
```

📄 En Python

```
for x in range(0,21):
    y = (2*x**2+x)/(x**2+2*x+1)
    print(y)
```

Voir énoncé page 4



3 Comment écrire une fonction en Python ?

Exercice type 3

Lycée Marie Curie, Sceaux

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donnée par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}.$$

Programmer la fonction $f(x)$ en Python.

Voir corrigé page 11

En mathématiques, une fonction f utilise un nombre x pour calculer une valeur $f(x)$.

Une fonction Python généralise ce principe. À partir d'un *argument* x (parfois plusieurs, parfois aucun !), elle exécute un certain nombre d'instructions et renvoie une valeur. Pour programmer une fonction, on utilise le mot-clé *def*. Le nom de la fonction doit vérifier les règles habituelles des noms de variables.

Ne pas oublier qu'un ordinateur fait ce qu'on lui demande, certes très vite, mais qu'il ne prend pas d'initiative. Lui demander de calculer une valeur ne suffit pas : il faut demander que cette valeur soit *communiquée*, d'une manière ou d'une autre.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

Prenons l'exemple de la fonction carré. Le programme :

```
def f(x):  
    x**2
```

ne contient pas de faute de langage. Cependant, il n'est pas satisfaisant parce que la fonction f calcule bien le carré de la variable x , mais le résultat du calcul est perdu. On peut penser à utiliser `print` :

```
def f(x):  
    print(x**2)
```

C'est déjà mieux, le résultat du calcul sera affiché à l'écran. Cependant, on ne peut pas utiliser $f(x)$ dans un calcul comme on le fait en mathématiques. par exemple : $1+f(2)$ va déclencher une erreur.

Le mieux est de demander à la fonction de renvoyer le résultat calculé à l'aide du mot-clé : `return`. Par exemple, la fonction « carré » s'écrit en Python :

```
def f(x):  
    return x**2
```

On peut ensuite utiliser la fonction dans un autre programme :

```
print(f(2))  
y = f(3)+1  
print(y)
```

À la première ligne, on « appelle » $f(2)$. Cette valeur est évaluée en remplaçant le x de la définition de f par 2. La fonction f renvoie alors la valeur 4, et c'est donc 4 qui est affiché. Dans l'instruction suivante, qui est une affectation, on évalue $f(3)$, c'est-à-dire 9, et c'est donc 10 qui est stocké dans y , puis affiché.

En fait, nous avons déjà rencontré des fonctions, comme `print` et même `range`.

On notera que `def` ou `return` ne sont pas suivis de parenthèses car ce sont des mots-clés et non des fonctions.

➡ Solution de l'exercice type 3

Lycée Marie Curie, Sceaux

La définition de la fonction commence par le mot-clé `def`. Il faut penser à bien indenter la séquence d'instructions et utiliser `return` pour renvoyer la valeur calculée.

```
def f(x):  
    y=(2*x**2-1)/(x+1)  
    return y
```

Voir énoncé page 10

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

1 QCM Entiers de 1 à 9

3 min

Corrigé
p. 18

On cherche à écrire un programme en Python qui affichera tous les nombres entiers de 1 à 9. Parmi ces propositions, écrites en Python, lesquelles vous paraissent correctes ?

- ☐ a) `if k>0 and k>0 : print(k)`
- ☐ b) `k=1 ; while k>0 : print(k)`
- ☐ c) `for k in range(1,10): print(k)`
- ☐ d) `for k in range(1,9): print(k)`

2 QCM De Python à un algorithme

5 min

Corrigé
p. 18

Voici un programme en Python :



```
x = 5
for i in range(0,10):
    x = x*2/(x-4)
    print(x)
```

Parmi les algorithmes suivants, quel est celui qui représente ce programme ?

☐ a)

```
x ← 5
Pour i allant de 1 à 10
    x ← x*2/(x-4)
Fin Pour
Afficher x
```

☐ b)

```
x ← 5
Pour i allant de 0 à 9
    x ← x*2/(x-4)
    Afficher x
Fin Pour
```

☐ c)

```
x ← 5
Pour i allant de 0 à 10
    x ← x*2/(x-4)
    Afficher x
Fin Pour
```

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

3 Traduire un programme Python



5 min

Corrigé
p. 18

Lycée Hoche, Versailles

Voici un programme Python :



```
u=50
d=10
n=0
while d>=0.01:
    u = 0.7*u+20
    d = 200/3 - u
    n = n + 1
print(n)
```

En utilisant une boucle « Tant que », écrire en langage naturel un algorithme qui décrit exactement ce que fait ce programme.

4 Un programme



20 min

Corrigé
p. 19

Lycée Turgot, Paris

On considère le programme suivant :



```
1 def f(x):
2     y=(x+2)*(x-1)
3     y=4*y
4     y=y+8
5     y=y/(x+1)
6     return y
```

- 1 Quel est le type des variables x ? y ? f ?
- 2 Pour quelle(s) valeur(s) de x l'algorithme va-t-il échouer ?
- 3 Que fait la fonction f ?

5 Programmes de calculs



10 min

Corrigé
p. 19

Lycée Notre-Dame-de-Boulogne, Boulogne

On considère les programmes de calculs page suivante :

- 1 Écrire deux fonctions Python $A(x)$ et $B(x)$ qui retournent respectivement les résultats du programme de calcul A et B pour un nombre x entré en argument.
- 2 Écrire un programme Python qui affiche les résultats des programmes A et B pour tous les entiers compris entre -5 et 5 .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

Programme A	Programme B
• Choisir un nombre x • Élever ce nombre au carré • Soustraire au résultat le double du nombre de départ • Ajouter 1 au résultat	• Choisir un nombre x • Lui soustraire 1 • Élever au carré le résultat

6 Pécule



10 min

Corrigé
p. 20

Lycée Rabelais, Meudon

Les parents de Johanna décident de lui constituer un petit pécule. Le jour de sa naissance, ils déposent 250 € sur un compte rapportant 2,75 % par an.

À chaque anniversaire, ils ajoutent également 250 €.

- 1 Écrire un algorithme avec une boucle POUR... qui permet de calculer le pécule de Johanna le jour de ses 18 ans.
- 2 Programmer cet algorithme en Python ou sur votre calculatrice.

7 Lecture d'un algorithme



10 min

Corrigé
p. 21

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : n, r, i, c (nombres entiers)
Début :
  c ← 0
  Lire la valeur de n
  i ← 2
  Tant que i**2 <= n faire:
    Si (n/i) est un entier alors
      c ← c+1
      i ← i+1
    Fin Si
  Fin Pour
  Si c=0 alors
    Afficher n " est un nombre premier"
  Sinon
    Afficher n " n'est pas un nombre premier"
  Fin Si
Fin
```

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

- 1 Exécuter à la main cet algorithme en prenant $n = 20$ puis $n = 23$ (présenter les résultats dans un tableau).
- 2 Expliquer le rôle de cet algorithme et la propriété qu'il semble utiliser.

8 Laboratoire pharmaceutique



10 min

Corrigé
p. 21

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Un laboratoire produisant un sirop contre la fièvre à destination de nouveau-nés fournit le protocole médical suivant : pour une température corporelle dépassant $38,5^{\circ}\text{C}$, donner 2 cuillères de sirop. Pour une température corporelle comprise entre $37,5^{\circ}\text{C}$ et $38,5^{\circ}\text{C}$, donner 1 cuillère de sirop.

On considère le programme Python suivant :



```
def sirop(T):  
    N = 0  
    if T > 37.5:  
        N = ...  
    if T >= 38.5:  
        N = ...  
    return N
```

- 1 À quoi sert cette fonction ? Préciser à quoi correspondent les variables T et N .
- 2 Compléter la fonction.
- 3 Le cas où le nouveau-né n'a pas de fièvre (température corporelle inférieure à $37,5^{\circ}\text{C}$) est-il prévu dans l'algorithme ? On pourra justifier la réponse en testant l'algorithme avec le nombre 37 en entrée.

9 Le site marchand



10 min

Corrigé
p. 22

Lycée Fénélon, Paris

Durant tout le week-end, un site marchand propose une promotion pour toute commande d'un montant minimum de 20 €.

Si le montant de la commande est :

- strictement inférieur à 100 €, une remise de 10 € est offerte.
 - entre 100 € compris et 200 € non compris, une remise de 25 € est offerte.
 - supérieur ou égal à 200 €, une remise de 20% est offerte.
- 1 Calculer le prix à payer pour une commande d'un montant de 130 €, de 80 € et de 300 €.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- 2 On a commencé l'écriture d'une fonction Python qui automatise le calcul du prix à payer pour une commande de montant $M \geq 20$:



```
def prix(M):
    if M < 20:
        return 0
    elif M < 100:
        ...
    elif M < 200:
        ...
    else:
        ...
```

Compléter le code pour qu'il fonctionne correctement.

10 La conjecture de Syracuse



20 min

Corrigé
p. 22

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

On considère la fonction A , qui à tout entier naturel n associe :

$$A(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

- 1 Calculer $A(1)$, $A(4)$, $A(2)$.
- 2 Programmer cette fonction en Python.
- 3 On considère le programme de calcul suivant :

```
1. Choisir un nombre entier  $n$  non nul.
2. Affecter  $n \leftarrow A(n)$ 
3. Aller à l'étape 2.
```

Que se passe-t-il si $n = 1$, 2, ou 4 ?

- 4 La conjecture de Syracuse (nommée ainsi car le problème fut diffusé pour la première fois à l'université de Syracuse, en Amérique, par le mathématicien Helmut Hasse) affirme que, quel que soit la valeur initiale de n , le programme arrive toujours à la suite de nombres 1, 4, 2, 1, 4, 2,...

On dit que ce résultat est une *conjecture* car il semble vrai mais il n'a pas été démontré.

Écrire un algorithme qui permet de vérifier cette conjecture pour n importe quel nombre entré par l'utilisateur.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

11 Le nombre d'or



20 min

Corrigé
p. 23

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Le *nombre d'or* est le nombre positif noté φ tel que :

$$\varphi^2 = \varphi + 1.$$

- 1 Expliquer pourquoi $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.
- 2 Montrer alors que $\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}$.
- 3 En s'inspirant des questions précédentes, écrire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée du nombre d'or (peu importe la précision).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 QCM Entiers de 1 à 9

Énoncé
p. 12

- a** Cette instruction n'est pas une boucle. Dans le meilleur cas, seule une valeur de k s'affichera à l'écran.
- b** Il s'agit bien d'une boucle, mais la valeur de k n'est pas incrémentée. Elle gardera donc toujours la valeur 1, et cette valeur sera affichée à l'écran un nombre indéfini de fois, jusqu'à ce que l'utilisateur arrête le programme ! On peut corriger le programme en ajoutant $k = k + 1$ dans la boucle pour incrémenter la variable k .
- c** C'est la solution élégante et efficace pour le problème posé.
- d** Attention, en Python la borne finale est toujours exclue, les entiers de 1 à 8 seront affichés.

```
k = 1
while k < 10:
    print(k)
    k = k + 1
```

2 QCM De Python à un algorithme

Énoncé
p. 12

Rappelons qu'en Python, la borne supérieure de l'intervalle est exclue, donc i prend les valeurs 0, 1, 2, ..., 9.

L'algorithme **a** n'affiche qu'une valeur car « Afficher x » est en dehors de la boucle « Pour ». Il ne peut donc pas convenir car dans le programme Python, l'indentation montre que l'affichage de x est bien à l'intérieur de la boucle `for` ; il faut donc que les valeurs successives de x s'affichent 10 fois. Or, l'algorithme **c** affiche 11 valeurs (car la boucle s'exécute pour i allant de 0 à 10 et il y a 11 valeurs : 0, 1, 2, 3, ..., 9, 10).

La bonne réponse est donc l'algorithme **b** qui affiche bien 10 valeurs (car i prend les valeurs 0, 1, 2, ..., 8, 9) de x .

3 Traduire un programme Python

Énoncé
p. 13

Lycée Hoche, Versailles

```
Variables : u, d, n (nombres)
Début
    u ← 50
    d ← 10
    n ← 0
    Tant que d ≥ 0,01 faire:
        u ← 0,7 × u + 20
        d ← 200/3 - u
        n ← n + 1
    Fin Tant que
    Afficher n
Fin
```

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

4 Un programme

Énoncé
p. 13

Lycée Turgot, Paris

- 1 x peut être entier (type « INT ») ou réel (type flottant, ou « FLOAT »).
À cause de la division, la variable y est toujours interprétée comme un flottant par Python.
Enfin, f est une fonction.
- 2 À la ligne 5, on effectue une division par $x + 1$.
La valeur $x = -1$ va donc causer une erreur de calcul (division par zéro).
- 3 Au début de l'évaluation de $f(x)$, $y = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$
puis $y = 4(x^2 + x - 2) = 4x^2 + 4x - 8$.
Ensuite, $y = (4x^2 + 4x - 8) + 8 = 4x^2 + 4x$.
La valeur finale est $y = \frac{(4x^2 + 4x)}{x + 1} = \frac{4x(x + 1)}{x + 1} = 4x$.
Conclusion : la fonction f ne fait que multiplier x par 4.

5 Programmes de calculs

Énoncé
p. 13

Lycée Notre-Dame-de-Boulogne, Boulogne

- 1 Il y a plusieurs manières d'aborder un tel exercice. L'une d'elles consiste à exprimer en fonction de x le résultat des deux programmes de calculs.

Programme A	Expressions algébriques
• Choisir un nombre x • Élever ce nombre au carré • Soustraire le double de x • Ajouter 1 au résultat	• x • x^2 • $x^2 - 2x$ • $x^2 - 2x + 1$

et

Programme B	Expressions algébriques
• Choisir un nombre x • Lui soustraire 1 • Élever au carré le résultat	• x • $x - 1$ • $(x - 1)^2$

Les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ peuvent donc s'écrire comme indiqué page suivante.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



```
def A(x):  
    return x*x - 2*x + 1  
  
def B(x):  
    return (x - 1)**2
```

2 Une possibilité de programme est la suivante :



```
x = -5  
  
while x <= 5:  
    print( A(x) , B(x) )  
    x = x + 1
```

Si nous préférons utiliser une boucle POUR, nous pouvons opter pour la solution suivante :



```
for x in range(-5,6):  
    print( A(x) , B(x) )
```

6 Pécule

Énoncé
p. 14

Lycée Rabelais, Meudon

1 Chaque année, le pécule de Johanna est donc multiplié par 1,0275 puis on lui ajoute 250.

Algorithme

```
Variables: anniversaire, pecule (nombres)  
Début  
    pecule ← 250  
    Pour anniversaire allant de 1 à 18  
        pecule ← 250 + 1,0275 × pecule  
    Fin Pour  
    Afficher pecule  
Fin
```

2 La traduction en Python est quasi-immédiate :



```
pecule = 250  
for anniversaire in range(1,19):  
    pecule = 250 + 1.0275*pecule  
    print(pecule)
```

Ce programme affiche la valeur 6130.75365, Johanna disposera donc de 6 130,75 € à son 18^{ème} anniversaire.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

7 Lecture d'un algorithme

Énoncé
p. 14

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

- 1 • La variable i est initialisée à la valeur 2, puis est incrémentée tant qu'elle reste inférieure ou égale à $\sqrt{n}$. Pour $n = 20$, i varie de 2 à 4.

Valeurs de i	-	2	3	4
Valeurs de c	0	1	1	2

Explications : quand $i = 2$, on fait la division $20 \div 2$ et on trouve un nombre entier (10). Donc c va augmenter de 1.

Ensuite, pour $i = 3$, comme $20 \div 3$ n'est pas un entier, c n'augmente pas.

Enfin, pour $i = 4$, $20 \div 4 = 5$ est un entier donc on ajoute 1 à c .

L'algorithme affiche ici : « 20 n'est pas un nombre premier » car $c \neq 0$.

- Pour $n = 23$, i varie également de 2 à 4.

Valeurs de i	-	2	3	4
Valeurs de c	0	0	0	0

En effet, parmi les nombres 2, 3 et 4, aucun n'est diviseur de 23 donc c n'augmente pas.

L'algorithme affiche donc ici : « 23 est un nombre premier » car $c = 0$.

- 2 A priori, cet algorithme compte les diviseurs de n compris entre 2 et $\sqrt{n}$. Le résultat est stocké dans le compteur c . Si c est égal à 0, l'algorithme en déduit que n est un nombre premier.

Cet algorithme semble s'appuyer sur une propriété qui pourrait s'écrire ainsi :

Si a est un entier de $]\sqrt{n}, n[$ qui divise n , alors $b = \frac{n}{a}$ est un entier de $]1, \sqrt{n}]$ qui divise n . Par conséquent, « Si un entier n n'admet aucun diviseur dans $[2, \sqrt{n}]$, alors il est premier. »

8 Laboratoire pharmaceutique

Énoncé
p. 15

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

- 1 Cet algorithme permet d'afficher le nombre de cuillères de sirop N à donner en fonction de la température T saisie.
- 2 La fonction complète est :



En Python

```
def sirop(T):  
    N = 0  
    if T > 37.5: N = 1  
    if T >= 38.5: N = 2  
    return N
```

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 Comme l'énoncé nous le suggère, on peut tester le cas où l'on appelle la fonction avec 37 en argument.

Les deux conditions $T > 38.5$ et $T \geq 37.5$ ne sont pas satisfaites et les instructions $N=2$ et $N=1$ ne sont pas exécutées. La valeur de N reste donc à 0, valeur retournée par la fonction.

Ceci est correct car si le nouveau-né n'a pas de fièvre, aucune cuillère de sirop ne doit être donnée.

Ainsi, le cas où le nouveau-né n'a pas de fièvre est prévu par l'algorithme.

9 Le site marchand

Énoncé
p. 15

Lycée Fénelon, Paris

- 1 • Pour 130 €, le prix à payer est :

$$130 - 25 = 105 \text{ €} \quad \text{car } 100 \leq 130 < 200.$$

- Pour 80 €, le prix à payer est :

$$80 - 10 = 70 \text{ €} \quad \text{car } 80 < 100.$$

- Pour 300 €, le prix à payer est :

$$\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 300 = 0,8 \times 300 = 240 \text{ €} \quad \text{car } 300 \geq 200.$$

2



```
def prix(M):  
    if M < 20:  
        return 0  
    elif M < 100:  
        return M - 10  
    elif M < 200:  
        return M - 25  
    else:  
        return 0.8 * M
```

Pour $M \in [20, 200[$, on retire 25 à M . Si $M \geq 200$, on fait une remise de 20%, on doit donc payer $0,80 \times M$. Si aucune des deux conditions n'est vérifiée, on atteint la dernière ligne, et M est renvoyé (pas de remise).

10 La conjecture de Syracuse

Énoncé
p. 16

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

- 1 $n = 1$ est impair, donc $A(1) = 3 \times 1 + 1 = 4$; $n = 4$ est pair, donc $A(4) = \frac{4}{2} = 2$; $n = 2$ est pair, donc $A(2) = 1$.

NOTIONS D'ALGORITHMIQUE • CHAP. 1

2

 En Python



```
def A(n):
    if n%2==0: return n//2
    else: return 3*n+1
```

L'instruction `n%2` calcule le reste de la division euclidienne par 2, qui vaut 0 si et seulement si n est pair. La division `n//2` est la division entière. Il est important de ne pas utiliser `n/2` qui donne un flottant (même si n est pair) et risque de poser des problèmes pour utiliser la valeur de $A(n)$ par la suite.

3

D'après la première question, si n prend la valeur 1, elle prend ensuite la valeur 4, puis 2, puis de nouveau 1, etc. Si $n = 2$ ou 4, on atteint la valeur $n = 1$ en 1 ou 2 étapes. Le programme donne alors la suite 1, 4, 2, 1, 4, 2, etc.

4

À la vue de la réponse à la troisième question, nous arrêtons le programme dès que n atteint la valeur 1. Tant que cette valeur n'est pas atteinte, on remplace la valeur de n par celle de $A(n)$.



```
n=120
while A(n)!=1:
    print(A(n))
    n=A(n)
```

Par exemple, pour $n = 120$, on obtient : 60, 30, 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1...

11 Le nombre d'or

 Énoncé
p. 17

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

1

Si $\varphi^2 = \varphi + 1$ alors il est facile de voir que $\varphi \neq 0$ donc on peut diviser cette égalité par φ :

$$\frac{\varphi^2}{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi} + \frac{1}{\varphi} \quad \text{soit :} \quad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

2

Dans l'égalité montrée à la question précédente, on remplace le φ du membre de droite par ce à quoi il est égal, à savoir $1 + \frac{1}{\varphi}$:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 Ce que nous avons fait à la question 2 peut être répété à l'infini :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}} = \dots$$

Ainsi, en généralisant, on pourrait considérer que :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Ce résultat se démontre, mais pas en classe de Seconde.

Pour calculer une valeur approchée de φ , on peut essayer de partir d'une variable f valant 1, puis faire une boucle dans laquelle f deviendra $1 + \frac{1}{f}$.

```
Variables
  n est un nombre
  f est un nombre
Initialisation
  f prend la valeur 1
Début
  Pour n allant de 1 à 100
    f prend la valeur 1+1/f
  Fin Pour
  Afficher f
Fin
```

Ici, nous avons souhaité répéter 100 fois l'instruction « f devient $1 + \frac{1}{f}$ », mais on peut bien sûr changer cette valeur (100) et mettre 200, 300,...



En Python

```
f=1
for n in range(100):
    f = 1 + 1/f
print(f)
```

En exécutant ce programme, la valeur affichée est :

1,618034.

Chapitre

2

Nombres et calculs

Plan du chapitre

1. Ensembles de nombres
2. Calculer avec les entiers
3. Règles de calculs
4. Intervalles

1 Ensembles de nombres

Exercice type 1

Lycée Edgar Quinet, Bourg-en-Bresse

- 1 Trouver le plus petit ensemble des nombres suivants.

$$-11; 2,4; \sqrt{7}; \sqrt{36}; -\frac{2}{3}; \frac{21}{3}.$$

- 2 Compléter par $\in$ ou $\notin$:

$$\sqrt{2} \dots \mathbb{R}; \sqrt{64} \dots \mathbb{Z}; \frac{3}{7} \dots \mathbb{N}; \pi \dots \mathbb{Q}.$$

Voir corrigé page 27

1.1 Inclusion des ensembles

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

- On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

- On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où $n \in \mathbb{N}$ (n appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$) et $a \in \mathbb{Z}$.

- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls).

- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire de tous les nombres.

À RETENIR

Si un ensemble est suivi d'une étoile en exposant, il a pour éléments tous les nombres de cet ensemble sauf 0.
Par exemple, $\mathbb{N}^* = \{1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$.

Définition 1 : inclusion de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles.
On dit que A est *inclus* dans B , et on note $A \subset B$, si tous les éléments de A sont dans B .

Propriété 1 : inclusion des ensembles de nombres

$\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, qui lui-même est inclus dans $\mathbb{D}$, etc. jusqu'à $\mathbb{R}$. On écrira alors :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Si on souhaite enlever un ou plusieurs nombres à un ensemble, on le fera suivre de : $\setminus \{\dots\}$.

Exemples

- $\mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ désigne l'ensemble de tous les rationnels sauf $\frac{1}{3}$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres réels auquel on a enlevé tous les nombres rationnels ; on appelle cet ensemble l'ensemble des *irrationnels*.

Il existe un ensemble sans élément, appelé l'*ensemble vide*, et on le note : $\emptyset$.

1.2 Plusieurs écritures pour un même nombre

Un nombre réel peut être *représenté* de plusieurs façons. Par exemple :

$$\frac{51}{5} = \frac{5,1}{0,5} = 10,2 = 1,02 \cdot 10^1$$

ou encore :

$$\frac{4}{3} = 1,3\overline{3} \dots$$

Quelle que soit l'écriture adoptée, il s'agit toujours du *même* nombre.

Par exemple,

- $\frac{51}{5}$ n'est pas uniquement rationnel ; c'est aussi un nombre décimal.
- $\sqrt{9}$ n'est pas uniquement réel ; c'est aussi un entier naturel car $\sqrt{9} = 3$.

Ces caractéristiques (décimal, entier, etc.) sont celles du nombre lui-même et non de son écriture.

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

Plus petit ensemble

Définition 2 : symbole d'appartenance

Si un nombre x appartient à un ensemble A , on écrira : $x \in A$.

Si un nombre x n'appartient pas à un ensemble A , on écrira : $x \notin A$.

On désignera par « plus petit ensemble » du nombre $\frac{51}{5}$ l'ensemble $\mathbb{D}$ car c'est *a minima* un décimal (il n'est pas entier). On écrira alors : $\frac{51}{5} \in \mathbb{D}$.

Ainsi, le plus petit ensemble de $\sqrt{9}$ est $\mathbb{N}$. On écrira alors : $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$.

Propriété 2

$\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.



Retrouvez la démonstration de cette propriété en vidéo.

Propriété 3

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.



Retrouvez en vidéo la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

➔ Solution de l'exercice type 1

Lycée Edgar Quinet, Bourg-en-Bresse

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1 • $-11 \in \mathbb{Z}$ | • $\frac{21}{3} = 7 \in \mathbb{N}$ | • $\sqrt{36} = 6 \in \mathbb{N}$ |
| • $2,4 \in \mathbb{D}$ | • $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$ | • $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ |
| 2 • $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ | • $\frac{3}{7} \notin \mathbb{N}$ | |
| • $\sqrt{64} \in \mathbb{Z}$ | • $\pi \notin \mathbb{Q}$ | |

Voir énoncé page 25

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Calculer avec les entiers

Exercice type 2

- 1 Décomposer 60 en produit de facteurs premiers.
- 2 Un terrain rectangulaire de longueur a , de largeur b (exprimées en mètres), a une aire de 60 m^2 . Sachant que a et b sont des entiers naturels et que l'écart $a - b$ est le plus petit possible, déterminer a et b .

Voir corrigé page 32

2.1 Savoir utiliser les multiples et les diviseurs

Définitions 3

Soient a et b deux entiers relatifs. S'il existe un entier q tel que $a = bq$, alors on dit que :

- a est un multiple de b
- b est un diviseur de a (ou « b divise a »).

Par exemple, 21 est un multiple de 7 (car $21 = 7 \times 3$), 5 est un diviseur de 15 (car $15 = 5 \times 3$).

Tous les entiers sont multiples de 1 (et de -1). 0 est le seul multiple de 0. Tout entier est multiple de lui-même (car $n = n \times 1$).

Inversement, 1 n'est multiple que de 1 (et -1), et 0 est multiple de tous les entiers (car $0 = n \times 0$).

Propriétés 4

- L'opposé d'un multiple de b est multiple de b .
- La somme (ou la différence) de deux multiples de b est un multiple de b .

En effet, cette somme s'écrit : $bq + br = b(q + r)$, avec q et r (et donc $q + r$) entiers.

Exemple : si 7 divise $n + 21$, alors 7 divise n . En effet, $n = (n + 21) + (-21)$ et 21 est multiple de 7.

La fonction Python `diviseur(k,n)`, écrite page suivante, vérifie si l'entier k est diviseur de l'entier naturel n . Le principe de l'algorithme est de faire défiler les multiples de k : $0, k, 2k, 3k$, etc., tant que ces multiples sont inférieurs strictement à n . Lorsque la boucle s'arrête, le multiple de k qu'on a atteint vérifie : soit $m = n$, donc n est multiple de k , soit $m > n$, donc n est compris au sens strict entre deux multiples consécutifs, donc n n'est pas multiple de k .

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2



```
def diviseur(k,n):
    m = 0
    while m < n:
        m = m + k
    if m==n:
        return True
    else:
        return False
```

Propriétés 5 : critères de divisibilité

L'entier n est divisible :

- par 2 si son écriture se termine par 0, 2, 4, 6, ou 8 (chiffre des unités) ;
- par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- par 5 si son écriture se termine par 0 ou 5 ;
- par 6 si n est divisible par 2 et par 3 ;
- par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- par 10^k si son écriture se termine par k zéros, où $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition 4

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. La fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si a et b n'ont pas de diviseur commun (autre que 1 ou -1).

Exemple : $\frac{15}{8}$ est irréductible, mais pas $\frac{12}{8}$ car $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

2.2 PGCD et PPCM

Définitions 5

Soient a et b deux nombres entiers.

- On appelle PGCD le plus grand entier qui divise a et b .
- On appelle PPCM le plus petit entier multiple de a et de b .

ANECDOTE

« PPCM » est l'abréviation de « Plus Petit Commun Multiple » et « PGCD » est celle de « Plus Grand Commun Diviseur ». Elles viennent de l'ancien français.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Définition 6 : division euclidienne

Soient a et b deux nombres entiers, avec $a > b$. La *division euclidienne* de a par b est l'égalité :

$$a = bq + r, \quad q \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq r < b.$$

Exemple : la division euclidienne de 234 par 126 est :

$$234 = 1 \times 126 + 108$$

avec $q = 1$ et $r = 108$.

MÉTHODE : algorithme d'Euclide

On souhaite trouver le PGCD de 234 et 126 en utilisant des divisions euclidiennes. On commence par écrire :

$$234 = 1 \times 126 + 108.$$

Ensuite, on effectue la division euclidienne de 126 par le reste trouvé, donc par 108 :

$$126 = 1 \times 108 + 18.$$

On effectue ensuite la division euclidienne de 108 par 18 :

$$108 = 6 \times 18 + 0.$$

On s'arrête lorsque le reste est égal à 0.

Le PGCD de 234 et 126 est le dernier reste non nul trouvé, donc 18.

2.3 Pairs et impairs

Définition 7

Les multiples de 2 sont les entiers *pairs*. Les autres entiers sont *impairs*.

Par définition, les entiers pairs sont donc de la forme $2n$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

Les entiers impairs sont de la forme $2n + 1$.

Propriétés 6

- Le carré d'un entier pair est pair.
- Le carré d'un entier impair est impair

Propriétés 7

Soit x un entier.

- Si x^2 est pair, alors x est pair.
- Si x^2 est impair, alors x est impair.

2.4 Nombres premiers

Définition 8

Un entier naturel est *premier* s'il admet exactement *deux* diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Les 10 plus petits nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

La fonction Python suivante permet de tester si un nombre n est premier ou pas.



```
def premier(n):
    for k in range(2,n):
        if diviseur(k,n) == True:
            return False

    return True # si aucun diviseur n'a été trouvé
```

Un ordinateur est rapide, mais pour vérifier « à la main » si un entier n est premier, ou si cet entier est grand, il faut améliorer l'algorithme.

On peut s'aider de la propriété suivante :

Propriété 8

Si un entier n n'est pas premier alors il admet au moins un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

En prenant la contraposée de cette propriété, on peut vérifier si un nombre est premier.

Exemple : vérifions que 97 est premier.

$\sqrt{97} \approx 9,8$ donc si 97 n'est pas premier, il doit avoir au moins un diviseur parmi les nombres 2, 3, 5 et 7 (tous les nombres premiers inférieurs à 9,8).

On vérifie aisément que ces nombres ne divisent pas 97, donc ce dernier est un nombre premier.

La fonction Python précédente peut alors devenir :



```
from math import sqrt

def premier(n):
    n = int( sqrt(n) ) # partie entière de la racine carrée
    for k in range(2,n+1):
        if diviseur(k,n) == True:
            return False

    return True # si aucun diviseur n'a été trouvé
```

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type 2

- 1 On essaye les nombres premiers à partir du plus petit : $60 = 2 \times 30$, puis $30 = 2 \times 15$. Ensuite, $15 = 3 \times 5$. Finalement, $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.
- 2 Pour décomposer 60 en produit de deux facteurs, à part $60 = 1 \times 60$, on peut considérer que le premier facteur est premier et le second produit de trois diviseurs premiers, ou que les deux facteurs sont produits de deux diviseurs premiers.
On obtient ainsi $60 = 1 \times 60 = 2 \times 30 = 3 \times 20 = 5 \times 12 = 4 \times 15 = 6 \times 10$. On a trouvé toutes les décompositions possibles de 60 sous la forme ab . On veut $a - b \geq 0$ et $a - b$ le plus petit possible, on a donc $a = 10$ et $b = 6$.

Voir énoncé page 28

3 Règles de calculs

Exercice type 3

Lycée Ampère, Lyon

Calculer et écrire sans radicaux au dénominateur :

$$A = \frac{7}{\sqrt{2} + 1} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

Voir corrigé page 34

3.1 Règles de calculs avec les fractions

On rappelle ici les différentes techniques vues au collège :

- *Somme et différence.*

On réduit au même dénominateur. Dans le pire des cas, le produit des dénominateurs peut servir :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Si les dénominateurs ont un diviseur commun intéressant, on peut trouver un dénominateur commun plus petit que le produit :

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}.$$

- *Produit.*

Le numérateur du produit est le produit des numérateurs, le dénominateur du produit est le produit des dénominateurs :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

Notez qu'il peut être judicieux de décomposer les différents facteurs et simplifier *avant* de multiplier :

$$\frac{32}{35} \times \frac{25}{8} = \frac{4 \times 8}{5 \times 7} \times \frac{5 \times 5}{8} = \frac{4 \times 8 \times 5 \times 5}{5 \times 7 \times 8} = \frac{4 \times 5}{7} = \frac{20}{7}$$

est préférable (si on calcule à la main) à :

$$\frac{32}{35} \times \frac{25}{8} = \frac{800}{280} = \dots = \frac{20}{7}.$$

Bien sûr, si vous faites le même calcul à la machine, vous pouvez préférer la deuxième méthode, moins économique mais plus directe.

• *Quotient.*

Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse. Par exemple :

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{16} \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4 \times 5} = \frac{3}{20}.$$

Remarque : le mot *fraction* désigne seulement une *écriture* du type : $\frac{a}{b}$. Le

nombre ainsi représenté n'est pas nécessairement rationnel. Ainsi, $\frac{\sqrt{2}}{3}$ est un nombre irrationnel, écrit sous la forme d'une fraction.

Rassurez-vous : les règles de calculs que nous venons d'énoncer s'appliquent à toutes les fractions, qu'elles représentent ou non un nombre rationnel.

3.2 Règles de calcul avec les radicaux

Propriétés 9

Soient a et b deux réels positifs.

- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
- si $a > 0$ et $b > 0$, alors $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ (car en élevant au carré : $a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$).
- $(\sqrt{a})^2 = a$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$. (Par exemple, si $x = -2$, $\sqrt{x^2} = +2$!)

Le mot *radical* désigne une façon d'écrire certains nombres.

Le nombre 2 est une *racine carrée*, (celle de 4), mais ce n'est un radical que si on l'écrit sous la forme : $\sqrt{4}$.

Dans l'écriture des fractions, on évite de laisser des radicaux au dénominateur.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- *Cas n° 1* : le dénominateur *est* un radical. On simplifie en le multipliant par lui-même. Par exemple :

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

- *Cas n° 2* : le dénominateur est une somme contenant des radicaux. On utilise alors sa quantité conjuguée. La quantité conjuguée de $a + b$ est l'expression $a - b$. On fait alors apparaître $(a - b)(a + b)$ qui, une fois développé, est égal à $a^2 - b^2$, ce qui permet de se débarrasser des radicaux. Par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} &= \frac{2 \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2 \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} \\ &= \frac{2 \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Voir le chapitre « Calcul littéral » pour plus d'informations sur les identités remarquables.

3.3 Règles de calcul avec les puissances

Propriétés 10

Soient a et b deux réels non nuls, et soient p , q et n trois entiers relatifs.

- $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$;
- $a^p \times a^q = a^{p+q}$;
- $a^n \times b^n = (ab)^n$ (avec le même exposant n).
- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

➔ Solution de l'exercice type 3

Lycée Ampère, Lyon

$$\begin{aligned} A &= \frac{7}{\sqrt{2} + 1} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{7(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} + \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{7(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} + \frac{2\sqrt{3} \times (\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} \\ &= 7\sqrt{2} - 7 + \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 7\sqrt{2} - 7 + 3 + \sqrt{3} \\ &= 7\sqrt{2} - 4 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Voir énoncé page 32

4 Intervalles

Exercice type 4

Lycée Alain, Le Vésinet

Exprimer par un intervalle :

- 1 $x > 2$
- 2 $x \leq -3$
- 3 $-1 < x \leq 5$
- 4 $x > 2$ et $x < 6$
- 5 $x < 2$ ou $x \geq 4$

Voir corrigé page 36

4.1 Notations et représentations

Définition 9

L'ensemble des nombres réels compris entre deux réels a et b est un *intervalle*.

- Si a et b sont dans l'intervalle, on note cet intervalle $[a; b]$.
- Si a et b ne sont pas dans l'intervalle, on note cet intervalle $]a; b[$.
- Si a est compris dans l'intervalle, mais pas b , on note cet intervalle $[a; b[$.
- Si b est compris dans l'intervalle, mais pas a , on note cet intervalle $]a; b]$.

On représentera les intervalles sur l'axe des réels comme dans les exemples ci-dessous.

Exemples

- L'intervalle $[-3; 5]$ peut se représenter ainsi :



$$x \in [-3; 5] \iff -3 \leq x \leq 5.$$

- L'intervalle $[-3; 5[$ peut se représenter ainsi :



$$x \in [-3; 5[\iff -3 \leq x < 5.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Exemples

- L'intervalle $] - 3; 5]$ peut se représenter ainsi :



$$x \in] - 3; 5] \iff -3 < x \leq 5.$$

- L'intervalle $] - 3; 5[$ peut se représenter ainsi :



$$x \in] - 3; 5[\iff -3 < x < 5.$$

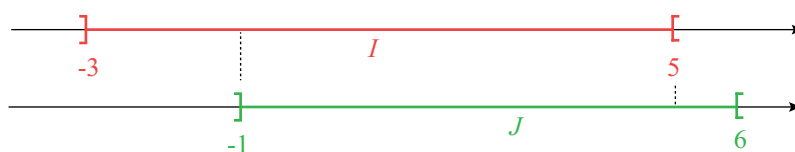
4.2 Union et intersection de deux intervalles

Définitions 10

Soient I et J deux intervalles.

- L'*union* (ou la *réunion*) de I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I ou dans J . On note l'union : $I \cup J$.
- L'*intersection* de I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I et dans J . On note l'intersection : $I \cap J$.

Exemple : on considère les intervalles $I =] - 3; 5[$ et $J =] - 1; 6[$.



- $I \cup J =] - 3; 6[$: les deux intervalles se chevauchent donc on peut aller de la plus petite valeur jusqu'à la plus grande.
- $I \cap J =] - 1; 5[$: on regarde où les deux intervalles se chevauchent.

Remarque : si les deux intervalles ne se chevauchent pas, leur intersection est vide ($I \cap J = \emptyset$) et leur union ne peut pas s'écrire plus simplement que $I \cup J$.

➔ Solution de l'exercice type 4

Lycée Alain, Le Vésinet

1 $]2; +\infty[$

3 $] - 1; 5]$

5 $] - \infty; 2[\cup]4; +\infty[$

2 $] - \infty; -3]$

4 $]2; 6[$

Voir énoncé page 35

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

1 QCM Décimaux

1 min

Corrigé
p. 45

Quels sont les décimaux ?

☐ a $1,27$

☐ b $-\frac{17}{3}$

☐ c $\sqrt{64}$

☐ d $\sqrt[3]{8} - \sqrt{2}$

2 QCM Rationnels

1 min

Corrigé
p. 45

Quels sont les rationnels ?

☐ a -15

☐ b $\sqrt{5}$

☐ c $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

☐ d $2,34$

3 V/F Radicaux

2 min

Corrigé
p. 45

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

☐ a $\sqrt{2} - 1$ est l'opposé de $\sqrt{2} + 1$ ☐ b $\sqrt{2} - 1$ est l'inverse de $\sqrt{2} + 1$

☐ c $\sqrt{8} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ☐ d $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{10}$

☐ e $\sqrt{-4} = -2$

4 V/F Fractions

3 min

Corrigé
p. 45

Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

☐ a $\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

☐ b $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

☐ c $\frac{3}{5} \times \frac{20}{9} = \frac{4}{3}$

☐ d $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

5 V/F Intervalles

5 min

Corrigé
p. 46

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

☐ a Si $0 \leq x \leq 3$, alors $x \in]0; 3[$.

☐ b Si $x > 4$, alors $x \in [4; +\infty[$.

☐ c Si $x \in]-\infty; 2] \cap [0; 4]$ alors $x \geq 0$ et $x \leq 2$.

☐ d Si $x \in]-\infty; 4] \cap [0; 2]$ alors $x \leq 4$ et $x > 2$.

☐ e Si $x \in [0; 1] \cup [2; 3]$ alors $x \in [0; 1]$ et $x \in [2; 3]$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

6 QCM Nombres premiers

5 min

Corrigé
p. 46

On considère deux entiers premiers p et q , strictement supérieurs à 2. Parmi les entiers suivants, quels sont ceux qui pourraient être premiers ?

☐ a $p + q$

☐ b $p + q + 1$

☐ c $p + q + 2$

☐ d pq

7 V/F Test de connaissances

5 min

Corrigé
p. 46

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1 Il existe des nombres décimaux non entiers a et b tels que $a + b$ soit un entier relatif.

2 Rachel affirme : « $\pi = \frac{1\,980\,127}{630\,294}$ ».

Pour cela, elle montre son écran de calculatrice :

π
3.141592654
1980127 ÷ 630294
3.141592654

3 Le produit d'un nombre décimal par 100 est un entier.

4 Le quotient de deux nombres rationnels non nuls est un rationnel.

Ensembles de nombres

8 Plus petit ensemble



10 min

Corrigé
p. 47

Lycée Jacques Prévert, Taverny

Pour chaque nombre, donner le plus petit ensemble, parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ auxquels ils appartiennent :

$$5 \times 10^{-4}, \quad \frac{3,6 \times \sqrt{4}}{3}, \quad \frac{64}{3}, \quad \sqrt{\frac{25}{16}}, \quad \sqrt{\frac{49}{9}}.$$

9 Les différents ensembles



10 min

Corrigé
p. 47

Lycée Montchapet, Dijon

On considère les nombres suivants :

- 4,567
- -10^3
- 4×10^{-3}
- 10^{-3}
- 6 545
- $\sqrt{\pi}$

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

- $-\frac{3}{100}$
- $-\frac{22}{9}$
- $\frac{2}{\pi}$
- $\sqrt{3}$
- $-\frac{23}{6}$
- $\sqrt{\sqrt{81}}$
- $\frac{1}{3}$
- $\sqrt{144}$
- 0

- 1 Quels sont ceux qui sont décimaux ?
- 2 Quels sont ceux qui sont rationnels mais non décimaux ?
- 3 Quels sont ceux qui ne sont pas rationnels ?

10 Ensembles inclus



15 min

Corrigé
p. 48

Lycée Victor Louis, Talence

On donne les nombres :

$$a = 3,507$$

$$b = 5\,998$$

$$c = \sqrt{121}$$

$$d = 3,14$$

$$e = \frac{21}{6}$$

$$f = \pi$$

$$g = 4 \times 10^{-3}$$

$$h = \frac{1}{3}$$

$$i = 5^{-2}$$

$$j = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{8}{5} \times \frac{17}{12}$$

$$k = -\frac{22}{7}$$

$$l = \sqrt{2}$$

$$m = (3^2)^3 \times \frac{1}{9} \times 5^{-4}$$

- Quels sont les nombres décimaux ?
- Quels sont les nombres rationnels non décimaux ?
- Quels sont les nombres non rationnels ?

11 Appartenance, inclusion



15 min

Corrigé
p. 48

Lycée Gérard de Nerval, Soissons

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$.

$$1 \quad \frac{-15}{3} \dots \mathbb{Z}$$

$$2 \quad \sqrt{9} \dots \mathbb{N}$$

$$3 \quad \mathbb{Z} \dots \mathbb{Q}$$

$$4 \quad \pi \dots \mathbb{Q}$$

$$5 \quad \mathbb{N} \dots \mathbb{Q}^*$$

$$6 \quad 10^{-3} \dots \mathbb{R}_+$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Calculs sur les fractions et puissances

12 Décompositions



5 min

Corrigé
p. 49

Lycée Henri IV, Paris

Écrire sous la forme $2^n \times 3^p \times 5^q$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$:

1 $A = \frac{5^3 \times 8^3 \times 9^2}{15^2 \times 12^4}$

2 $B = \frac{12^3 \times 15^{-3}}{5^{-2} \times 2^3}$

13 Simplification



5 min

Corrigé
p. 49

Lycée Hoche, Versailles

Simplifier l'écriture de $A = \frac{(0,2)^3 \times 10^4}{2^3 \times 81} \div \frac{-8^3 \times 15}{(-12)^5}$.

14 Calculs et simplifications



10 min

Corrigé
p. 49

Lycée Louis le Grand, Paris

Calculer :

1 $A = \frac{-1^5(2^3)(-7)^4}{21^2(-6)^3}$

2 $B = \frac{3 - \frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{4}{15} - \frac{1}{10}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} \div \frac{1 + \frac{2}{5}}{2 - \frac{1}{5}}$

15 Calculs et simplifications



20 min

Corrigé
p. 50

Lycée Blaise Pascal, Orsay

1 Calculer $A = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{6}}$.

2 Simplifier $B = \frac{(5^2 \times 10^{-5})^3}{(5 \times 10^{-3})^5} \times \left(\frac{10^2}{5}\right)^2$.

3 Écrire plus simplement :

(a) $C = 2^{23} \times (0,5)^{24}$

(b) $D = \left(\frac{2}{3}\right)^{108} \times (1,5)^{107}$

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

4 Donner l'écriture scientifique des nombres :

$$a = 0,000\,073\,654$$

$$b = 9\,325\,000$$

$$c = 0,023 \times 10^{-5}$$

$$d = 19,402 \times 10^2$$

16 Produit de puissances



5 min

Corrigé
p. 51

Lycée Hoche, Versailles

Écrire sous la forme d'un produit de puissances de a , b et c ($\neq 0$) :

$$B = \left(\frac{a^3}{c}\right)^2 \div \frac{[(a^7)^5 b^{-2} (c^{-3})^{-2}]^{-1}}{[ab^2(c^{-2})^{-3}]^2}$$

17 Calculs d'une somme avec fractions



15 min

Corrigé
p. 51

Lycée Louis le Grand, Paris

Écrire sous la forme d'une fraction :

$$A = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

En déduire :

$$B = \frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13} + \frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20 \times 21 \times 22}.$$

Calculs avec les entiers (arithmétique)

18 PGCD



10 min

Corrigé
p. 53

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

- 1 Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 1 040 et 640.
- 2 En déduire le PGCD de 1 040 et 640.
- 3 Un jardinier désire planter une haie autour d'une parcelle rectangulaire de longueur 10,4 mètres et de largeur 6,4 mètres. Il place un plant à chaque sommet du rectangle. La distance entre deux plants doit toujours être la même et doit être égale à un nombre entier de centimètres.
 - (a) Quelle est la distance maximale qui peut séparer deux plants successifs ?
 - (b) Calculer le nombre de plants nécessaires pour entourer la parcelle rectangulaire.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

19 Somme et multiples



10 min

Corrigé
p. 53

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

- 1 Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
- 2 Démontrer que la somme de trois multiples consécutifs de 3 est un multiple de 9.
- 3 La somme de quatre entiers consécutifs est-elle un multiple de 4 ?

20 Implication sur la divisibilité



10 min

Corrigé
p. 54

Lycée Loquidy, Nantes

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si a divise $n + 4$ et $2n - 3$ alors a est un diviseur de 11.

21 Ensemble d'entiers et divisibilité



10 min

Corrigé
p. 54

Lycée Louis Vincent, Metz

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n + 24$.

22 Parité



10 min

Corrigé
p. 55

Lycée Pierre Caraminot, Egletons

Montrer que le produit de deux entiers naturels consécutifs est toujours pair.

23 Nombres premiers



15 min

Corrigé
p. 55

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

On considère un entier n non nul et des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$, deux à deux distincts, et $a = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$.

- 1 L'entier a est-il multiple d'un des p_k ?
- 2 Euclide a utilisé cette propriété pour démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini. Expliquez son argument.

Radicaux

24 Avec racines carrées



5 min

Corrigé
p. 56

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Montrer que $(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2$ est un entier naturel.

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

25 Ensembles inclus



5 min

→ Corrigé
p. 56

Lycée Victor Louis, Talence

Soit $n = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{9-5\sqrt{3}}{10}$.

Quel est le plus petit ensemble auquel appartient n ?

26 Simplification



5 min

→ Corrigé
p. 57

Lycée Henri IV, Paris

Simplifier afin que le résultat contienne au plus un radical $\sqrt{b}$, où $b \in \mathbb{N}$, et b est le plus petit possible.

1 $C = \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{12}$

2 $D = \sqrt{\frac{6,3}{2,8}} \times \sqrt{\frac{18}{0,72}}$

27 Simplification



10 min

→ Corrigé
p. 57

Lycée Charlemagne, Paris

Écrire A et B sous la forme $a + \sqrt{b}$, où a et b sont rationnels.

1 $A = \frac{3}{\sqrt{5}+2}$

2 $B = \frac{2\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-1}$

28 Calcul avec fractions et radicaux



5 min

→ Corrigé
p. 58

Lycée Louis-le-Grand, Paris

Calculer :

$$A = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 8\sqrt{2}.$$

29 Avec une identité remarquable



10 min

→ Corrigé
p. 58

Lycée André Malraux, Biarritz

1 Écrire $(3 - \sqrt{11})^2$ sous la forme $a + b\sqrt{11}$, où a et b sont des nombres entiers relatifs.

2 Quel est le signe de $3 - \sqrt{11}$?

3 En déduire une autre écriture de $\sqrt{20 - 6\sqrt{11}}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

30 Radicaux



15 min

Corrigé
p. 59

Lycée Hoche, Versailles

1 Simplifier :

$$\bullet I = \sqrt{50} - 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{18}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet J = 7\sqrt{\frac{3}{7}} \times \sqrt{\frac{30}{49}}$$

$$\bullet K = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\bullet L = \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right)^2$$

2 Calculer $(2 - \sqrt{13})^2$ et en déduire une écriture plus simple de $Y = \sqrt{17 - 4\sqrt{13}}$

Intervalles

31 Union et intersection



2 min

Corrigé
p. 60

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Déterminer l'union et l'intersection des intervalles $I =]5; 9]$ et $J = [-8; 6]$.

32 Union et intersection



10 min

Corrigé
p. 60

Lycée Cité internationale, Paris

Pour chacun des intervalles I et J suivants, décrire $I \cap J$ et $I \cup J$ de la manière la plus simple possible.

1 $I =]-3; 7]$ et $J = [-1; +\infty[$

2 $I =]-\infty; 4[$ et $J = [4; 10]$

3 $I = [-10; 2]$ et $J = [-3; 7]$

4 $I =]-\infty; 3]$ et $J = [-6; +\infty[$

5 $I =]-4; 2[$ et $J =]2; 5]$

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

1 QCM Décimaux

Énoncé
p. 37

- a** $1,27 = \frac{127}{100}$ est décimal.
b 3 ne divise ni 10, ni 17, donc $-\frac{17}{3}$ est rationnel, mais il n'est pas décimal.
c $\sqrt{64} = 8$ est entier, donc décimal.
d $\sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ n'est pas rationnel, donc pas décimal.

2 QCM Rationnels

Énoncé
p. 37

- a** -15 est entier, donc rationnel.
b $\sqrt{5}$ est irrationnel.
c $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{9} = 3$ est entier, donc rationnel.
d $2,34$ est décimal, donc rationnel.

3 V/F Radicaux

Énoncé
p. 37

- a** Faux. L'opposé de $\sqrt{2} + 1$ est $-(\sqrt{2} + 1)$, soit $-\sqrt{2} - 1$.
b Vrai car $(\sqrt{2} - 1) \times (\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$.
c Vrai car $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
d Faux car $\sqrt{8} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, donc $(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$, et non 10.
e Faux car la racine carrée de -4 n'est pas définie (ne pas confondre avec $-\sqrt{4} = -2$).

4 V/F Fractions

Énoncé
p. 37

- a** Faux mais $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.
b Faux : $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$.
c Vrai : $\frac{3}{5} \times \frac{20}{9} = \frac{3 \times 4 \times 5}{5 \times 3 \times 3} = \frac{4}{3}$.
d Faux car $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12} \neq \frac{2}{3}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 **V/F** Intervalles

→ Énoncé
p. 37

- a** Faux. L'intervalle est : $[0; 3]$ (inégalités larges).
- b** Faux. Si $x > 4$, alors $x \in]4; +\infty[$.
- c** Vrai. x doit appartenir aux deux intervalles. On a donc, d'une part : $x \leq 2$ et $x \leq 4$, donc $x \leq 2$, et de l'autre : $x \geq 0$.
- d** Faux. On doit avoir $x \in [0; 2]$ donc $0 \leq x \leq 2$.
- e** Faux. Les deux conditions sont d'ailleurs incompatibles. Il faudrait dire : « Si $x \in [0; 1] \cup [2; 3]$ alors $x \in [0; 1]$ ou $x \in [2; 3]$. »

6 **QCM** Nombres premiers

→ Énoncé
p. 38

Il faut observer que comme p et q sont des entiers premiers, différents de 2, ils sont nécessairement impairs.

- a** Non car $p + q$ est pair et $p + q \neq 2$.
- b** Oui. $p + q + 1$ n'est pas toujours premier, mais peut l'être. Par exemple $3 + 7 + 1 = 11$ est premier (mais $3 + 11 + 1 = 15$ ne l'est pas).
- c** Non, pour la même raison qu'à la réponse 1.
- d** Non car pq admet quatre diviseurs distincts : pq , p , q et 1.

7 **V/F** Test de connaissances

→ Énoncé
p. 38

- 1** Vrai. Par exemple, si $a = -3,8$ et $b = -1,2$ (nombres non entiers) alors $a + b = -5$ (entier relatif).
- 2** Faux. Si la calculatrice affiche un nombre avec les mêmes décimales, c'est que sa capacité d'affichage n'est pas suffisante pour afficher les décimales qui ne coïncident pas. En effet, en utilisant par exemple la console Python, on voit :

```
> > > from math import pi
> > > print(pi)
3.141592653589793
> > > print(1980127/630294)
3.141592653587056
```

Les résultats diffèrent.

- 3** Faux. En effet, si $a = 0,0001$ (nombre décimal) alors $100 \times a = 0,01$ (qui n'est pas un entier).
- 4** Faux. En effet, si $a = \frac{1}{3}$ et $b = a$ alors $\frac{a}{b} = 1$, qui est plus qu'un nombre rationnel... c'est un entier naturel !

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

8 Plus petit ensemble

Énoncé
p. 38

Lycée Jacques Prévert, Taverny

- 1 $5 \times 10^{-4} = 0,0005$ est un nombre décimal.
- 2 $\frac{3,6 \times \sqrt{4}}{3} = 1,2 \times 2 = 2,4$ est un nombre décimal.
- 3 $\frac{64}{3}$ est rationnel (mais non décimal).
- 4 $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1,25$ est décimal.
- 5 $\sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$ est rationnel, non décimal.

9 Les différents ensembles

Énoncé
p. 38

Lycée Montchapet, Dijon

- 1 Rappel : un nombre est *décimal* s'il s'écrit sous la forme :

$$\frac{n}{10^k}, \quad n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, les nombres entiers sont des décimaux, puisqu'ils s'écrivent :

$$n = \frac{n}{10^0}.$$

Parmi ceux proposés, sont décimaux :

- 4,567 car $4,567 = \frac{4\,567}{1\,000}$;
- 10^{-3} car $10^{-3} = \frac{1}{1\,000}$;
- $-10^3 = -1\,000$ est entier, donc décimal ;
- 6 545 est entier, donc décimal ;
- 4×10^{-3} car $4 \times 10^{-3} = \frac{4}{1\,000}$;
- $-\frac{3}{100}$;
- $\sqrt{144} = 12$ est entier, donc décimal ;
- 0 est entier, donc décimal ;
- $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$ est entier, donc décimal.

- 2 Sont rationnels mais non décimaux : $\frac{1}{3}, -\frac{22}{9}, -\frac{23}{6}$.
- 3 Sont irrationnels : $\sqrt{\pi}, \sqrt{3}, \frac{2}{\pi}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

10 Ensembles inclus

Énoncé
p. 39

Lycée Victor Louis, Talence

- a est décimal.
- b est entier, donc décimal.
- $c = \sqrt{121} = 11$ est entier, donc décimal.
- $d = 3,14$ est décimal.
- $e = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$ est décimal.
- $f = \pi$ est irrationnel.
- $g = \frac{4}{1\,000} = 0,004$ est décimal.
- $h = \frac{1}{3}$ est rationnel mais non décimal.
- $i = 5^{-2} = \frac{1}{25} = 0,04$ est décimal.
- $j = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{8}{5} \times \frac{17}{12} = \frac{5}{15} - \frac{9}{15} + \frac{34}{15} = \frac{30}{15} = 2$, qui est entier.
- $k = \frac{-22}{7}$ est rationnel, non décimal.
- $l = \sqrt{2}$ est irrationnel.
- $m = (3^2)^3 \times \frac{1}{9} \times 5^{-4} = \frac{9^2}{5^4} = 0,1296$ est décimal.

11 Appartenance, inclusion

Énoncé
p. 39

Lycée Gérard de Nerval, Soissons

- 1 $\frac{-15}{3} \in \mathbb{Z}$. En effet, $\frac{-15}{3} = -5$.
- 2 $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$ car $\sqrt{9} = 3$.
- 3 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. En effet, tous les entiers sont en particulier rationnels, car ils peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers ; par exemple, $5 = \frac{5}{1}$.
- 4 $\pi \notin \mathbb{Q}$, car π n'est pas rationnel. C'est pour cela que le développement décimal de π , non seulement est infini, mais de plus ne se « répète » jamais. « Pire », on ne peut même pas écrire π comme la racine d'un nombre rationnel (on dit que π est « transcendant »).
- 5 $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}^*$ car $0 \in \mathbb{N}$ mais $0 \notin \mathbb{Q}^*$.
- 6 $10^{-3} \in \mathbb{R}_+$, car 10^{-3} est positif.

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

12 Décompositions

Énoncé
p. 40

Lycée Henri IV, Paris

$$\begin{aligned} 1 \quad A &= \frac{5^3 \times 8^3 \times 9^2}{15^2 \times 12^4} \\ &= \frac{5^3 \times 2^9 \times 3^4}{3^2 \times 5^2 \times 3^4 \times 2^8} \\ &= \frac{5 \times 2}{3^2} \\ &= 5 \times 3^{-2} \times 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad B &= \frac{12^3 \times 15^{-3}}{5^{-2} \times 2^3} \\ &= \frac{12^3 \times 5^2}{15^3 \times 2^3} \\ &= \frac{2^6 \times 3^3 \times 5^2}{5^3 \times 3^3 \times 2^3} \\ &= \frac{2^3}{5} \\ &= 2^3 \times 5^{-1}. \end{aligned}$$

13 Simplification

Énoncé
p. 40

Lycée Hoche, Versailles

On applique les règles de calculs avec les fractions :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(0,2)^3 \times 10^4}{2^3 \times 81} \div \frac{-8^3 \times 15}{(-12)^5} \\ &= \left(\frac{2}{10}\right)^3 \times \frac{5^4 \times 2^4}{2^3 \times 3^4} \times \frac{-12^5}{-8^3 \times 15} \\ &= \frac{2^3 \times 5^4 \times 2^4 \times 3^5 \times 2^{10}}{2^3 \times 5^3 \times 2^3 \times 3^4 \times 2^9 \times 3 \times 5} \\ &= 2^2 \text{ (après simplifications)} \\ &= 4. \end{aligned}$$

14 Calculs et simplifications

Énoncé
p. 40

Lycée Louis le Grand, Paris

1 On obtient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^3 \times 7^4}{3^2 \times 7^2 \times 2^3 \times 3^3} \\ &= \frac{7^2}{3^5}. \end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, mais on peut aussi écrire :

$$A = \frac{49}{243}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

2 Il faut réduire petit à petit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} B &= \frac{3 - \frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{4}{15} - \frac{1}{10}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} \div \frac{1 + \frac{2}{5}}{2 - \frac{1}{5}} \\ &= \frac{\frac{12}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{8}{4} + \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{8}{30} - \frac{3}{30}}{\frac{4}{6} - \frac{1}{6}} \div \frac{\frac{5}{5} + \frac{2}{5}}{\frac{10}{5} - \frac{1}{5}} \\ &= \frac{\frac{11}{4}}{\frac{9}{4}} \times \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{6}} \div \frac{\frac{7}{5}}{\frac{9}{5}} \\ &= \frac{11}{9} \times \frac{1}{3} \div \frac{7}{9} = \frac{11}{9} \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{7} \\ &= \frac{11 \times 9}{9 \times 3 \times 7} \\ &= \frac{11}{21}. \end{aligned}$$

15 Calculs et simplifications

Énoncé
p. 40

Lycée Blaise Pascal, Orsay

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{6}} \\ &= \frac{\frac{15}{30} - \frac{10}{30} + \frac{12}{30} + \frac{5}{30}}{\frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{12}{30} - \frac{5}{30}} \\ &= \frac{\frac{22}{30}}{\frac{30}{30}} \\ &= \frac{22}{30} \\ &= \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

$$C = 2^{23} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{24} = \frac{2^{23}}{2^{24}} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(5^2 \times 10^{-5})^3}{(5 \times 10^{-3})^5} \times \left(\frac{10^2}{5}\right)^2 \\ &= \frac{5^6 \times 10^{-15}}{5^5 \times 10^{-15}} \times \frac{10^4}{5^2} \\ &= 5 \times \frac{(5 \times 2)^4}{5^2} \\ &= \frac{5 \times 5^4 \times 2^4}{5^2} \\ &= 5^3 \times 2^4. \end{aligned}$$

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

$$D = \left(\frac{2}{3}\right)^{108} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{107} = \left(\frac{2}{3}\right)^{108} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{107} = \frac{2}{3}.$$

$$a = 0,000\,073\,654 = 7,365\,4 \times 10^{-5}.$$

$$b = 9\,325\,000 = 9,325 \times 10^6.$$

$$c = 0,023 \times 10^{-5} = 2,3 \times 10^{-2} \times 10^{-5} = 2,3 \cdot 10^{-7}.$$

$$d = 19,402 \times 10^2 = 1,940\,2 \times 10^3.$$

16 Produit de puissances

Énoncé
p. 41

Lycée Hoche, Versailles

On simplifie les puissances, puis les fractions :

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{a^3}{c}\right)^2 \div \frac{[(a^7)^5 b^{-2} (c^{-3})^{-2}]^{-1}}{[ab^2(c^{-2})^{-3}]^2} \\ &= \frac{a^6}{c^2} \div \frac{(a^{35} b^{-2} c^6)^{-1}}{(ab^2 c^6)^2} \\ &= \frac{a^6}{c^2} \div \frac{a^{-35} b^2 c^{-6}}{a^2 b^4 c^{12}} \\ &= \frac{a^6}{c^2} \times \frac{a^{35} b^2 c^{-6}}{a^2 b^4 c^{12}} \\ &= a^{43} b^2 c^{16}. \end{aligned}$$

17 Calculs d'une somme avec fractions

Énoncé
p. 41

Lycée Louis le Grand, Paris

1 Il faut réduire les deux fractions au même dénominateur :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{n}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n+3-n}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

2 Du résultat précédent, il vient :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right).$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Si on applique cette formule à $n = 10$, on obtient :

$$\frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{11 \times 12 \times 13} \right).$$

En l'appliquant à $n = 11$:

$$\frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11 \times 12 \times 13} - \frac{1}{12 \times 13 \times 14} \right).$$

Si on additionne ces deux formules membre à membre, on voit que les termes

$$\frac{1}{11 \times 12 \times 13}$$

vont s'annuler. Appliquons de nouveau la formule à $n = 12$:

$$\frac{1}{12 \times 13 \times 14 \times 15} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{12 \times 13 \times 14} - \frac{1}{13 \times 14 \times 15} \right).$$

Nous constatons que si nous ajoutons cette expression aux deux autres, le terme $\frac{1}{12 \times 13 \times 14}$ disparaît.

Finalement, si nous répétons l'opération jusqu'à $n = 19$ et que nous simplifions, il ne restera que le tout premier terme $\frac{1}{10 \times 11 \times 12}$ ainsi que le tout dernier, qui est le $\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ avec $n = 19$.

Il vient (attention aux signes et au facteur $\frac{1}{3}$!) :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{20 \times 21 \times 22} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5 \times 2 \times 11 \times 4 \times 3} - \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 7 \times 2 \times 11} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{7-1}{20 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{1}{3} \frac{6}{20 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{2}{20 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{1}{10 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{1}{4\,620}. \end{aligned}$$

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

18 PGCD

Énoncé
p. 41

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

- 1 Les décompositions en produit de facteurs premiers de 1 040 et 640 sont :

- $1\,040 = 2^4 \times 5 \times 13$.
- $640 = 2^7 \times 5$.

- 2 Les diviseurs premiers communs à 1 040 et 640 sont 2 et 5.

La plus grande puissance qui intervient dans les deux décompositions en produit de facteurs premiers sont 2^4 et 5^1 .

Ainsi, le PGCD de 1 040 et 640 est $2^4 \times 5 = 80$.

- 3 La parcelle rectangulaire a pour dimensions, en centimètres, 1 040 et 640.

- (a) La distance (nombre entier) entre deux plants est nécessairement un diviseur des deux dimensions, et doit être la plus grande possible ; c'est donc le PGCD de 1 040 et 640.

La distance maximale entre deux plants est donc égale à 80 cm.

- (b) $1\,040 \div 80 = 13$ et $640 \div 80 = 8$.

Ainsi, sur la longueur, il doit y avoir 13 intervalles entre deux plants et sur la largeur, 8 intervalles.

N'oublions pas qu'il y a un plant à chaque sommet du rectangle. Par conséquent,

- sur les longueurs, il y a 14 plants ;
- sur les largeurs, il y a 9 plants auxquels on enlève le premier et le dernier (qui sont déjà comptés pour les longueurs), soit 7 plants.

Il y a donc en tout : $2 \times 14 + 2 \times 7 = 42$ plants.

19 Somme et multiples

Énoncé
p. 42

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

- 1 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Les nombres $n - 1$, n et $n + 1$ sont consécutifs (ils se suivent). Leur somme est :

$$S = (n - 1) + n + (n + 1) = 3n.$$

S est bien un multiple de 3.

- 2 Soit $n \in \mathbb{Z}$. $(n - 1)$, n et $(n + 1)$ sont trois entiers consécutifs, donc $3(n - 1)$, $3n$ et $3(n + 1)$ sont trois multiples de 3 consécutifs. Leur somme est :

$$S = 3(n - 1) + 3n + 3(n + 1) = 3n - 3 + 3n + 3n + 3 = 9n.$$

S est bien un multiple de 9.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 $\forall n \in \mathbb{Z}, n-1, n, n+1$ et $n+2$ sont quatre entiers consécutifs. Leur somme est $S = 4n + 2 = 2(2n + 1)$. On ne peut pas factoriser encore par 2, donc elle n'est pas un multiple de 4 (juste un multiple de 2).

20 Implication sur la divisibilité

→ Énoncé
p. 42

Lycée Loquidy, Nantes

Si a divise $n + 4$ alors a divise aussi $k(n + 4)$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Si a divise $2n - 3$ alors a divise aussi $k'(2n - 3)$, où $k' \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, a divise la somme, donc a divise $k(n + 4) + k'(2n - 3)$, soit, après développement, $(k + 2k')n + 4k - 3k'$.

On cherche alors à savoir s'il existe des valeurs de k et k' telles que, pour tout entier n ,

$$(k + 2k')n + 4k - 3k' = 11.$$

Il faut donc que $k + 2k' = 0$, soit $k = -2k'$.

Il faut aussi que $4k - 3k' = 11$, soit $4(-2k') - 3k' = 11$, d'où $-11k' = 11$. On en déduit alors que $k' = -1$ et donc que $k = 2$.

Il existe donc bien deux entiers k et k' tels que $k(n + 4) + k'(2n - 3) = 11$.

Or, a divise $k(n + 4) + k'(2n - 3)$, donc a divise 11.

21 Ensemble d'entiers et divisibilité

→ Énoncé
p. 42

Lycée Louis Vincent, Metz

Partons du fait que $(n - 4)$ divise $A = (3n + 24)$.

On sait de plus que $(n - 4)$ divise aussi $B = 3(n - 4) = 3n - 12$ (on a multiplié par 3 car le coefficient de n dans A est 3).

Ainsi, $(n - 4)$ divise $A - B = 36$. Les diviseurs de 36 sont :

$$-1; -2; -3; -4; -6; -9; -12; -18; -36; 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36.$$

En ajoutant 4 à ces valeurs, on trouve l'ensemble des valeurs de n possibles :

$$\mathcal{D}(36) = \{3; 2; 1; 0; -2; -5; -8; -14; -32; 5; 6; 7; 8; 10; 13; 16; 22; 40\}.$$

On vient de montrer que : « $(n - 4)$ divise $(3n + 24)$ donc $n \in \mathcal{D}(36)$. »

De plus, si $n \in \mathcal{D}(36)$, on peut calculer $(n - 4)$ et $(3n + 24)$ et voir que $(n - 4)$ divise bien $(3n + 24)$. La réciproque est donc vraie.

Ainsi, $\mathcal{D}(36)$ est bien l'ensemble de toutes les valeurs de n telles que $(n - 4)$ divise bien $(3n + 24)$.

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

22 Parité

Énoncé
p. 42

Lycée Pierre Caraminot, Egletons

« Consécutifs » signifie que les deux entiers s'écrivent, par exemple, n et $n+1$.
On a $n(n+1) = n^2 + n$.

On procède par *disjonction de cas* sur n (on regarde tous les cas possibles) :

- Si n est pair, $n(n+1)$ est multiple de n donc de 2.
- Si n est impair, $(n+1)$ est pair. $n(n+1)$ est multiple de $(n+1)$ donc de 2.

Dans tous les cas, $n(n+1)$ est bien un multiple de 2.

23 Nombres premiers

Énoncé
p. 42

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

- 1 Soit k un entier compris entre 1 et n . p_k divise le produit $p_1 \times \dots \times p_n$, donc si p_k divisait a , alors p_k serait diviseur de $a - p_1 \times \dots \times p_n = 1$.
Or 1 n'a pas de diviseur premier, à part lui-même...

Conclusion : aucun des p_k n'est diviseur de a .

- 2 Euclide raisonne par l'absurde, c'est-à-dire qu'il suppose que son résultat est faux, en espérant aboutir à une contradiction. Il suppose que l'ensemble des nombres premiers est fini, et qu'on peut énumérer tous les nombres premiers : $p_1, p_2, \dots, p_n$.

D'après la première question, a n'admet aucun diviseur premier.

Or on voit que $a \geq 2$, donc a admet nécessairement un diviseur premier. Nous avons une contradiction. L'ensemble des nombres premiers est donc infini.

POUR ALLER PLUS LOIN

Pourquoi un entier $a \geq 2$ admet-il toujours au moins un diviseur premier ?

La démonstration est difficile. Nous empruntons une méthode appelée par Fermat : la *descente infinie* (tout un programme !)

Supposons, par l'absurde, que a n'ait pas de diviseur premier. Alors a n'est pas premier (car a divise lui-même) donc on peut décomposer $a = bc$ avec $2 \leq b < a$, $2 \leq c < a$. Mais alors, ni b ni c ne peuvent avoir de diviseur premier (car il diviserait a).

On a donc la propriété suivante : Si $a \geq 2$ n'a pas de diviseur premier, on peut trouver un entier $a > b \geq 2$ qui n'a pas de diviseur premier. Or, si on applique la propriété à b , on trouve ainsi une infinité d'entiers naturels, chacun strictement plus petit que le précédent, ce qui n'est pas possible car il n'y a que a entiers naturels strictement inférieurs à a .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

24 Avec racines carrées

Énoncé
p. 42

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Pour montrer que $(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2$ est un entier naturel, nous allons développer les deux carrés à l'aide des identités remarquables :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (voir chapitre suivant)
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (voir chapitre suivant)

Développons :

- $$\begin{aligned}(1 - \sqrt{3})^2 &= 1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{3} + 3 \\ &= 4 - 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3})^2 &= 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{3} + 3 \\ &= 4 + 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2 = 4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} = 8.$$

$(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2$ est donc bien en entier naturel.

25 Ensembles inclus

Énoncé
p. 43

Lycée Victor Louis, Talence

Transformons l'écriture de n :

$$\begin{aligned}n &= \frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{9 - 5\sqrt{3}}{10} \\ &= \frac{10 + (9 - 5\sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{10(\sqrt{3} + 1)} \quad (\text{en réduisant au même dénominateur}) \\ &= \frac{10 + 9\sqrt{3} + 9 - 15 - 5\sqrt{3}}{10(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{4 + 4\sqrt{3}}{10(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{4(1 + \sqrt{3})}{10(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{2}{5} = 0,4.\end{aligned}$$

Donc n est décimal.

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

26 Simplification

Énoncé
p. 43

Lycée Henri IV, Paris

$$\begin{aligned} 1 \quad C &= \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{12} \\ &= 3\sqrt{3} - 2 \times 5\sqrt{3} + 3 \times 2\sqrt{3} \\ &= (3 - 10 + 6)\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad D &= \sqrt{\frac{6,3}{2,8}} \times \sqrt{\frac{18}{0,72}} \\ &= \sqrt{\frac{63}{28}} \times \sqrt{\frac{18 \times 100}{72}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4}} \times \sqrt{\frac{100}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4}} \times \sqrt{25} \\ &= \frac{3}{2} \times 5 \\ &= \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

27 Simplification

Énoncé
p. 43

Lycée Charlemagne, Paris

$$\begin{aligned} 1 \quad &\text{On utilise la quantité} \\ &\text{conjuguée } \sqrt{5} - 2 \\ &\text{pour simplifier} \\ &\text{le dénominateur :} \\ A &= \frac{3}{\sqrt{5} + 2} \\ &= \frac{3(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \\ &= \frac{3(\sqrt{5} - 2)}{5 - 4} \\ &= 3\sqrt{5} - 6 \\ &= \sqrt{45} - 6. \end{aligned}$$

2 De même que précédemment :

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} - 1} \\ &= \frac{(2\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} \\ &= \frac{10 + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3}{5 - 1} \\ &= \frac{13 + 5\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{13}{4} + \sqrt{\frac{125}{16}}. \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

28 Calcul avec fractions et radicaux

Énoncé
p. 43

Lycée Louis-le-Grand, Paris

Il faut commencer par se « débarrasser » du radical au dénominateur.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 8\sqrt{2} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + 8\sqrt{2} \\ &= \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1} + 8\sqrt{2} \\ &= 3-2\sqrt{2}+8\sqrt{2} \\ &= 3+6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

N'essayez pas d'aller plus loin, et *surtout* ne donnez pas de résultat approximatif calculé à la machine !

29 Avec une identité remarquable

Énoncé
p. 43

Lycée André Malraux, Biarritz

- 1 Cette question peut être traitée sans faire appel aux identités remarquables (chapitre suivant), mais nous allons les utiliser pour plus d'efficacité.

En effet, il s'agit ici d'un produit remarquable de la forme :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Ainsi,

$$(3-\sqrt{11})^2 = 9 - 6\sqrt{11} + 11 = 20 - 6\sqrt{11}.$$

- 2 $3^2 = 9$ et $(\sqrt{11})^2 = 11$, donc :

$$3 < \sqrt{11}.$$

On en déduit :

$$3 - \sqrt{11} < 0.$$

- 3 Comme :

$$(3-\sqrt{11})^2 = 20 - 6\sqrt{11},$$

on sait que :

$$\sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = (3 - \sqrt{11})$$

ou

$$\sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = -(3 - \sqrt{11}).$$

Comme $3 - \sqrt{11} < 0$, la racine carrée de $(20 - 6\sqrt{11})$ (qui doit être positive) est donc : $-(3 - \sqrt{11}) = \sqrt{11} - 3$.

NOMBRES ET CALCULS • CHAP. 2

30 Radicaux

Énoncé
p. 44

Lycée Hoche, Versailles

$$\begin{aligned} 1 \bullet I &= \sqrt{50} - 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{18}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{25 \times 2} - 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{9 \times 2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= (5 - 3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2})\sqrt{2} \\ &= \frac{9}{4}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet J &= 7\sqrt{\frac{3}{7}} \times \sqrt{\frac{30}{49}} \\ &= 7\sqrt{\frac{3}{7}} \times \frac{\sqrt{3 \times 10}}{7} \\ &= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{10}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{70}}{7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet K &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} \times (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + 3 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{6 \times 3} + \sqrt{6 \times 2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3 - 2} \\ &= \sqrt{2 \times 3 \times 3} + \sqrt{3 \times 2 \times 2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet L &= \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \times \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \right) \times \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right) + \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 2 \times \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} + 3 + 2\sqrt{2} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 2 \times \sqrt{9 - 8} + 3 + 2\sqrt{2} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 2 + 3 + 2\sqrt{2} \\ &= 8. \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 On veut calculer $Y = \sqrt{17 - 4\sqrt{13}}$.

$$(2 - \sqrt{13})^2 = 4 - 4\sqrt{13} + (\sqrt{13})^2 = 4 - 4\sqrt{13} + 13 = 17 - 4\sqrt{13}.$$

ATTENTION

Il serait tentant de répondre que la racine de $17 - 4\sqrt{13}$ est $2 - \sqrt{13}$.
Mais attention ! 13 est supérieur à 4, donc $\sqrt{13}$ est supérieur à 2.
 $2 - \sqrt{13}$ est donc négatif !

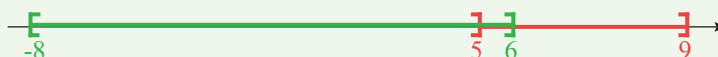
Il faut répondre : $Y = \sqrt{13} - 2$.

31 Union et intersection

Énoncé
p. 44

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Afin de trouver l'union et l'intersection des intervalles $I =]5; 9]$ et $J = [-8; 6]$, nous pouvons les représenter graphiquement sur la droite des réels :



Les deux intervalles se chevauchent ; par conséquent, leur union est un intervalle qui débute à la plus petite valeur et finit à la plus grande :

$$I \cup J = [-8; 9]$$

et leur intersection est l'intervalle formé par leurs parties communes (où ils se chevauchent) :

$$I \cap J =]5; 6].$$

32 Union et intersection

Énoncé
p. 44

Lycée Cité internationale, Paris

1 $I =]-3; 7]$ et $J = [-1; +\infty[$

Donc $I \cap J = [-1; 7]$ et $I \cup J =]-3; +\infty[$.

2 $I =]-\infty; 4[$ et $J = [4; 10]$

Donc $I \cap J = \emptyset$ et $I \cup J =]-\infty; 10]$.

3 $I = [-10; 2]$ et $J = [-3; 7]$

Donc $I \cap J = [-3; 2]$ et $I \cup J = [-10; 7]$.

4 $I =]-\infty; 3]$ et $J = [-6; +\infty[$

Donc $I \cap J = [-6; 3]$ et $I \cup J = \mathbb{R}$.

5 $I =]-4; 2[$ et $J =]2; 5]$

Donc $I \cap J = \emptyset$ et $I \cup J =]-4; 2[\cup]2; 5]$.

Chapitre 3

Calcul littéral, équations et inéquations

Plan du chapitre

1. Développement et factorisation
2. Résoudre une équation
3. Résoudre une inéquation
4. Équations et inéquations avec valeur absolue

1 Développement et factorisation

Exercice type 1

Lycée Alain Fournier, Bourges

Développer et factoriser :

$$A = 18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2.$$

Voir corrigé page 64

1.1 Développement

Développer, c'est transformer un produit en une somme (ou une différence).

Dans les énoncés ci-dessous, le membre de gauche contient une expression factorisée, et le membre de droite l'expression équivalente développée.

Propriété 1 : distributivité

Pour tous nombres a , b , c et d , on a :

- $a(b + c) = ab + ac$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Propriété 2 : identités remarquables

Pour tous nombres a et b , on a :

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned}B &= (x - 2)^2 - (x - 3)(2x + 5) \\ &= x^2 - 4x + 4 - (2x^2 + 5x - 6x - 15) \\ &= x^2 - 4x + 4 - 2x^2 - 5x + 6x + 15.\end{aligned}$$

Après avoir développé, on effectue toutes les additions possibles : on *réduit* l'expression :

$$B = -x^2 - 3x + 19.$$

En général, les énoncés portent la mention « développer et réduire », mais il est conseillé dans tous les cas de réduire. On peut effectuer des réductions partielles au cours du calcul, *dans la mesure où l'on respecte les règles de priorité*.

Exemple :

$$\begin{aligned}B &= x^2 - 4x + 4 - (2x^2 + 5x - 6x - 15) \\ &= x^2 - 4x + 4 - (2x^2 - x - 15) \\ &= x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + x + 15 \\ &= -x^2 - 3x + 19.\end{aligned}$$

1.2 Factorisation

Factoriser, c'est effectuer le procédé inverse de développer : on transforme une somme en un produit.

1.2.1 - Avec un facteur commun

Dans un premier temps, on essaie de repérer un facteur commun.

Exemple : dans l'expression $(x + 2)(x - 5) - 4(x + 2)$, $(x + 2)$ est un facteur commun à $(x - 5)$ et à (-4) . On choisit :

$$k = (x + 2), \quad a = (x - 5), \quad b = -4$$

pour appliquer la propriété :

$$ka + kb = k(a + b).$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

Cela donne :

$$(x + 2)(x - 5) - 4(x + 2) = (x + 2)[(x - 5) - 4].$$

L'expression du membre de droite est factorisée.

En général, même quand ce n'est pas demandé, on préfère développer et réduire le second facteur. On obtient :

$$(x + 2)(x - 5) - 4(x + 2) = (x + 2)(x - 9).$$

Il arrive parfois qu'un facteur commun soit « caché » parce qu'il est multiplié par une constante, comme dans l'exemple suivant.

Exemple : soit l'expression $(x + 2)(x - 5) - 4x - 8$.

On a le facteur commun $(x + 2)$ qui n'est pas apparent.

En effet :

$$-4x - 8 = -4(x + 2).$$

Et on retrouve l'expression de l'exemple précédent.

1.2.2 - Avec une identité remarquable

Si aucun facteur commun n'est visible, on peut essayer d'utiliser une identité remarquable.

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Remarquez que dans ces égalités, le membre de gauche est une somme, et le membre de droite un produit (ne perdez pas de vue qu'un carré est un produit). Ce sont donc, écrites sous cette forme, des factorisations.

Exemple : factorisons l'expression $B = x^2 - 16 + (x - 3)(x - 4)$.

Il n'y a pas de facteur commun évident. En revanche, la première partie de l'expression fait intervenir l'identité remarquable

$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4).$$

On peut donc terminer la factorisation :

$$\begin{aligned} B &= (x + 4)(x - 4) + (x - 3)(x - 4) \\ &= (x - 4)[(x + 4) + (x - 3)] \\ &= (x - 4)(x + 4 + x - 3) \\ &= (x - 4)(2x + 1). \end{aligned}$$

1.2.3 - Développer pour factoriser

Si aucune des méthodes précédentes n'aboutit, on peut éventuellement *développer* l'expression, dans l'espoir de faire apparaître quelque chose d'intéressant.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Exemple : $C = 2x^2 - 6x + 29 + 2(x + 2)(x - 5)$.

Il n'y a pas de facteur commun évident, et $2x^2 - 6x + 29$ n'est pas le développement d'un produit remarquable. On développe :

$$\begin{aligned} C &= 2x^2 - 6x + 29 + 2(x^2 - 5x + 2x - 10) \\ &= 2x^2 - 6x + 29 + 2x^2 - 10x + 4x - 20 \\ &= 4x^2 - 12x + 9 \\ &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= (2x - 3)^2. \end{aligned}$$

Remarque : ce genre de situations est extrêmement rare.

➡ Solution de l'exercice type 1

Lycée Alain Fournier, Bourges

- Développons A :

$$\begin{aligned} A &= 18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2 \\ &= 18x^2 - 24x + 8 - (6x^2 - 4x + 6x - 4) - 3x + 2 \\ &= 18x^2 - 6x^2 - 24x + 4x - 6x - 3x + 8 + 4 + 2 \\ &= 12x^2 - 29x + 14. \end{aligned}$$

- Factorisons A :

$$\begin{aligned} A &= 18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2 \\ &= 2(9x^2 - 12x + 4) - 2(x + 1)(3x - 2) - (3x - 2) \\ &= 2(3x - 2)^2 - 2(x + 1)(3x - 2) - (3x - 2) \\ &= (3x - 2)[2(3x - 2) - 2(x + 1) - 1] \\ &= (3x - 2)(6x - 4 - 2x - 2 - 1) \\ &= (3x - 2)(4x - 7). \end{aligned}$$

Voir énoncé page 61

2 Résoudre une équation

Exercice type 2

Lycée Alain Fournier, Bourges

Résoudre l'équation :

$$A = 18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2 = 0.$$

Voir corrigé page 66

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

2.1 Qu'est-ce qu'une équation ?

Définition 1

On appelle *équation à une inconnue* toute égalité entre deux expressions littérales où l'on cherche la valeur d'une lettre. Cette lettre est appelée *inconnue* de l'équation.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue pour que l'égalité soit vraie.

Exemple : l'égalité $3x + 7 = 8x - 3$ est une équation d'inconnue x si on cherche la valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie.

2.2 Comment résoudre une équation ?

2.2.1 - Équations du premier degré

Soit une équation de la forme $A = B$, où A et B sont deux expressions développées, d'inconnue x .

C'est une équation du premier degré si x est uniquement élevé à l'exposant 1.

Exemple : l'équation $3x + 7 = 8x - 3$ est du premier degré.

On résout ce type d'équations en faisant en sorte qu'il n'y ait que des x d'un côté et que des nombres de l'autre, comme vous l'avez vu au collège.

$$\begin{aligned} \text{Exemple : } 3x + 7 = 8x - 3 &\iff 3x + 7 - 8x - 7 = 8x - 3 - 8x - 7 \\ &\iff -5x = -10 \\ &\iff x = \frac{-10}{-5} = 2. \end{aligned}$$

2.2.2 - Équations de degré strictement supérieur à 1

Soit une équation de la forme $A = B$, où A et B sont deux expressions développées, d'inconnue x .

Si x est élevé à un exposant strictement supérieur à 1, pour résoudre l'équation, on se ramène à une équation produit nul et on tente de factoriser l'expression littérale. Ainsi, on peut appliquer le théorème du produit nul :

Théorème 1 : du produit nul

Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Exemple : on souhaite résoudre l'équation $(3x + 1)(2x + 1) = (3x + 1)(8x - 7)$.

$$\begin{aligned} (3x + 1)(2x + 1) &= (3x + 1)(8x - 7) \\ \iff (3x + 1)(2x + 1) - (3x + 1)(8x - 7) &= 0 \\ \iff (3x + 1)[(2x + 1) - (8x - 7)] &= 0 \\ \iff (3x + 1)(-6x + 8) &= 0 \\ \iff 3x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -6x + 8 &= 0 \\ \iff x = -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

➡ Solution de l'exercice type 2

Lycée Alain Fournier, Bourges

Nous avons vu dans l'exercice précédent de ce cours que :

$$A = (3x - 2)(4x - 7).$$

On utilise alors le théorème du produit nul pour résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} A = 0 &\iff (3x - 2)(4x - 7) = 0 \\ &\iff 3x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 4x - 7 = 0 \\ &\iff 3x = 2 \quad \text{ou} \quad 4x = 7 \\ &\iff x = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $A = 0$ est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{7}{4} \right\}.$$

Voir énoncé page 64

3 Résoudre une inéquation

Exercice type 3

Lycée Alain Fournier, Bourges

Résoudre l'inéquation :

$$18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2 \leq 0.$$

Voir corrigé page 70

3.1 Opérations permises sur les inégalités

Dans ce paragraphe, a, b, c, d et k représentent des nombres réels.

- On peut ajouter un même réel à une inégalité.

$$a \leq b \iff a + k \leq b + k.$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

- On peut ajouter deux inégalités de même sens membre à membre.

$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \implies a + c \leq b + d$$

ATTENTION

La réciproque n'est pas toujours vraie, d'où le symbole d'implication « $\implies$ ». Ce n'est pas parce que $a + c \leq b + d$ que l'on a nécessairement $a \leq b$ et $c \leq d$.

- On peut multiplier les deux membres de l'inégalité par un réel.
Mais il faut faire attention au signe du réel par lequel on multiplie :

$$\begin{cases} k > 0 \\ a \leq b \end{cases} \iff k \times a \leq k \times b \quad \text{et} \quad \begin{cases} k < 0 \\ a \leq b \end{cases} \iff k \times a \geq k \times b.$$

Si ce réel est positif, on garde le sens de l'inégalité ;
s'il est négatif, on change le sens de l'inégalité.

- On peut élever les deux membres de l'inégalité au carré ou prendre leur racine carrée si les deux membres sont positifs.

$$\begin{cases} a > 0, b > 0 \\ a \leq b \end{cases} \implies a^2 \leq b^2.$$

- On peut inverser les deux membres en changeant le sens de l'inégalité si les deux membres sont de même signe.

$$\begin{cases} a \text{ et } b \text{ de même signe et non nuls} \\ a \leq b \end{cases} \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}, a \text{ et } b \text{ de même signe.}$$

Exemples

- Si $x + 7 \geq 5$, on peut ajouter -7 aux deux membres et obtenir $x \geq -2$.
- Si $7x \leq -3$, on peut diviser par 7 les deux membres pour obtenir $x \leq -\frac{3}{7}$. Le sens ne change pas car 7 est positif.
- Si $x > 5$, on peut écrire $x^2 > 25$ et $\sqrt{x} > \sqrt{5}$.
Attention : si $-2 < x < 5$, on ne peut pas écrire $(-2)^2 < x^2 < 5^2$ car cela serait faux pour $x = 0$ ou $x = 1$ par exemple.
Dans ce cas, le meilleur encadrement possible est : $0 \leq x^2 < 5^2$ (voir chapitre 6 page 191, « La fonction carré »).
- Si $0 < x \leq 5$, alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{5}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

ATTENTION

Si $x \geq 5$, on ne peut pas en déduire que $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$, mais que : $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$, car l'inverse d'un nombre positif est forcément positif.
De même, si $x < -2$, alors : $0 > \frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$, et non $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$.

3.2 Tableaux de signes

- Pour résoudre une inéquation produit, on détermine le signe de chaque facteur que l'on résume dans un *tableau de signes*. La règle des signes permet de conclure.

Exemple : résoudre l'inéquation $(x - 2)(6 - 2x)(x + 4) \geq 0$.

$$\begin{aligned} x - 2 \geq 0 &\iff x \geq 2 \\ 6 - 2x \geq 0 &\iff x \leq 3 \\ x + 4 \geq 0 &\iff x \geq -4 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-4	2	3	$+\infty$	
$x - 2$		$-$	$-$	0	$+$	$+$
$6 - 2x$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x + 4$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
Produit		$+$	0	$-$	0	$-$

D'où $\mathcal{S} =] -\infty ; -4] \cup [2 ; 3]$

- La méthode est la même pour une inéquation quotient mais il faut être vigilant avec les valeurs interdites qui sont les nombres qui annulent le dénominateur.

Exemple : résoudre l'inéquation $x \geq \frac{9}{x}$.

Valeur interdite : $x = 0$.

Résolution :

$$\begin{aligned} x \geq \frac{9}{x} &\iff \frac{x^2}{x} - \frac{9}{x} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x - 3)(x + 3)}{x} \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes page ci-contre.

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$x - 3$	—	—	—	0	+
$x + 3$	—	0	+	+	+
x	—	—	0	+	+
Quotient	—	0	+	—	0

D'où $S = [-3 ; 0[\cup [3 ; +\infty[$

Attention à exclusion de l'ensemble des solutions les valeurs interdites.

3.3 Utiliser le signe de la différence

Pour comparer deux nombres x et y , on peut étudier le signe de leur différence $x - y$:

$$\begin{cases} \text{Si } x - y > 0, \text{ alors } x > y \\ \text{Si } x - y < 0, \text{ alors } x < y \end{cases}$$

Exemple : on veut résoudre l'inéquation : $\frac{1}{x} < 2$. Il faut pour cela :

- 1 Écrire la différence : $\frac{1}{x} - 2$;
- 2 Réduire au même dénominateur : $\frac{1 - 2x}{x}$;
- 3 Utiliser un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x	—	0	+	+
$1 - 2x$	+	+	0	—
$\frac{1 - 2x}{x}$	—	+	0	—

Il suffit de lire dans le tableau où sont situés les réels tels que $\frac{1 - 2x}{x} < 0$:

$$S =]-\infty, 0[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

3.4 Résolution graphique d'une inéquation

Pour résoudre *graphiquement* une inéquation du type $f(x) \leq g(x)$, on trace la courbe des deux fonctions (soit « à la main », soit à l'aide de la calculatrice). Il suffit de lire sur l'axe des abscisses les valeurs de x pour lesquelles la courbe de f est en dessous de celle de g . Habituellement, l'ensemble de ces valeurs est un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

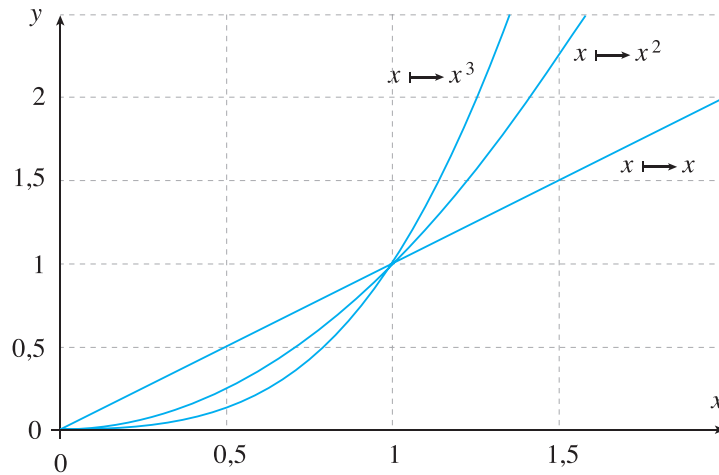
COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Par exemple, la figure ci-dessous montre que :

- Si $0 < x < 1$, alors $x^3 < x^2 < x$.
- Si $x > 1$, alors $x < x^2 < x^3$.



➔ Solution de l'exercice type 3

Lycée Alain Fournier, Bourges

Nous avons vu dans le premier exercice type de ce cours que :

$$18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2 = (3x - 2)(4x - 7).$$

De plus,

$$3x - 2 \geq 0 \iff x \geq \frac{2}{3}$$

$$4x - 7 \geq 0 \iff x \geq \frac{7}{4}$$

On peut alors construire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$
$3x - 2$	$-$	0	$+$	$+$
$4x - 7$	$-$	$-$	0	$+$
$(3x - 2)(4x - 7)$	$+$	0	$-$	0

On peut alors conclure que l'ensemble solution de l'inéquation $18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2 \leq 0$ est :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{4} \right].$$

Voir énoncé page 66

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

4 Équations et inéquations avec valeur absolue

Exercice type 4

Lycée Loquidy, Nantes

Traduire avec des valeurs absolues les affirmations suivantes (complétez les pointillés).

- 1 La distance de x à 0,5 est inférieure ou égale à 2 $\iff |x \dots| \dots$
- 2 $x \in [-9; 1]$ $\iff |x \dots| \dots$
- 3 $|x + 8| > \pi$

Voir corrigé page 72

4.1 Définition d'une valeur absolue d'un nombre

Définition 2

Soit x un nombre réel. On définit la *valeur absolue* du nombre x comme étant la distance qui le sépare du nombre 0 sur l'axe des réels, et on la note $|x|$. Autrement dit,

$$\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples

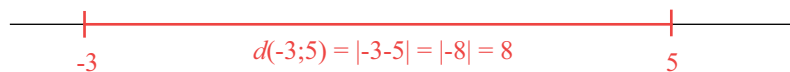
- $|5| = 5$
- $|-3| = 3$

Définition 3 : distance entre deux nombres

Pour tous nombres réels a et b , on définit la *distance* entre a et b par le nombre :

$$d(a; b) = |b - a| = |a - b|.$$

Exemple : la distance entre -3 et 5 est $d(-3; 5) = 8$.



4.2 Équations du type $|x - a| = r$

Propriété 3

Soit r un réel positif ou nul, et soit a un réel quelconque.

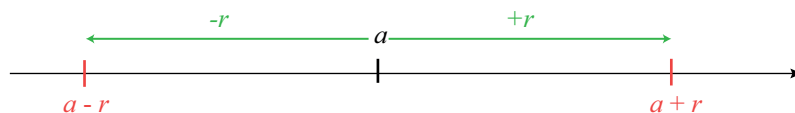
$$|x - a| = r \iff x = a - r \text{ ou } x = a + r.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

En effet, $|x - a|$ représente la distance entre x et a . Si cette distance est égale à r , alors $x = a - r$ ou $x = a + r$

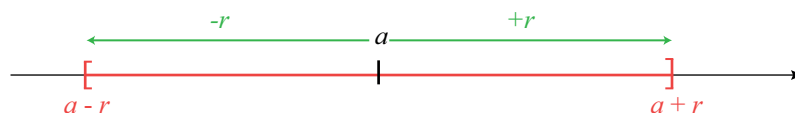


4.3 Inéquations

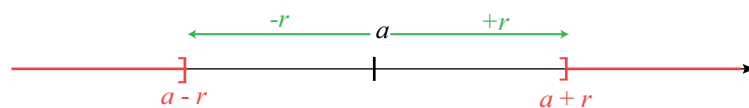
Propriété 4

Soit r un réel positif ou nul, et soit a un réel quelconque.

- $|x - a| \leq r \iff x \in [a - r; a + r]$.



- $|x - a| \geq r \iff x \in]-\infty; a - r] \cup [a + r; +\infty[$.



Remarque : l'orientation des crochets des intervalles dépend de l'inégalité (large ou stricte).

➔ Solution de l'exercice type 4

Lycée Loquidy, Nantes

1 La distance de x à $0,5$ est inférieure ou égale à $2 \iff |x - 0,5| \leq 2$.

2 $x \in [-9; 1] \iff |x + 4| \leq 5$.

Pour compléter ici, nous avons avant tout trouvé le milieu de l'intervalle $[-9; 1]$ en effectuant le calcul : $\frac{-9 + 1}{2} = -4$, puis nous avons calculé la distance entre -4 et 1 (par exemple) en effectuant l'opération : $1 - (-4) = 5$.

3 $|x + 8| > \pi \iff |x - (-8)| > \pi$
 $\iff x \in]-\infty; -8 - \pi[\cup]-8 + \pi; +\infty[$.

Voir énoncé page 71

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

1 V/F Étude graphique

4 min

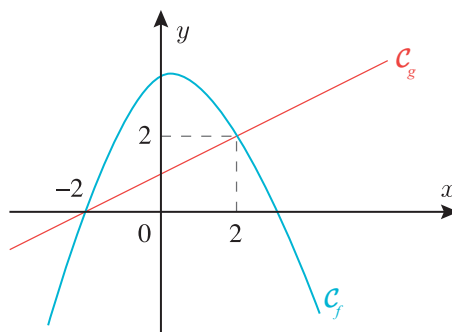
Corrigé
p. 86

On a représenté ci-dessous la fonction f et la fonction affine

$$g : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1.$$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a** L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est $[-2 ; 2]$.
- b** L'ensemble des solutions de $f(x) = g(x)$ est $\{-2 ; 2\}$.
- c** L'ensemble des solutions de $f(x) < g(x)$ est $] -2 ; 2[$.
- d** L'ensemble des solutions de $f(x) \geq g(x)$ est $[-2 ; 2]$.



2 V/F Factorisation

5 min

Corrigé
p. 86

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a** x peut être mis en facteur dans $3x^2 + 2x + 5$.
- b** Pour tout réel x , $(x + 2)^2 = x^2 + 2x + 4$.
- c** Pour tout réel x , $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.
- d** Pour tout réel x , $(2x - 3)(2x + 3) = 2x^2 - 9$.

3 QCM Équations : ensemble des solutions

5 min

Corrigé
p. 86

Dans quels cas l'ensemble des solutions est-il correct ?

- a** $3x - 7 = 0$ $S = \left\{ \frac{7}{3} \right\}$
- b** $3x - 7 = 0$ $S = \{2, 33\}$
- c** $(x - 5)(2x + 1) = 0$ $S = \left\{ -5 ; -\frac{1}{2} \right\}$
- d** $x^2 - 8 = 0$ $S = \{2\sqrt{2} ; -2\sqrt{2}\}$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

4 V/F Transformer des inégalités

5 min

Corrigé
p. 86

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a** Si $x < 0$ et $x \neq 0$, alors $\frac{1}{x} > 1$ **b** Si $x \geq 2$, alors $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$
c Si $x < -2$, alors $\frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$ **d** Si $x \geq 3$, alors $-2x \leq -6$

5 QCM Inéquations

6 min

Corrigé
p. 87

Dans quels cas les inéquations proposées ont-elles les mêmes solutions dans $\mathbb{R}$?

- a** $x(x - 3) < x(2x + 1)$ et $(x - 3) < (2x + 1)$
b $3 - x < 5$ et $x > 2$
c $x < 2$ et $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$
d $(x^2 + 2)(x - 1) > 0$ et $2(x - 1) > 0$
e $(x - 3)^2 \geq (2x + 1)^2$ et $x - 3 \geq 2x + 1$
f $\frac{x}{x - 2} \leq \frac{2x + 1}{x + 3}$ et $x(x + 3) \leq (x - 2)(2x + 1)$

Développements

6 Calcul littéral



5 min

Corrigé
p. 87

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Montrer que la somme du produit de trois entiers consécutifs $n - 1$, n et $n + 1$ et de l'entier n est le cube d'un entier.

7 Développements



10 min

Corrigé
p. 87

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Développer les expressions suivantes :

- 1** $A(x) = 2x(x - 2)(x + 2)$
2 $B(x) = (1 + 3x)^2 - 2(x + 1)(x - 5)$
3 $C(x) = (3x - \sqrt{3})^2$
4 $D(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \quad (x \neq 0)$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

8 Arithmétique et calcul littéral



10 min

Corrigé
p. 88

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

Soit n un entier naturel.

- 1 Développer $(n + 1)^2 - n^2$.
- 2 En déduire que tout entier impair est la différence de deux carrés d'entiers consécutifs.
- 3 Écrire 17 et 2 019 comme différence de deux carrés d'entiers consécutifs.

Factorisations

9 Factorisations



10 min

Corrigé
p. 88

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Factoriser au maximum :

- 1 $A(x) = (2x - 3)^2 - (4x + 1)(2x - 3)$
- 2 $B(x) = (x + 1)^2 - (2x + 3)^2$
- 3 $C(x) = (x - 1)(2 + x) + (x + 5)(1 - x)$
- 4 $D(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
- 5 $E(x) = xy - x - y + 1$
- 6 $F(x) = (5x + 3)^2 - 11$
- 7 $G(x) = (x - 1)^2 - 2(x^2 - 1)$

10 Développement ou factorisation ?



10 min

Corrigé
p. 89

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables x, y : nombres
Début :
  Lire x
  Affecter à y la valeur x - 2
  Affecter à y la valeur y2
  Affecter à y la valeur y - 4
  Afficher y
Fin
```

- 1 Lucien prétend que cet algorithme retourne la valeur de $(x - 2)^2 - 4$.
A-t-il raison ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- 2 Expliquer pourquoi l'algorithme suivant affiche le même résultat que le premier quand on saisit la même valeur de x :

```
Variables x : nombre
Début :
  Lire x
  Affecter à x la valeur x*(x - 4)
  Afficher x
Fin
```

11 Diverses factorisations



25 min

Corrigé
p. 89

Lycée Chateaubriand, Rennes

Factoriser chacune des expressions suivantes.

- 1 $f(x) = 3(x - 2)(x^2 + 1) - (6x^2 - 5)(x - 2)$.
- 2 $f(a) = 16a^4 - 9$.
- 3 $f(x) = x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) + (x + 2)(1 - x)$.
- 4 $f(x) = (6x - 3)^2 - (2x - 1)$.

Équations

12 Équations



20 min

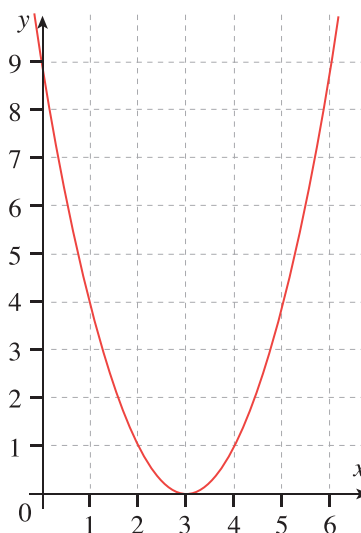
Corrigé
p. 90

Lycée Paul Lapie, Courbevoie

Soit f la fonction qui à tout nombre réel x fait correspondre $f(x)$ tel que $f(x) = (x - 3)^2$.

On donne sa courbe représentative ci-contre.

- 1 Lire sur le graphique les solutions des équations :
 - (a) $(x - 3)^2 = 4$.
 - (b) $(x - 3)^2 = 2$.
 - (c) $(x - 3)^2 = -1$.
- 2 Résoudre les mêmes équations en détaillant les calculs, nommer S l'ensemble des solutions.



CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

13 Équations



15 min

Corrigé
p. 91

Lycée Foch, Rodez

Soit l'expression $f(x) = 15x^2 + 11x - 12$.

- 1 Vérifier que $f(x) = (3x + 4)(5x - 3)$.
- 2 En choisissant la plus appropriée des deux formes de $f(x)$, résoudre chacune des équations suivantes où x est l'inconnue réelle :
 - (a) $f(x) = 0$.
 - (b) $f(x) = 15x^2$.
 - (c) $f(x) = -12$.
 - (d) $f(x) = 5x - 3$.
 - (e) $f(x) = 14x^2 + 11x + 4$.

14 Équations



15 min

Corrigé
p. 93

Lycée Blaise Pascal, Orsay

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- 1 $\frac{5x+3}{4} - \frac{x-9}{3} = \frac{x}{2} + 5$.
- 2 $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0$.
- 3 $\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x-4} = 2 - \frac{2}{x-4}$.

15 Bien choisir son taxi



20 min

Corrigé
p. 94

Lycée Victor Duruy, Paris



Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Deux chauffeurs de taxi pratiquent des tarifs différents :

- Tarif A : 5 € de prise en charge et 0,40 € par kilomètre parcouru.
- Tarif B : pas de frais de prise en charge mais 0,60 € du kilomètre.

- 1 (a) Un client veut parcourir 8 km. Quel taxi doit-il prendre pour payer le moins cher ?
(b) Même question pour un client désirant parcourir 30 km.
- 2 Exprimer $A(x)$, prix payé au taxi A et $B(x)$, prix payé au taxi B, en fonction du nombre x de kilomètres parcourus.
- 3 (a) Dans un repère orthonormal, représenter graphiquement les fonctions :
 $x \mapsto A(x)$ et $x \mapsto B(x)$ pour $0 \leq x \leq 40$. On note $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ leurs représentations respectives.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

(b) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection, et interpréter par une phrase.

4 En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

- (a) Pour quelles longueurs de trajets vaut-il mieux prendre le taxi A ?
(b) Un client a 12 € en poche. Quel taxi doit-il prendre pour aller le plus loin possible ? Quelle distance pourra-t-il ainsi parcourir ?

16 Équations



30 min

Corrigé
p. 95

Lycée Lambert, Mulhouse

Résoudre algébriquement :

1 $7(2x + 4) - 5(4x - 3) = \frac{2}{5} - \frac{3x - 5}{2}$.

2 $(3x - 2)(2x - 5) + 2(x - 5)(7 - 3x) = 0$.

3 $(5x + 3)(4x - 2) = 2(x - 9)$.

4 $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 9(4x - 1)^2$.

5 $(2 - x)(5x + 3) + (x - 2)(3 - x) - (2 - x) = 0$.

17 Équations



15 min

Corrigé
p. 97

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Résoudre les équations suivantes :

1 $(x - 1)(2x - 3)^2 = 4(x - 1)$

2 $x^2 + 4 = 0$

3 $\frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4} = 1$

4 $\frac{3}{x + 1} - \frac{2}{x - 2} = \frac{-6}{(x + 1)(x - 2)}$

Inéquations

18 Avec une identité remarquable



10 min

Corrigé
p. 99

Lycée Carnot, Dijon

Résoudre l'inéquation :

$$(2x + 5)^2 \leq (3x + 2)^2.$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

19 Avec les identités remarquables



15 min

Corrigé
p. 99

Lycée Saint-Jean, Limoges

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1 $(2x + 1)^2 - x^2 \geq 0$

2 $(3x + 2)^2 - 2(3x + 2)(x + 1) + (x + 1)^2 \leq 0$

20 Avec un facteur commun



15 min

Corrigé
p. 100

Lycée Descartes, Antony

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1 $x^3 - x^2 \geq 4x - 4$

3 $x^2 \geq 16x$

2 $\frac{x+2}{x^2-1} < 0$

21 Facteur commun, identité remarquable



15 min

Corrigé
p. 101

Lycée Montesquieu, Le Mans

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1 $(x + 6)(x - 3) - 2x + 6 \geq 0$

3 $25x^2 + 4 \geq 0$

2 $\frac{x+3}{1-x} \geq 2$

4 $25x^2 - 4 \geq 0$

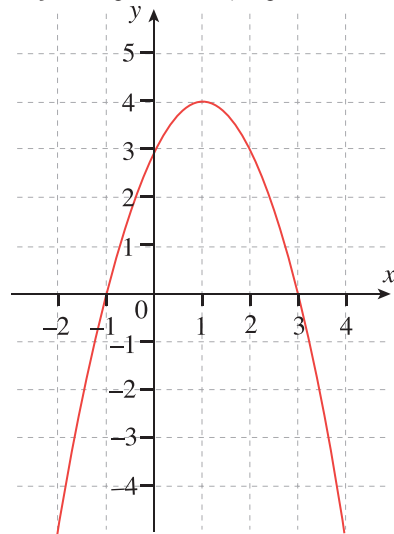
22 Résolution algébrique et graphique



15 min

Corrigé
p. 102

Lycée Auguste Renoir, Cagnes-sur-Mer



Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; I, J)$.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

1 Vérifier que :

$$f(x) = 4 - (x - 1)^2$$

puis factoriser $f(x)$.

2 En déduire la résolution de l'inéquation $f(x) > 0$.

3 Résoudre graphiquement $f(x) > 0$ et vérifier le résultat précédent.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

23 Résolution algébrique et graphique

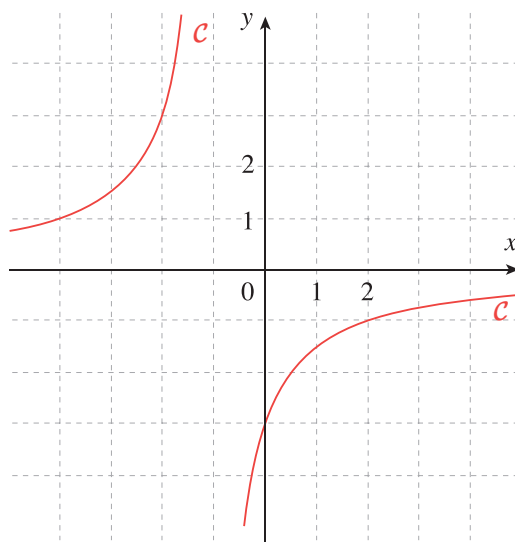


20 min

Corrigé
p. 103

Lycée Colbert, Paris

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f ,
définie pour tout $x \neq -1$ par $f(x) = \frac{-3}{x+1}$.



- 1 Déterminer par le calcul l'ensemble des solutions de :

$$\frac{-3}{x+1} \geq 3.$$

Indiquer comment le graphique permet de retrouver ces résultats.

- 2 En utilisant le graphique, donner l'ensemble des réels x vérifiant :

$$-1 < \frac{-3}{x+1} < 1.$$

- 3 Sur le même dessin, représenter la droite d'équation $y = 1 - x$. En déduire graphiquement l'ensemble des solutions de $\frac{-3}{x+1} \geq 1 - x$. Retrouver ce résultat par le calcul.

24 Avec une fonction de référence



30 min

Corrigé
p. 105

Lycée Camille Claudel, Troyes

- 1 (a) Soit f la fonction définie sur $]0 ; 1]$ par :

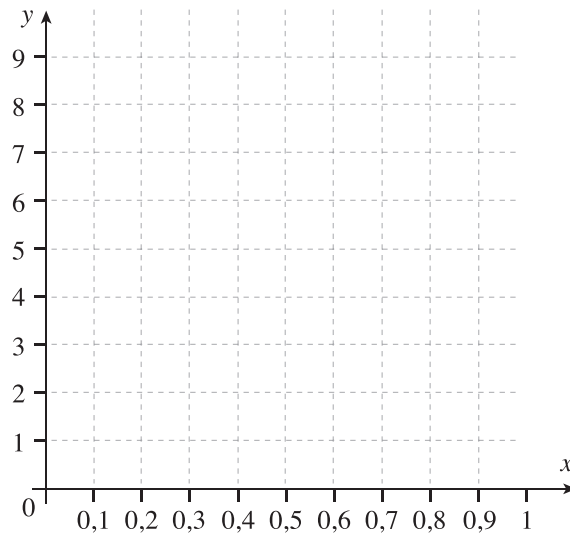
$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

Compléter le tableau de valeurs suivant (donner les résultats à 0,01 près).

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$										

- (b) Tracer $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f , sur le graphique suivant.



- (c) Soit g la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = -\frac{8}{\sqrt{2}}x + 4 + \sqrt{2}.$$

Comment qualifie-t-on cette fonction ?

Quel est son sens de variation ?

- (d) Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	0	0,25	0,5
$g(x)$			

Tracer la courbe représentative de g dans le même repère que $\mathcal{C}_f$.

- (e) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) > f(x)$ sur $]0 ; 1]$.

- 2** (a) Montrer que $g(x) > f(x)$ équivaut sur $]0 ; 1]$ à l'inéquation :

$$\frac{8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} < 0.$$

- (b) Développer l'expression $P(x) = -8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)$.

- (c) En déduire les valeurs exactes des solutions de $g(x) > f(x)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

25 Inéquations diverses



15 min

Corrigé
p. 107

Lycée Stanislas, Paris

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $x^2 + 5x + 9 < (x - 1)x + 12.$

2 $2 < \frac{x-3}{x-5} < 3.$

26 Inéquations diverses



20 min

Corrigé
p. 109

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $\frac{3x+1}{4} > \frac{5x+1}{6}.$

2 $(x-4)^2 \leq -1.$

3 $2(x-1) - 3(x+1) > 4(x-2).$

4 $x(-2x-3)^4 \geq 0.$

5 $\frac{x-1}{4} - 5 \leq \frac{2x-3}{2} + \frac{3}{4}.$

27 Lectures graphiques de signes

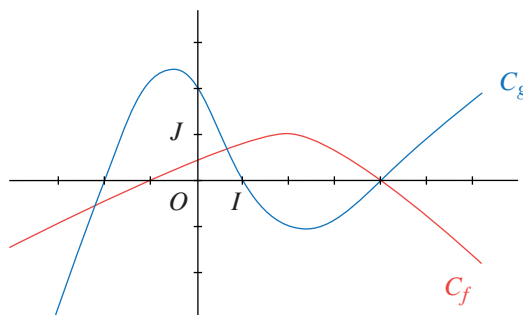


10 min

Corrigé
p. 110

Lycée Jean Zay, Orléans

À partir du graphique suivant, déterminer les tableaux de signes de f et g , et résoudre l'inéquation : $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0.$



28 Inéquations diverses



30 min

Corrigé
p. 110

Lycée Jean-Baptiste Say, Paris

Résoudre les inéquations :

1 $(3x+1)(2-4x) \leq 0$ dans $\mathbb{R}.$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

- 2 $\left(\frac{1}{2}x - 7\right)^2 < (3x + 1)^2$ dans $\mathbb{R}$.
- 3 $\frac{-2(x-1)}{(7-x)} \geq 0$ dans $\mathbb{R} - \{7\}$.
- 4 $\frac{x^2}{1-2x} < -1$ dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
- 5 $\frac{x}{x(5-x)^2} \leq \frac{3x^2}{x(5-x)^2}$ dans $\mathbb{R} - \{0; 5\}$.

29 Encadrement



15 min

Corrigé
p. 113

Lycée Hélène Boucher, Paris

- 1 Montrer que pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}.$$

- 2 Montrer que pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$,

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 2.$$

- 3 En déduire que, pour $x \geq -\frac{1}{2}$,

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq 2x^2,$$

puis que :

$$1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + 2x^2.$$

30 Inéquations



15 min

Corrigé
p. 114

Lycée Lacordaire, Marseille

On donne l'expression $A(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

- 1 Factoriser $A(x)$ en commençant par écrire que :

$$A(x) = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4.$$

- 2 En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation :

$$\frac{(x-1)^2 - 2x + 2}{x^3 + 3x^2 - 4} \geq 0.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Un peu de tout...

31 Un calcul astucieux



15 min

Corrigé
p. 115

Lycée Hoche, Versailles

- 1 Développer $(3x + \sqrt{2})^3$.
- 2 Calculer astucieusement $X = 875\,683^2 - (875\,684 \times 875\,682)$.
- 3 Factoriser le mieux possible :

$$E = (2x - 3)^2 + (3 - 2x)(x - 1) - 6 + 4x ;$$

$$F = (a + 2)^2 - 4(5a - 3)^2 ;$$

$$G = a^4 - 1.$$

32 Trouver la bonne expression



15 min

Corrigé
p. 115

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

On donne pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = (2x - 3)^2 + (x - 1)(3 - 2x)$.

- 1 Pour tout x de $\mathbb{R}$, développer et réduire $f(x)$.
- 2 Pour tout x de $\mathbb{R}$, factoriser $f(x)$.
- 3 En choisissant la bonne expression de $f(x)$, résoudre les équations suivantes :
 - (a) $f(x) = 6$.
 - (b) $f(x) = 0$.
- 4 Calculer $f(2 + \sqrt{2})$.

33 Inéquations



20 min

Corrigé
p. 116

Lycée Murat, Issoire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + \sqrt{3})^2 - 5.$$

- 1 Développer $f(x)$.
- 2 Factoriser $f(x)$.
- 3 Donner les valeurs exactes de $f(\sqrt{2})$, $f(0)$, $f(\sqrt{5} - \sqrt{3})$, $f(-\sqrt{3})$.
- 4 Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 0$.
- 5 Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.
- 6 Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \leq -5$.
- 7 Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \leq -6$.

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

Valeur absolue

34 Traduction en valeurs absolues



5 min

Corrigé
p. 117

Lycée Loquidy, Nantes

Traduire avec des valeurs absolues les affirmations suivantes.

- 1 La distance de x à -3 est strictement supérieure à 7 $\iff |x \dots| \dots$
- 2 $x \in [-8; -4]$ $\iff |x \dots| \dots$
- 3 $x \in]-\infty; -7] \cup [5; +\infty[$ $\iff |x \dots| \dots$
- 4 Soit E l'ensemble des valeurs approchées de $\sqrt{8}$ à 10^{-1} près.
Traduire l'appartenance d'un réel x à E par une inégalité avec une valeur absolue.

35 Équations et inéquations



10 min

Corrigé
p. 118

Lycée Loquidy, Nantes

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- 1 $|x - 2| = 7$
- 2 $|-x - \pi| = 3\pi$
- 3 $|x - \pi| < 0,001$
- 4 $|x + \pi| \geq 1$

36 Points et distance



10 min

Corrigé
p. 119

Lycée Notre-Dame, Boulogne

Sur une droite graduée, on place les points A et B d'abscisses respectives -3 et 1 . M est le point dont l'abscisse x est telle que $|x + 3| = |x - 1|$.

- 1 Interpréter en termes de distance l'égalité : $|x + 3| = |x - 1|$.
- 2 En déduire l'abscisse x du point M .

37 Diverses questions



10 min

Corrigé
p. 119

Lycée Notre-Dame, Boulogne

- 1 Écrire le nombre $|3\pi - 12|$ sans valeurs absolues.
- 2 Sur une droite graduée, M et N sont les points d'abscisses respectives -4 et $-2,5$. Quelle est la distance MN ?
- 3 Complétez le tableau suivant comme pour la ligne exemple :

Intervalle	Encadrement	Centre	Rayon	Valeur absolue
$x \in [-4; 0]$	$-4 \leq x \leq 0$	-2	2	$ x + 2 \leq 2$
	$0 < x < 10$			
$x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$				
				$ x + 0,52 < 10^{-2}$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 **V/F** Étude graphique

→ Énoncé
p. 73

- a** *Faux.* Les deux courbes se coupent en deux points exactement, d'abscisses -2 et 2 . $[-2 ; 2]$ est un intervalle, qui contient *tous* les réels entre -2 et 2 .
- b** *Vrai.* En effet, $\{-2 ; 2\}$ représente bien l'ensemble constitué des deux nombres -2 et 2 .
- c** *Faux.* Au contraire, sur cet intervalle, la courbe de g est strictement au-dessous de celle de f , on aura donc $f(x) > g(x)$.
- d** *Vrai.* L'inégalité est large, il faut donc inclure -2 et $+2$.

2 **V/F** Factorisation

→ Énoncé
p. 73

- a** *Faux,* à cause du 5 .
- b** *Faux.* Attention au double produit : $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.
- c** *Vrai.* $(x - 2)^2 = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$.
- d** *Faux.* On a $(2x)^2 = 4x^2$, donc $(2x - 3)(2x + 3) = 4x^2 - 9$.

3 **QCM** Équations : ensemble des solutions

→ Énoncé
p. 73

- a** Oui. $3x - 7 = 0 \iff 3x = 7 \iff x = \frac{7}{3}$.
- b** Non. On doit donner la solution exacte. $2,33$ est une approximation de la solution à $0,01$ près.
- c** Non. Le principe est : « un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul ». Les solutions sont donc 5 et $-\frac{1}{2}$.
- d** Oui. Les solutions sont $\sqrt{8}$ et $-\sqrt{8}$.
On remarque : $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

4 **V/F** Transformer des inégalités

→ Énoncé
p. 74

- a** *Faux.* Si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0$.
L'affirmation est vraie uniquement si $x \in]0 ; 1[$.
- b** *Faux.* Si $x \geq 2$ alors $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.
- c** *Faux.* Si $x < -2$ alors $-\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 0$.
- d** *Vrai.* La multiplication par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

5 Inéquations

Énoncé
p. 74

- a** Faux. Si x est négatif, il faut changer le sens de l'inégalité.
- b** Faux. En ajoutant $x - 5$ aux deux membres, on obtient $x > -2$ et non $x > 2$.
- c** Faux. Par exemple, $-3 < 2$ mais $\frac{1}{-3} < \frac{1}{2}$. Les inégalités changent de sens en passant à l'inverse si les deux membres ont le même signe !
- d** Vrai. Quelles que soient les valeurs de x , $(x^2 + 2) > 0$ et $2 > 0$, donc les deux inéquations ont les mêmes solutions que $x - 1 > 0$.
- e** Faux. En prenant la racine carrée des deux membres (positifs) d'une inégalité, on obtient une inégalité équivalente et de même sens. Cependant, la racine carrée de $(x - 3)^2$ doit être positive. Il s'agit donc de $|x - 3|$, et non de $x - 3$ en général. Par exemple, pour $x = 0$, on a bien $(x - 3)^2 \geq (2x + 1)^2$ (car $9 \geq 1$) mais $x - 3 = -3$ et $2x + 1 = 1$, donc $x - 3 < 2x + 1$.
- f** Faux. On ne connaît pas les signes de $x - 2$ et de $x + 3$. On constate par exemple que 0 est solution de la première inéquation mais pas de la seconde.

6 Calcul littéral

Énoncé
p. 74

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Le produit de trois entiers consécutifs $n - 1$, n et $n + 1$ s'écrit : $(n - 1)n(n + 1)$.

La somme du produit de trois entiers consécutifs $n - 1$, n et $n + 1$ et de l'entier n est donc :

$$(n - 1)n(n + 1) + n = (n^2 - n)(n + 1) + n = n^3 + n^2 - n^2 - n + n = n^3.$$

Cette somme est donc bien le cube d'un entier.

7 Développements

Énoncé
p. 74

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

- 1** $2x(x - 2)(x + 2) = 2x(x^2 - 4) = 2x^3 - 8x.$
- 2** $(1 + 3x)^2 - 2(x + 1)(x - 5) = 1 + 6x + 9x^2 - 2(x^2 - 5x + x - 5)$
 $= 1 + 6x + 9x^2 - 2x^2 + 8x + 10$
 $= 7x^2 + 14x + 11.$
- 3** $(3x - \sqrt{3})^2 = 9x^2 - 6x\sqrt{3} + 3.$
- 4** $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}.$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

8 Arithmétique et calcul littéral

Énoncé
p. 75

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

$$\begin{aligned} 1 \quad (n+1)^2 - n^2 &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1. \end{aligned}$$

2 Tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $2n+1$, où n est un entier naturel. Ainsi, de la question précédente, nous pouvons déduire que tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $(n+1)^2 - n^2$, et donc que tout nombre impair peut être considéré comme la différence de deux carrés d'entiers consécutifs (n et $n+1$).

3 • $17 = 16 + 1 = 2 \times 8 + 1 = 2n + 1$ avec $n = 8$. Ainsi,

$$17 = (n+1)^2 - n^2 = (8+1)^2 - 8^2 = 9^2 - 8^2.$$

• $2\,019 = 2\,018 + 1 = 2 \times 1\,009 + 1 = 2n + 1$ avec $n = 1\,009$. Ainsi,

$$2\,019 = (1\,009+1)^2 - 1\,009^2 = 1\,010^2 - 1\,009^2.$$

9 Factorisations

Énoncé
p. 75

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

$$\begin{aligned} 1 \quad A(x) &= (2x-3)^2 - (4x+1)(2x-3) \\ &= (2x-3)(2x-3 - (4x+1)) \\ &= (2x-3)(-2x-4) \\ &= -2(2x-3)(x+2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad B(x) &= (x+1)^2 - (2x+3)^2 \\ &= ((x+1) - (2x+3))((x+1) + (2x+3)) \\ &= (-x-2)(3x+4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad C(x) &= (x-1)(2+x) + (x+5)(1-x) \\ &= (x-1)(2+x) - (x+5)(x-1) \\ &= (x-1)(2+x-x-5) \\ &= -3(x-1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad D(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x+1) + x + 1 \\ &= (x+1)(x^2+1). \end{aligned}$$

$$5 \quad E(x) = xy - x - y + 1 = x(y-1) - (y-1) = (y-1)(x-1).$$

$$\begin{aligned} 6 \quad F(x) &= (5x+3)^2 - 11 \\ &= (5x+3)^2 - \sqrt{11}^2 \\ &= (5x+3 - \sqrt{11})(5x+3 + \sqrt{11}). \end{aligned}$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

$$\begin{aligned}
 7 \quad G(x) &= (x-1)^2 - 2(x^2-1) \\
 &= (x-1)^2 - 2(x-1)(x+1) \\
 &= (x-1)(x-1-2(x+1)) \\
 &= (x-1)(-x-3).
 \end{aligned}$$

10 Développement ou factorisation ?

Énoncé
p. 75

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

- 1 Regardons étape par étape ce que fait l'algorithme :

Étape	Instruction	Valeur de y
1	Affecter à y la valeur $x - 2$	$y = x - 2$
2	Affecter à y la valeur y^2	$y = (x - 2)^2$
3	Affecter à y la valeur $y - 4$	$y = (x - 2)^2 - 4$

La valeur de y affichée par l'algorithme est donc bien $(x - 2)^2 - 4$.

- 2 Si on factorise l'expression de y en fonction de x, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (x-2)^2 - 4 &= (x-2)^2 - 2^2 \quad \text{qui est de la forme } a^2 - b^2 \\
 &= [(x-2) + 2][(x-2) - 2] \\
 &\quad \text{car } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\
 &= x(x-4).
 \end{aligned}$$

Ainsi, après avoir saisi la valeur de x, pour afficher le même résultat que l'algorithme initial, il suffit de calculer $x(x-4)$.

Dans l'algorithme proposé ici, il n'a pas été jugé nécessaire de faire intervenir deux variables (x et y) car le fait d'affecter à x la valeur $x(x-4)$ suffit.

11 Diverses factorisations

Énoncé
p. 76

Lycée Chateaubriand, Rennes

$$\begin{aligned}
 1 \quad f(x) &= 3(x-2)(x^2+1) - (6x^2-5)(x-2) \\
 &= (x-2)[3(x^2+1) - (6x^2-5)] \\
 &= (x-2)[3x^2+3-6x^2+5] \\
 &= (x-2)[-3x^2+8] \\
 &= (x-2)(\sqrt{8}-x\sqrt{3})(\sqrt{8}+x\sqrt{3}). \\
 2 \quad 16a^4-9 &= (4a^2-3)(4a^2+3) = (2a-\sqrt{3})(2a+\sqrt{3})(4a^2+3).
 \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 On utilise l'identité remarquable : $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Il vient :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) + (x + 2)(1 - x) \\ &= (x - 1)^2 - 7(x - 1) + (x + 2)(1 - x) \\ &= (x - 1)[(x - 1) - 7 - (x + 2)] \\ &= (x - 1)[x - 1 - 7 - x - 2] \\ &= -10(x - 1). \end{aligned}$$

Remarque : bizarrement, on obtient le même résultat en développant :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 7x + 7 + x + 2 - x^2 - 2x = -10x + 10 = -10(x - 1).$$

Mais c'est exceptionnel ! Ça marche seulement parce que les coefficients des x^2 se compensent. Le simple développement échoue, par exemple, si on modifie un peu la formule, par exemple :

$$x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) + (3x + 2)(1 - x) = -2x^2 - 8x + 10.$$

Alors que la factorisation par $(x - 1)$ donne :

$$x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) - (3x + 2)(x - 1) = -2(x - 1)(5 + x).$$

- 4 Pour ne pas tomber dans le piège, il faut se souvenir de $(ab)^2 = a^2b^2$. Comme $6x - 3 = 3(2x - 1)$, on aura $(6x - 3)^2 = 9(2x - 1)^2$ (et non pas $3(2x - 1)^2$!). Les calculs donnent :

$$\begin{aligned} f(x) &= (6x - 3)^2 - (2x - 1) \\ &= 9(2x - 1)^2 - (2x - 1) \\ &= (2x - 1)[9(2x - 1) - 1] \\ &= (2x - 1)(18x - 9 - 1) \\ &= (2x - 1)(18x - 10) \\ &= 2(2x - 1)(9x - 5). \end{aligned}$$

12 Équations

Lycée Paul Lapie, Courbevoie

Énoncé
p. 76

- 1 On détermine sur la figure les points d'ordonnées 4, 2 ou -1 (voir figure à la fin de la correction).
- (a) Il y a deux points d'ordonnée 4, d'abscisses : 1 et 5.
 - (b) Il y a deux points d'ordonnée 2. L'un a une abscisse comprise entre 1 et 2, l'autre a une abscisse comprise entre 4 et 5.
 - (c) Aucun point de la courbe n'a une ordonnée négative.

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

2 (a) $(x - 3)^2 = 4 \iff (x - 3)^2 - 4 = 0$
 $\iff (x - 3)^2 - 2^2 = 0$
 $\iff (x - 3 - 2)(x - 3 + 2) = 0$
 $\iff (x - 5)(x - 1) = 0$

On a donc deux solutions :

$$S = \{1 ; 5\}.$$

(b) De la même façon :

$$(x - 3)^2 = 2 \iff (x - 3)^2 - 2 = 0$$

$$\iff (x - 3)^2 - \sqrt{2}^2 = 0$$

$$\iff (x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2}) = 0$$

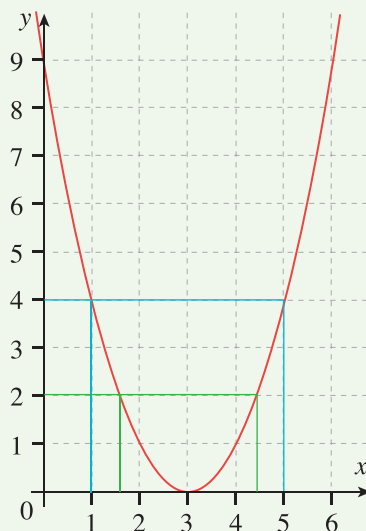
D'où :

$$S = \{3 - \sqrt{2} ; 3 + \sqrt{2}\}.$$

(c) Un carré étant toujours positif ou nul, l'équation :

$$(x - 3)^2 = -1$$

n'a pas de solution et $S = \emptyset$.



13 Équations

Lycée Foch, Rodez

Énoncé
p. 77

1 Il suffit de développer l'expression :

$$(3x + 4)(5x - 3) = 15x^2 - 9x + 20x - 12 = 15x^2 + 11x - 12 = f(x).$$

2 (a) $f(x) = 0 \iff (3x + 4)(5x - 3) = 0.$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc $3x + 4 = 0$ ou $5x - 3 = 0$. On obtient les deux solutions :

$$S = \left\{ \frac{-4}{3}, \frac{3}{5} \right\}.$$

- (b) $f(x) = 15x^2 \iff 15x^2 + 11x - 12 = 15x^2 \iff 11x - 12 = 0$.
D'où une seule solution :

$$S = \left\{ \frac{12}{11} \right\}.$$

- (c) $f(x) = -12 \iff 15x^2 + 11x - 12 = -12$
 $\iff 15x^2 + 11x = 0$
 $\iff x(15x + 11) = 0$.

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, d'où $x = 0$ ou $15x + 11 = 0$. Il vient :

$$S = \left\{ 0; \frac{-11}{15} \right\}.$$

- (d) On reconnaît la présence de $5x - 3$ des deux côtés du symbole « = », il suffit donc de factoriser par $5x - 3$:

$$\begin{aligned} f(x) = 5x - 3 &\iff (3x + 4)(5x - 3) = 5x - 3 \\ &\iff (3x + 4)(5x - 3) - (5x - 3) = 0 \\ &\iff (5x - 3)[(3x + 4) - 1] = 0 \\ &\iff (5x - 3)(3x + 3) = 0 \\ &\iff 3(5x - 3)(x + 1) = 0. \end{aligned}$$

Là encore, on utilise le résultat sur les produits nuls, ce qui donne $5x - 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$. Il vient :

$$S = \left\{ -1; \frac{3}{5} \right\}.$$

- (e) $f(x) = 14x^2 + 11x + 4 \iff 15x^2 + 11x - 12 = 14x^2 + 11x + 4$
 $\iff x^2 - 16 = 0$
 $\iff x^2 - 4^2 = 0$
 $\iff (x - 4)(x + 4) = 0$ (produit remarquable)

L'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{-4; +4\}.$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

14 Équations

Énoncé
p. 77

Lycée Blaise Pascal, Orsay

$$\begin{aligned} 1 \quad & \frac{5x+3}{4} - \frac{x-9}{3} = \frac{x}{2} + 5 \\ \Leftrightarrow & \frac{15x+9}{12} - \frac{4x-36}{12} = \frac{6x}{12} + \frac{60}{12} \\ & 15x+9-4x+36 = 6x+60 \\ & 5x = 15 \\ & x = 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $S = \{3\}$.

$$\begin{aligned} 2 \quad & (4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0 \\ & ((4x^2 - 3x - 18) + (4x^2 + 3x))((4x^2 - 3x - 18) - (4x^2 + 3x)) = 0 \\ & (4x^2 - 3x - 18 + 4x^2 + 3x)(4x^2 - 3x - 18 - 4x^2 - 3x) = 0 \\ & (8x^2 - 18)(-6x - 18) = 0 \\ & 2(4x^2 - 9)(-6)(x + 3) = 0 \\ & (-12)(2x - 3)(2x + 3)(x + 3) = 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul quand l'un des facteurs est nul.

On obtient l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ -3 ; -\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} \right\}.$$

3 Il faut déjà remarquer que les valeurs 4 et 5, qui annulent les dénominateurs, ne sont pas autorisées... Donc, pour $x \neq 5$ et $x \neq 4$:

$$\begin{aligned} & \frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x-4} = 2 - \frac{2}{x-4} \\ \Leftrightarrow & \frac{x-4}{x-5} = -\frac{x-6}{x-4} + 2 - \frac{2}{x-4} \\ & = -\frac{x-6}{x-4} + \frac{2x-8}{x-4} - \frac{2}{x-4} \\ & = \frac{-x+6+2x-8-2}{x-4} \\ & = \frac{x-4}{x-4} \\ & = 1 \\ \Leftrightarrow & x-4 = x-5 \\ \Leftrightarrow & -4 = -5 \end{aligned}$$

Ceci n'est visiblement pas vrai, il n'y a pas de solution : $S = \emptyset$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

15 Bien choisir son taxi

Énoncé
p. 77

Lycée Victor Duruy, Paris



- 1 (a) Avec le tarif A, 8 km coûtent :

$$5 + 8 \times 0,40 = 5 + 3,20 = 8,20 \text{ €}.$$

Avec le tarif B, le même trajet revient à : $8 \times 0,60 = 4,80 \text{ €}$.

Il vaut donc mieux utiliser le taxi B.

- (b) Pour 30 km, le tarif A coûte :

$$5 + 30 \times 0,40 = 5 + 12 = 17 \text{ €},$$

alors que le tarif B revient à : $30 \times 0,60 = 18 \text{ €}$.

Il vaut donc mieux prendre le taxi A.

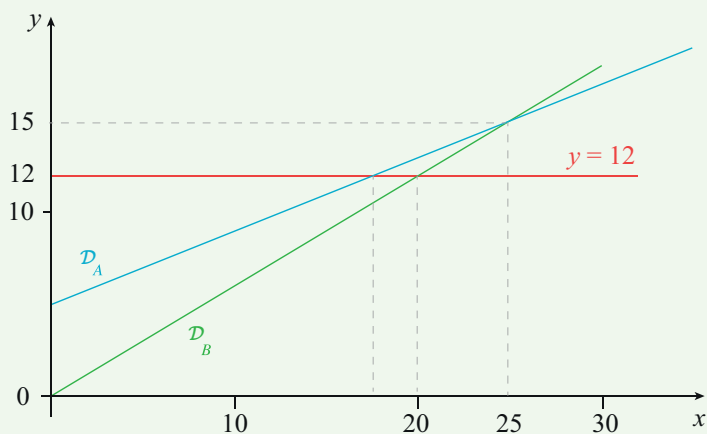
- 2 Dans le cas général, pour x kilomètres, le tarif A revient à :

$$A(x) = 5 + 0,40x$$

et le tarif B :

$$B(x) = 0,60x.$$

- 3 (a) Il s'agit de deux fonctions affines (la seconde est même linéaire), donc $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ sont deux droites. D'après nos calculs, $\mathcal{D}_A$ passe par le point de coordonnées (30 ; 17) et, par exemple (0 ; 5) ; $\mathcal{D}_B$ passe par le point de coordonnées (30 ; 18) et (0 ; 0). On obtient la représentation :



CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

(b) Les coordonnées de l'intersection sont données par le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 5 + 0,40.x \\ y = 0,60.x \end{cases} &\iff \begin{cases} 0,60x = 5 + 0,40.x \\ y = 0,60x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0,20x = 5 \\ y = 0,60.x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{5}{0,20} = 25 \\ y = 0,60 \times 25 = 15 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour 25 km, les deux tarifs sont équivalents (on paiera 15 € dans les deux cas).

- 4 (a) À droite du point d'intersection (c'est-à-dire pour des trajets de plus de 25 km), la droite $\mathcal{D}_A$ est en-dessous de la droite $\mathcal{D}_B$, le taxi A est donc moins cher.
- (b) On utilise la droite horizontale, d'équation $y = 12$ pour lire sur le graphique, pour chaque tarif, les distances correspondant à 12 €. La droite horizontale coupe $\mathcal{D}_A$ à gauche du point où elle coupe $\mathcal{D}_B$. On parcourt donc plus de kilomètres avec le tarif B. D'après le graphique, le tarif B permet de parcourir 20 kilomètres. C'est moins de 25 : on est bien dans le domaine où le tarif B est moins cher (plus de kilomètres pour le même prix).

16 Équations

Énoncé
p. 78

Lycée Lambert, Mulhouse

- 1 Si vous ne voyez pas de facteur commun, c'est normal, regardez mieux : il n'y a pas de x^2 , il s'agit d'une simple équation du premier degré. Il suffit donc d'effectuer le développement suivant :

$$\begin{aligned} 7(2x + 4) - 5(4x - 3) &= \frac{2}{5} - \frac{3x - 5}{2} \\ \iff 14x + 28 - 20x + 15 &= \frac{4}{10} - \frac{15x - 25}{10} \\ \iff -6x + 43 &= \frac{29 - 15x}{10} \\ \iff -60x + 430 &= 29 - 15x \\ \iff -45x &= -401 \\ \iff x &= \frac{401}{45}. \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions :

$$S = \left\{ \frac{401}{45} \right\}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

- 2 Là non plus, pas de facteur commun évident, et pas de produit remarquable. Il faut se résoudre à développer :

$$(3x - 2)(2x - 5) + 2(x - 5)(7 - 3x) = 0$$

$$\iff 6x^2 - 15x - 4x + 10 + (2x - 10)(7 - 3x) = 0$$

$$\iff 6x^2 - 19x + 10 + 14x - 6x^2 - 70 + 30x = 0$$

$$\iff 25x - 60 = 0.$$

On comprend mieux pourquoi il fallait développer. L'équation est en fait du premier degré (un peu camouflé, il est vrai). L'unique solution est :

$$\frac{60}{25} = \frac{12}{5}.$$

D'où :

$$S = \left\{ \frac{12}{5} \right\}.$$

- 3 Décidément, pas de chance, toujours pas de facteur commun à l'horizon. Développons, pour voir :

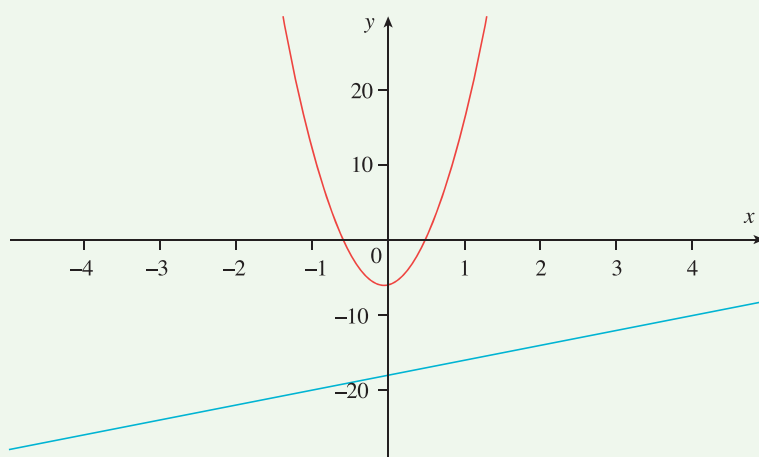
$$(5x + 3)(4x - 2) = 2(x - 9) \iff 20x^2 - 10x + 12x - 6 = 2x - 18$$

$$\iff 20x^2 + 12 = 0.$$

Comme un carré est toujours positif, l'expression $20x^2 + 12$ ne vaut jamais zéro, il n'y a donc pas de solution :

$$S = \emptyset.$$

Sur le graphique ci-dessous, nous voyons les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto (5x + 3)(4x - 2)$ (parabole) et $x \mapsto 2(x - 9)$ (droite). On constate en effet que ces deux courbes n'ont pas de point d'intersection.



- 4 On rassemble tous les termes du même côté du symbole « = » :

$$9(4x - 1)^2 - (3x - \frac{1}{2})^2 = 0.$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Il faut reconnaître que $9(4x - 1)^2$ est un carré. Comme $9 = 3^2$, on a :

$$9(4x - 1)^2 = [3(4x - 1)]^2 = (12x - 3)^2.$$

L'équation se ramène donc à :

$$(12x - 3)^2 - \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Il s'agit de la différence de deux carrés, que l'on factorise :

$$\left(12x - 3 + 3x - \frac{1}{2}\right)\left(12x - 3 - 3x + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

ou encore :

$$\left(15x - \frac{7}{2}\right)\left(9x - \frac{5}{2}\right) = 0.$$

Ce produit est nul si et seulement si $15x - \frac{7}{2} = 0$ ou $9x - \frac{5}{2} = 0$.

La première équation donne la solution $\frac{7}{30}$, la seconde $\frac{5}{18}$.

D'où les solutions :

$$S = \left\{\frac{7}{30}; \frac{5}{18}\right\}.$$

5 Enfin une équation avec un beau facteur commun $(2 - x)$!

$$\begin{aligned} &(2 - x)(5x + 3) + (x - 2)(3 - x) - (2 - x) = 0 \\ \iff &(2 - x)[(5x + 3) - (3 - x) - 1] = 0 \\ \iff &(2 - x)(5x + 3 - 3 + x - 1) = 0 \\ \iff &(2 - x)(6x - 1) = 0. \end{aligned}$$

On s'est une nouvelle fois ramené au cas d'un produit nul, les deux solutions sont 2 et $\frac{1}{6}$:

$$S = \left\{\frac{1}{6}; 2\right\}.$$

17 Équations

Énoncé
p. 78

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \quad (x - 1)(2x - 3)^2 &= 4(x - 1) \iff (x - 1)(2x - 3)^2 - 4(x - 1) = 0 \\ &\iff (x - 1)[(2x - 3)^2 - 4] = 0 \\ &\iff (x - 1)[(2x - 3)^2 - 2^2] = 0 \\ &\iff (x - 1)[(2x - 3) - 2][(2x - 3) + 2] = 0 \\ &\iff (x - 1)(2x - 5)(2x - 1) = 0 \\ &\iff x - 1 = 0 \text{ ou } 2x - 5 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $(x-1)(2x-3)^2 = 4(x-1)$ est donc :

$$S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{5}{2} \right\}.$$

- 2** $x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = -4$. Or, un carré est toujours positif ou nul. Par conséquent, il n'y a pas de solution à l'équation $x^2 + 4 = 0$. Son ensemble solution est alors :

$$S = \emptyset.$$

- 3** Avant de résoudre l'équation $\frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4} = 1$, il faut en déterminer l'ensemble de définition (car il y a une fraction).

La fraction est définie pour tout réel x tel que $x^2 - 4 \neq 0$, soit pour $x \neq -2$ et $x \neq 2$. L'ensemble de définition de l'équation est alors : $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Réolvons maintenant l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4} = 1 &\iff 3x^2 + 4x - 4 = x^2 - 4 \\ &\iff 2x^2 + 4x = 0 \\ &\iff 2x(x + 2) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -2. \end{aligned}$$

Il y a donc potentiellement deux solutions : 0 et -2. Or, -2 n'est pas dans l'ensemble de définition de l'équation.

La seule solution est alors 0.

$$S = \{0\}.$$

- 4** L'ensemble de définition de l'équation $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-2} = \frac{-6}{(x+1)(x-2)}$ est l'ensemble des réels x tels que les fractions sont définies, c'est-à-dire tels que $x+1 \neq 0$ et $x-2 \neq 0$, soit $x \neq -1$ et $x \neq 2$.

L'ensemble de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Réolvons l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-2} = \frac{-6}{(x+1)(x-2)} &\iff \frac{3(x-2) - 2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{-6}{(x+1)(x-2)} \\ &\iff \frac{3x - 6 - 2x - 2}{(x+1)(x-2)} = \frac{-6}{(x+1)(x-2)} \\ &\iff \frac{x - 8}{(x+1)(x-2)} = \frac{-6}{(x+1)(x-2)} \\ &\iff x - 8 = -6 \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

Or, 2 n'appartient pas à l'ensemble solution de l'équation.

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

Par conséquent, l'ensemble solution de l'équation est :

$$S = \emptyset.$$

18 Avec une identité remarquable

Énoncé
p. 78

Lycée Carnot, Dijon

Pour résoudre cette inéquation, on passe tout dans le même membre et on factorise :

$$\begin{aligned}(2x + 5)^2 - (3x + 2)^2 &\leq 0 \\ ((2x + 5) + (3x + 2))((2x + 5) - (3x + 2)) &\leq 0 \\ (5x + 7)(-x + 3) &\leq 0.\end{aligned}$$

Dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	3	$+\infty$
$5x + 7$		-	0	+
$-x + 3$	+		0	-
$(5x + 7)(-x + 3)$	-	0	+	0

$$\text{On en déduit : } S = \left] -\infty ; -\frac{7}{5} \right] \cup [3 ; +\infty[.$$

19 Avec les identités remarquables

Énoncé
p. 79

Lycée Saint-Jean, Limoges

$$\begin{aligned}1 \quad (2x + 1)^2 - x^2 &\geq 0 \\ \iff ((2x + 1) + x)((2x + 1) - x) &\geq 0 \\ \iff (3x + 1)(x + 1) &\geq 0.\end{aligned}$$

Utilisez éventuellement un tableau de signes pour trouver :

$$S =]-\infty ; -1] \cup \left[-\frac{1}{3} ; +\infty[.$$

2 Attention ! Il s'agit en fait du développement du produit remarquable :

$$[(3x + 2) - (x + 1)]^2.$$

C'est un carré, il n'est donc négatif (au sens large) que lorsqu'il vaut zéro. D'où : $(3x + 2) - (x + 1) = 0 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Conclusion : } S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

20 Avec un facteur communÉnoncé
p. 79**Lycée Descartes, Antony**

- 1** Les deux membres étant constitués de sommes et de produits, pas de problème de définition : le domaine est $\mathbb{R}$. Il y a un x^3 , il faut être prudent. Étant donnée la façon dont sont disposés les deux membres de l'inéquation, il faut penser à factoriser chacun d'eux :

$$x^2(x-1) \geq 4(x-1).$$

On passe tout dans le même membre, et on obtient :

$$x^2(x-1) - 4(x-1) \geq 0$$

$$(x-1)(x^2-4) \geq 0$$

$$(x-1)(x-2)(x+2) \geq 0.$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$x-1$		-	- 0 +		+
$x-2$		-	-	- 0 +	
$x+2$		- 0 +		+	+
produit		- 0 +	0 - 0 +		

On en déduit :

$$S = [-2 ; 1] \cup [2 ; +\infty[.$$

- 2** Il faut ôter de l'ensemble de définition les valeurs qui annulent le dénominateur. Factorisons celui-ci : $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. L'inéquation est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$. Il ne reste qu'à étudier le signe de $\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$:

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x-1$		-	-	- 0 +	
$x+1$		-	- 0 +		+
$x+2$		- 0 +		+	+
$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$		- 0 +		-	+

On en déduit : $S =]-\infty ; -2[\cup]-1 ; 1[.$

- 3** On passe $16x$ à gauche et on factorise :

$$x^2 - 16x \geq 0 \iff x(x-16) \geq 0$$

En s'aidant au besoin d'un tableau de signes, on obtient :

$$S =]-\infty ; 0] \cup [16 ; +\infty[.$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

21 Facteur commun, identité remarquable

Énoncé
p. 79

Lycée Montesquieu, Le Mans

- 1 On commence par factoriser l'expression :

$$\begin{aligned}(x+6)(x-3) - 2x + 6 &\geq 0 \iff (x+6)(x-3) - 2(x-3) \geq 0 \\ &\iff (x-3)[(x+6) - 2] \geq 0 \\ &\iff (x-3)(x+4) \geq 0.\end{aligned}$$

On utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$
$x-3$	$-$		$-$	0
$(x-3)(x+4)$	$+$	0	$-$	0

On conclut :

$$S =]-\infty ; -4] \cup [3 ; +\infty[.$$

- 2 On remarque qu'il faudra exclure la valeur 1 (à cause du dénominateur). Surtout pas de produits en croix, il faut réduire au même dénominateur puis rassembler l'expression dans le même membre.

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{1-x} \geq 2 &\iff \frac{x+3}{1-x} \geq \frac{2(1-x)}{(1-x)} \\ &\iff \frac{x+3}{1-x} - \frac{2(1-x)}{(1-x)} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x+3) - 2(1-x)}{1-x} \geq 0 \\ &\iff \frac{x+3-2+2x}{1-x} \geq 0 \\ &\iff \frac{3x+1}{1-x} \geq 0.\end{aligned}$$

Les valeurs importantes sont $-\frac{1}{3}$ et 1, on utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$3x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{3x+1}{1-x}$	$-$	0	$+$	$-$

On obtient :

$$S = \left[-\frac{1}{3} ; 1 \right[.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 Ici, pas de calcul à faire : quel que soit le réel x , son carré x^2 est positif, donc $25x^2 + 4 \geq 0$. L'ensemble des solutions est donc $\mathbb{R}$.

4 On reconnaît un produit remarquable :

$$25x^2 - 4 = (5x - 2)(5x + 2).$$

Cette expression s'annule en $\frac{2}{5}$ et $-\frac{2}{5}$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$	
$5x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	
$5x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	
$25x^2 - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

D'où :

$$S =]-\infty ; -\frac{2}{5}] \cup [\frac{2}{5} ; +\infty[.$$

22 Résolution algébrique et graphique

Énoncé
p. 79

Lycée Auguste Renoir, Cagnes-sur-Mer

1 Il suffit de développer :

$$4 - (x - 1)^2 = 4 - (x^2 - 2x + 1) = 4 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x + 3.$$

On reconnaît dans $f(x) = 4 - (x - 1)^2$ la différence de deux carrés, ce qui permet de factoriser :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - (x - 1)(2 + (x - 1)) \\ &= (3 - x)(1 + x). \end{aligned}$$

2 On peut dresser un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$
$3 - x$		$+$	0	$-$
$(3 - x)(x + 1)$		$-$	0	$-$

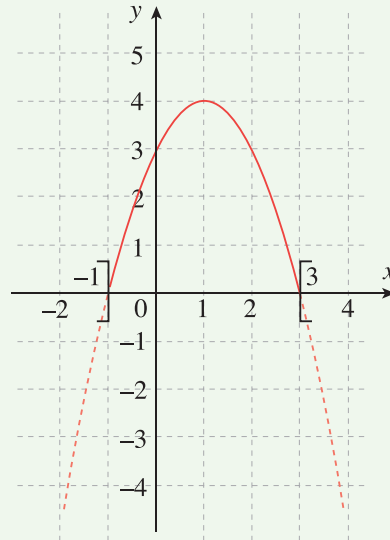
On conclut :

$$S =]-1 ; 3[.$$

3 Pour résoudre graphiquement l'inéquation, on fait apparaître sur la figure les points d'ordonnée strictement positive (voir figure page suivante).

Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation.

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3



On retrouve bien l'intervalle $] -1 ; 3[$.

23 Résolution algébrique et graphique

Lycée Colbert, Paris

Énoncé
p. 80

1 On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{-3}{1+x} \geq 3 &\iff \frac{-3}{1+x} \geq \frac{3(1+x)}{1+x} \\ &\iff \frac{-3 - 3(1+x)}{1+x} \geq 0 \\ &\iff \frac{-3(1+1+x)}{1+x} \geq 0 \\ &\iff \frac{-3(2+x)}{1+x} \geq 0. \end{aligned}$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$2+x$	-	0	+	+
$-3(2+x)$	+	0	-	-
$x+1$	-		- 0 +	
$\frac{-3(2+x)}{x+1}$	-	0	+	-

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

D'après le tableau, l'ensemble des solutions est donc :

$$S = [-2 ; -1[.$$

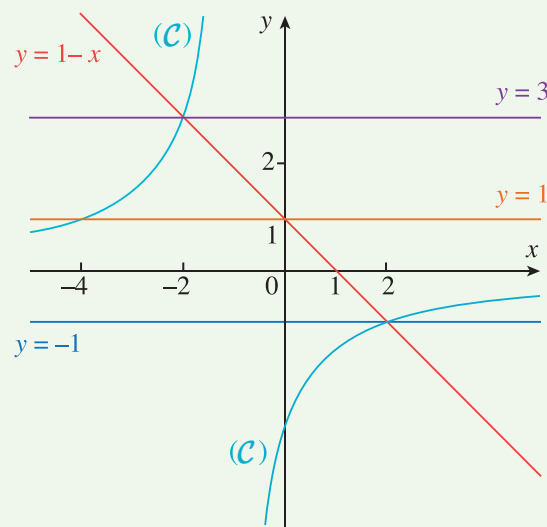
On retrouve graphiquement ce résultat en plaçant sur la figure la droite d'équation $y = 3$. Les solutions sont les abscisses des points de (C) qui sont situés au-dessus de cette droite (voir figure à la fin du corrigé). Il s'agit effectivement des points d'abscisses comprises entre -2 et -1 (on exclut -1 car f n'est pas définie en -1).

- 2** Sur la figure, on représente les droites horizontales $y = 1$ et $y = -1$. On cherche les abscisses des points de (C) qui sont dans la bande délimitée par ces deux droites. On lit l'ensemble des solutions sur la figure :

$$S =]-\infty ; -4[\cup]2 ; +\infty[.$$

- 3** On cherche les abscisses des points de la courbe qui sont au-dessus de la droite d'équation $y = 1 - x$. On lit sur le dessin l'ensemble des solutions :

$$S = [-2 ; -1[\cup]2 ; +\infty[$$



Retrouvons ce résultat par le calcul :

$$\begin{aligned} \frac{-3}{x+1} \geq 1-x &\iff \frac{-3}{x+1} - (1-x) \geq 0 \\ &\iff \frac{-3 - (x+1)(1-x)}{x+1} \geq 0 \\ &\iff \frac{x^2 - 4}{x+1} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x-2)(x+2)}{x+1} \geq 0. \end{aligned}$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

En faisant le tableau de signes de $\frac{(x-2)(x+2)}{x+1}$ on retrouve le résultat obtenu précédemment par lecture graphique.

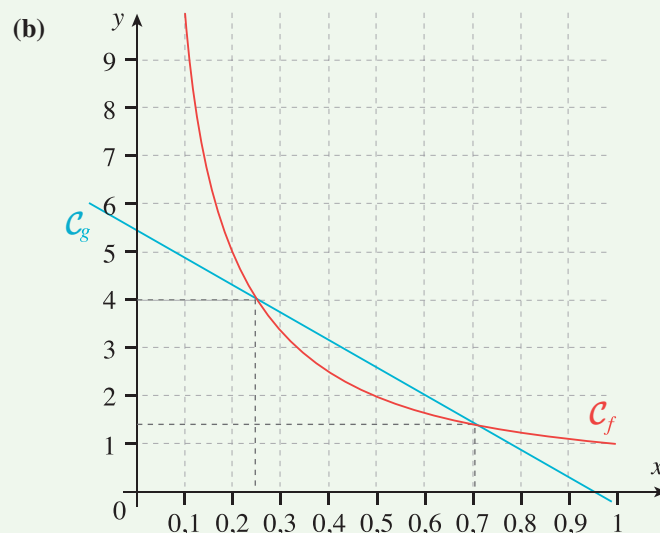
24 Avec une fonction de référence

Énoncé
p. 80

Lycée Camille Claudel, Troyes

1 (a)

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$	10	5	3,33	2,5	2	1,67	1,43	1,25	1,11	1



(c) Ne vous laissez pas éblouir par tous ces radicaux (les racines carrées). g est une simple fonction... affine, de la forme $g(x) = ax + b$.

Ici $a = -\frac{8}{\sqrt{2}}$ et $b = 4 + \sqrt{2}$. Comme le coefficient directeur a est strictement négatif, la fonction g est strictement décroissante. Sa courbe représentative C_g est une droite (c'est pour cela que l'on vous demande de calculer seulement trois images ; en fait, deux suffiraient).

(d)

x	0	0,25	0,5
$g(x)$	$4 + \sqrt{2} \approx 5,41$	4	$4 - \sqrt{2} \approx 2,59$

(e) Les courbes C_f et C_g se coupent en deux points. Le premier a visiblement pour ordonnée 4. Son abscisse se trouve dans le tableau de valeurs de g : elle vaut 0,25 (on peut se contenter de lire cette abscisse sur le graphique).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Le deuxième point d'intersection a pour abscisse 0,7 (l'ordonnée n'a pas d'importance). Si vous avez fait un dessin très précis, vous pouvez vous rendre compte que l'abscisse de ce point d'intersection est très légèrement plus grande que 0,7. Mais ne trichez pas (le calcul exact est fait à la fin de l'exercice) !

La lecture graphique donne 0,25 et 0,7 comme abscisses pour les points d'intersection.

La courbe $\mathcal{C}_f$ passe en-dessous de la droite $\mathcal{C}_g$ entre ces deux points. On obtient pour ensemble des solutions de $g(x) > f(x)$:

$$S =]0,25 ; 0,7[.$$

2 (a) On calcule :

$$\begin{aligned} g(x) > f(x) &\iff -\frac{8}{\sqrt{2}}x + 4 + \sqrt{2} > \frac{1}{x} \\ &\iff \frac{-8x + 4\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x} > 0 \\ &\iff \frac{-8x^2 + 4x\sqrt{2} + 2x}{x\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}} > 0 \\ &\iff \frac{-8x^2 + 4x\sqrt{2} + 2x - \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} > 0 \\ &\iff \frac{-8x^2 + 2x(2\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} > 0 \\ &\iff \frac{8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} < 0. \end{aligned}$$

(b) On développe :

$$\begin{aligned} P(x) &= -8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) \\ &= (-8x + 2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) \\ &= 8x^2 - 8x\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 2x \\ &= 8x^2 - 4x\sqrt{2} - 2x + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

On reconnaît dans :

$$P(x) = 8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}$$

le numérateur de :

$$\frac{8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}}{x\sqrt{2}}.$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

(c) L'inéquation $g(x) > f(x)$ devient donc :

$$\frac{-8 \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)}{x\sqrt{2}} < 0.$$

Ne perdons pas de vue que cette inéquation est à résoudre sur $]0 ; 1]$.
On a donc $x\sqrt{2} > 0$, et on peut simplifier l'inéquation en :

$$-8 \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) < 0.$$

L'expression s'annule pour $x = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Il s'agit des abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$:

$$\frac{1}{4} = 0,25 \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71.$$

On dresse un tableau de signes :

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$-8 \left(x - \frac{1}{4}\right)$		+	0	-
$\frac{\sqrt{2}}{2} - x$	+		+	0
$P(x)$	+	0	-	0

D'après le tableau :

$$S = \left] \frac{1}{4} ; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[.$$

25 Inéquations diverses

Lycée Stanislas, Paris

Énoncé
p. 82

1 $x^2 + 5x + 9 < (x - 1)x + 12$

$$x^2 + 5x + 9 < x^2 - x + 12$$

$$5x + x < 12 - 9$$

$$6x < 3$$

$$x < \frac{1}{2}.$$

L'ensemble des solutions est donc : $S = \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[.$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

- 2 Il faut d'abord résoudre chaque partie de l'inéquation indépendamment, après avoir remarqué que la valeur 5 n'est pas autorisée.

$$\begin{aligned} 2 < \frac{x-3}{x-5} &\iff \frac{2x-10}{x-5} < \frac{x-3}{x-5} \\ &\iff \frac{2x-10}{x-5} - \frac{x-3}{x-5} < 0 \\ &\iff \frac{2x-10-x+3}{x-5} < 0 \\ &\iff \frac{x-7}{x-5} < 0. \end{aligned}$$

On construit un tableau de signes :

x	$-\infty$	5	7	$+\infty$
$x-7$	—		— 0 +	
$x-5$		— 0 +		+
$\frac{x-7}{x-5}$	+		— 0 +	

La première inégalité n'est donc vérifiée que si : $5 < x < 7$.

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x-5} < 3 &\iff \frac{x-3}{x-5} < \frac{3x-15}{x-5} \\ &\iff 0 < \frac{3x-15}{x-5} - \frac{x-3}{x-5} \\ &\iff 0 < \frac{3x-15-x+3}{x-5} \\ &\iff 0 < \frac{2x-12}{x-5} \\ &\iff 0 < \frac{x-6}{x-5}. \end{aligned}$$

Là encore, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	5	6	$+\infty$
$x-6$	—		— 0 +	
$x-5$		— 0 +		+
$\frac{x-6}{x-5}$	+		— 0 +	

La deuxième inégalité n'est vérifiée que si : $x < 5$ ou $x > 6$.

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

Les deux inégalités ne sont donc vérifiées en même temps que si $x > 6$ et $x < 7$, donc l'ensemble des solutions est :

$$S =]6 ; 7[.$$

26 Inéquations diverses

Énoncé
p. 82

Lycée Évariste Galois, Sartrouville

$$\begin{aligned} 1 \quad \frac{3x+1}{4} > \frac{5x+1}{6} &\iff \frac{3x+1}{4} \times 12 > \frac{5x+1}{6} \times 12 \\ &\iff 9x+3 > 10x+2 \\ &\iff 1 > x. \end{aligned}$$

D'où $S =]-\infty ; 1[$.

2 Un carré, positif, ne peut jamais être plus petit que -1 , il n'y a donc pas de solution. $S = \emptyset$.

3 On développe :

$$\begin{aligned} 2x-2-3x-3 &> 4x-8 \\ \iff 2x-3x-4x &> 2+3-8 \\ \iff -5x &> -3 \\ \iff x &< \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

D'où $S = \left] -\infty ; \frac{3}{5} \right[$.

4 $(-2x-3)^4$ est toujours positif. S'il n'est pas nul, il faut que x soit positif pour que le produit $x(-2x-3)^4$ soit supérieur à 0. Si $(-2x-3)^4 = 0$, c'est que $-2x-3 = 0$, et donc $x = -\frac{3}{2}$. On obtient :

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\} \cup [0 ; +\infty[.$$

5 On réduit toutes les fractions au dénominateur 4 :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{4} - \frac{20}{4} &\leq \frac{4x-6}{4} + \frac{3}{4} \\ \iff x-1-20 &\leq 4x-6+3 \\ \iff -21+6-3 &\leq 4x-x \\ \iff -18 &\leq 3x \\ \iff -6 &\leq x. \end{aligned}$$

D'où : $S = [-6 ; +\infty[$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

27 Lectures graphiques de signes

Énoncé
p. 82

Lycée Jean Zay, Orléans

D'après le graphique, $f(x)$ s'annule si $x = -1$ et si $x = 4$. On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

De la même façon, on dresse le tableau de signes de g :

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$			
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'est défini que si $g(x) \neq 0$. En combinant les deux tableaux de signes précédents, on en déduit celui du quotient :

x	$-\infty$	-2	-1	1	4	$+\infty$	
$f(x)$		$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		$-$	0	$+$	$+$	0	$+$
$\frac{f(x)}{g(x)}$		$+$	$-$	0	$+$	$-$	

On lit directement dans le tableau de signes que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ est $S =]-\infty ; -2[\cup [-1 ; 1[$.

28 Inéquations diverses

Énoncé
p. 82

Lycée Jean-Baptiste Say, Paris

- 1 L'expression $(3x + 1)(2 - 4x)$ est un produit, qui s'annule si $3x + 1 = 0$ ou si $2 - 4x = 0$, donc pour $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{2}$.

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$3x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	
$2 - 4x$	$+$	$+$	0	$-$	
$(3x + 1)(2 - 4x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

D'après le tableau de signes, $(3x + 1)(2 - 4x) \leq 0$ pour $x \leq -\frac{1}{3}$ et $x \geq \frac{1}{2}$, d'où l'ensemble des solutions :

$$S = \left] -\infty ; -\frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty \right[.$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

- 2** On utilise la méthode habituelle : on rassemble tous les termes dans le même membre, et on résout :

$$0 < (3x + 1)^2 - \left(\frac{1}{2}x - 7\right)^2.$$

Le membre de droite est la différence de deux carrés, on factorise :

$$0 < \left[(3x + 1) + \left(\frac{1}{2}x - 7\right)\right] \left[(3x + 1) - \left(\frac{1}{2}x - 7\right)\right].$$

On obtient :

$$0 < \left(\frac{7}{2}x - 6\right) \left(\frac{5}{2}x + 8\right).$$

Le produit s'annule si $\frac{7}{2}x - 6 = 0$ ou si $\frac{5}{2}x + 8 = 0$, donc pour $x = \frac{12}{7}$ ou $x = -\frac{16}{5}$. On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{16}{5}$	$\frac{12}{7}$	$+\infty$
$\frac{7}{2}x - 6$	-		-	0 +
$\frac{5}{2}x + 8$	-			0 +
$\left(\frac{7}{2}x - 6\right)\left(\frac{5}{2}x + 8\right)$	+		0 -	0 +

D'après le tableau de signes, $\left(\frac{7}{2}x - 6\right) \left(\frac{5}{2}x + 8\right) > 0$ pour $x < -\frac{16}{5}$ ou $x > \frac{12}{7}$, d'où l'ensemble des solutions : $S =]-\infty ; -\frac{16}{5}[\cup]\frac{12}{7} ; +\infty[$.

- 3** Du point de vue du signe, un quotient se comporte comme un produit. Il faut en plus tenir compte de l'ensemble de définition. Le numérateur s'annule en 1, le dénominateur en 7, dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$-2(x - 1)$	+	0	—	—
$7 - x$	+	+	0	—
$\frac{-2(x - 1)}{(7 - x)}$	+	0	—	+

(Attention à la présence du -2 pour le signe du numérateur !)

On conclut :

$$S =]-\infty ; 1[\cup]7 ; +\infty[.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4

MÉTHODE

Quand on résout une inéquation où x apparaît au dénominateur, le grand principe est de tout rassembler dans le même membre et de mettre les différents termes au même dénominateur, et de ne pas faire de produits « en croix ».

On a ici :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{1-2x} < -1 &\iff \frac{x^2}{1-2x} + 1 < 0 \\ &\iff \frac{x^2 + 1 - 2x}{1-2x} < 0 \\ &\iff \frac{(x-1)^2}{1-2x} < 0.\end{aligned}$$

On a le choix entre deux méthodes. La meilleure est probablement le tableau de signes. Ce n'est peut-être pas la façon la plus « frime », mais c'est certainement la plus sûre :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	0	+
$1-2x$	+	0	-	-
$\frac{(x-1)^2}{1-2x}$	+	-	0	-

D'où l'ensemble des solutions :

$$S = \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[\cup] 1 ; +\infty[.$$

Autre méthode : le numérateur est un carré, toujours positif, donc la fraction est négative lorsque $1-2x$ est négatif, donc pour $x \geq \frac{1}{2}$.

On doit enlever les valeurs $\frac{1}{2}$ (où la fraction n'est pas définie), et 1 (où

la fraction s'annule), d'où l'ensemble :

$$S = \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[\setminus \{1\}.$$

(c'est le même ensemble que celui que nous avons trouvé).

5

Même si des x apparaissent au dénominateur, on a tout de même le droit de simplifier les fractions avant de commencer d'autres calculs, d'où l'inéquation :

$$\frac{1}{(5-x)^2} \leq \frac{3x}{(5-x)^2}.$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Ne pas oublier que, même si la valeur 0 ne semble plus intervenir, nous continuons à résoudre l'inéquation dans $\mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$. La valeur 0 ne doit pas apparaître dans l'ensemble des solutions.

Ici, le dénominateur est strictement positif, quelle que soit la valeur de x . On peut donc simplifier et résoudre :

$$1 \leq 3x.$$

La « simplification » revient à multiplier les deux membres par $(5 - x)^2$. Comme $(5 - x)^2 > 0$, le sens de l'inégalité ne change pas. Noter que $x = 5$ est exclu de l'ensemble de définition, (c'est ce qui permet d'affirmer $(5 - x)^2 > 0$ et pas seulement $(5 - x)^2 \geq 0$).

On obtient donc $x \geq \frac{1}{3}$. Pensez à retirer la valeur 5 (0 ne convient pas de toute façon) ; l'ensemble des solutions est donc :

$$S = \left[\frac{1}{3} ; +\infty \right[\setminus \{5\} = \left[\frac{1}{3} ; 5 \right[\cup]5 ; +\infty[.$$

29 Encadrement

Énoncé
p. 83

Lycée Hélène Boucher, Paris

1 Il suffit de simplifier le deuxième membre :

$$\begin{aligned} 1 - x + \frac{x^2}{1+x} &= \frac{(1-x)(1+x)}{1+x} + \frac{x^2}{1+x} \\ &= \frac{1-x^2}{1+x} + \frac{x^2}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

2 Si $x \geq -\frac{1}{2}$, il est clair que $x+1 > 0$, donc $\frac{1}{1+x} \geq 0$. De plus on a :

$$\begin{aligned} x \geq -\frac{1}{2} &\iff x+1 \geq \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{1}{x+1} \leq 2 \text{ puisque } x+1 > 0. \end{aligned}$$

On a pu passer aux inverses dans l'inégalité car les deux membres étaient strictement positifs ! D'où le résultat :

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 2.$$

3 L'encadrement précédent peut être multiplié par x^2 , réel positif. L'ordre n'est pas modifié :

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq 2x^2.$$

On en déduit :

$$1 - x \leq 1 - x + \frac{x^2}{1+x} \leq 1 - x + 2x^2 \quad (\text{en ajoutant } 1 - x).$$

Or, d'après la première question :

$$1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

donc :

$$1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + 2x^2.$$

30 Inéquations

Énoncé
p. 83

Lycée Lacordaire, Marseille

$$\begin{aligned} 1 \quad A(x) &= x^3 - x^2 + 4x^2 - 4 \\ &= x^2(x - 1) + 4(x^2 - 1) \\ &= x^2(x - 1) + 4(x + 1)(x - 1) \\ &= (x - 1)[x^2 + 4(x + 1)] \\ &= (x - 1)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x - 1)(x + 2)^2. \end{aligned}$$

2 Factorisons le numérateur :

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - 2x + 2 &= (x - 1)^2 - 2(x - 1) \\ &= (x - 1)(x - 1 - 2) \\ &= (x - 1)(x - 3). \end{aligned}$$

L'inéquation devient donc :

$$\frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)(x + 2)^2} \geq 0.$$

L'inéquation est définie seulement sur $\mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$ (à cause du dénominateur). Maintenant que nous avons éliminé 1, nous pouvons simplifier la fraction :

$$\frac{x - 3}{(x + 2)^2} \geq 0.$$

Le dénominateur étant toujours strictement positif pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$, on se ramène à $x - 3 \geq 0$, donc $x \geq 3$. Un coup d'œil suffit à vérifier que les valeurs interdites ne posent pas de problème :

$$S = [3 ; +\infty[.$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

31 Un calcul astucieux

Énoncé
p. 84

Lycée Hoche, Versailles

1 On développe :

$$\begin{aligned}(3x + \sqrt{2})^3 &= (3x + \sqrt{2})^2 \times (3x + \sqrt{2}) \\ &= (9x^2 + 6x\sqrt{2} + 2) \times (3x + \sqrt{2}) \\ &= 27x^3 + 9x^2\sqrt{2} + 18x^2\sqrt{2} + 12x + 6x + 2\sqrt{2} \\ &= 27x^3 + 27x^2\sqrt{2} + 18x + 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

2 Posons $N = 875\,683$. On doit calculer $X = N^2 - (N + 1)(N - 1)$, ce qui donne facilement :

$$X = N^2 - (N^2 - 1) = 1.$$

3 Le facteur commun $(2x - 3)$ apparaît dans E :

$$\begin{aligned}E &= (2x - 3)^2 + (3 - 2x)(x - 1) - 6 + 4x \\ &= (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x - 1) + 2(2x - 3) \\ &= (2x - 3)[(2x - 3) - (x - 1) + 2] \\ &= (2x - 3)(2x - 3 - x + 1 + 2) \\ &= (2x - 3)x.\end{aligned}$$

F est la différence de deux carrés :

$$\begin{aligned}F &= (a + 2)^2 - 4(5a - 3)^2 \\ &= (a + 2)^2 - [2(5a - 3)]^2 \\ &= [(a + 2) - 2(5a - 3)][(a + 2) + 2(5a - 3)] \\ &= (-9a + 8)(11a - 4).\end{aligned}$$

G est également la différence de deux carrés :

$$G = a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1).$$

32 Trouver la bonne expression

Énoncé
p. 84

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1 $f(x) = (2x - 3)^2 + (x - 1)(3 - 2x)$

$$\begin{aligned}&= [(2x)^2 - 2 \times 3 \times 2x + 3^2] + [3x - 2x^2 - 3 + 2x] \\ &= 4x^2 - 12x + 9 + 3x - 2x^2 - 3 + 2x \\ &= 2x^2 - 7x + 6.\end{aligned}$$

2 $f(x) = (2x - 3)^2 + (x - 1)(3 - 2x)$

$$\begin{aligned}&= (2x - 3)(2x - 3) - (2x - 3)(x - 1) \\ &= (2x - 3)(2x - 3 - x + 1) \\ &= (2x - 3)(x - 2).\end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 (a) Pour résoudre l'équation $f(x) = 6$, il faut prendre la forme développée de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = 6 &\iff 2x^2 - 7x + 6 = 6 \\ &\iff 2x^2 - 7x = 0 \\ &\iff x(2x - 7) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 2x - 7 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = 6$ est donc :

$$S = \left\{ 0; \frac{7}{2} \right\}.$$

- (b) Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, il faut prendre la forme factorisée de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (2x - 3)(x - 2) = 0 \\ &\iff 2x - 3 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \\ &\iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = 2. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = 0$ est donc :

$$S = \left\{ \frac{3}{2}; 2 \right\}.$$

- 4 Pour calculer $f(2 + \sqrt{2})$, nous pouvons prendre l'expression de $f(x)$ que l'on veut. Prenons par exemple la forme développée, qui semble peut-être plus appropriée pour un calcul avec radical :

$$\begin{aligned} f(2 + \sqrt{2}) &= 2(2 + \sqrt{2})^2 - 7(2 + \sqrt{2}) + 6 \\ &= 2(4 + 4\sqrt{2} + 2) - 14 - 7\sqrt{2} + 6 \\ &= 12 + 8\sqrt{2} - 14 - 7\sqrt{2} + 6 \\ &= 4 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

33 Inéquations

Énoncé
p. 84

Lycée Murat, Issoire

1 $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{3} + 3 - 5 = x^2 + 2x\sqrt{3} - 2.$

- 2 On reconnaît une expression du type $A^2 - B^2$:

$$f(x) = (x + \sqrt{3} + \sqrt{5})(x + \sqrt{3} - \sqrt{5}).$$

- 3 On utilise la forme développée pour calculer :

- $f(\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{6} - 2 = 2\sqrt{6}.$
- $f(0) = -2.$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

La forme factorisée est plus adaptée pour calculer :

$$f(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = 0.$$

Enfin, la forme de l'énoncé permet de voir facilement :

$$f(-\sqrt{3}) = -5.$$

- 4 On doit résoudre :

$$(x + \sqrt{3} + \sqrt{5})(x + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = 0.$$

Un produit s'annule lorsqu'au moins l'un de ses facteurs est nul, d'où deux solutions :

$$S = \{\sqrt{5} - \sqrt{3}; -\sqrt{5} - \sqrt{3}\}.$$

- 5 On se sert de l'étude précédente pour dresser un tableau de signes. On note au passage que $-\sqrt{5} - \sqrt{3} < \sqrt{5} - \sqrt{3}$ (car $-\sqrt{5} < \sqrt{5}$).

x	$-\infty$	$-\sqrt{5} - \sqrt{3}$	$\sqrt{5} - \sqrt{3}$	$+\infty$
$x + \sqrt{3} + \sqrt{5}$	—	0	+	+
$x + \sqrt{3} - \sqrt{5}$	—	—	0	+
$f(x)$	+	0	—	+

D'après le tableau :

$$S =]-\infty; -\sqrt{5} - \sqrt{3}] \cup [\sqrt{5} - \sqrt{3}; +\infty[.$$

- 6 L'inéquation $(x + \sqrt{3})^2 - 5 \leq -5$ s'écrit :

$$(x + \sqrt{3})^2 \leq 0.$$

Le carré d'un réel est toujours positif ou nul.

On ne peut avoir $(x + \sqrt{3})^2 \leq 0$ qu'à la seule condition : $(x + \sqrt{3})^2 = 0$.

D'où une solution unique :

$$S = \{-\sqrt{3}\}.$$

- 7 S'il y avait une solution x , on aurait $(x + \sqrt{3})^2 \leq -1$, ce qui est impossible (car un carré est toujours positif). D'où $S = \emptyset$.

34 Traduction en valeurs absolues

Énoncé
p. 85

Lycée Loquidy, Nantes

- 1 La distance de x à -3 est strictement supérieure à 7 $\iff |x + 3| > 7$.
2 $x \in [-8; -4] \iff |x + 6| \leq 2$ (explications page suivante).

Pour compléter ici, nous avons avant tout trouvé le milieu de l'intervalle $[-8; -4]$ en effectuant le calcul : $\frac{-8 - 4}{2} = -6$, puis nous avons calculé la distance entre -6 et -4 (par exemple) en effectuant l'opération : $-4 - (-6) = 2$.

3 $x \in]-\infty; -7] \cup [5; +\infty[\iff |x + 1| \geq 6.$

Pour compléter ici, nous avons avant tout trouvé le milieu de l'intervalle $[-7; 5]$ en effectuant le calcul : $\frac{-7 + 5}{2} = -1$, puis nous avons calculé la distance entre -1 et 5 (par exemple) en effectuant l'opération : $5 - (-1) = 6$.

4 $x \in E \iff |x - \sqrt{8}| \leq 0,1.$

En effet, si x appartient à l'ensemble des valeurs approchées de $\sqrt{8}$ à 10^{-1} près, alors la distance qui sépare x de $\sqrt{8}$ est nécessairement plus petite que 10^{-1} , soit $0,1$.

35 Équations et inéquations

Énoncé
p. 85

Lycée Loquidy, Nantes

1 $|x - 2| = 7.$

Pour résoudre cette équation, on interprète la valeur absolue comme la distance de 2 à x . Ainsi, la distance de 2 à x doit être égale à 7 , ce qui signifie :

$$x = 2 - 7 = -5 \quad \text{ou} \quad x = 2 + 7 = 9.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $|x - 2| = 7$ est donc :

$$\mathcal{S} = \{-5; 9\}$$

2 $| -x - \pi | = 3\pi \iff | -(x + \pi) | = 3\pi$

$$\iff |x + \pi| = 3\pi$$

$$\iff |x - (-\pi)| = 3\pi$$

$$\iff \begin{cases} x = -\pi - 3\pi = -4\pi \\ \text{ou} \\ x = -\pi + 3\pi = 2\pi. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $| -x - \pi | = 3\pi$ est :

$$\mathcal{S} = \{-4\pi; 2\pi\}.$$

3 $|x - \pi| < 0,001 \iff x \in]\pi - 0,001; \pi + 0,001[,$ donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$\mathcal{S} =]\pi - 0,001; \pi + 0,001[.$$

4 $|x + \pi| \geq 1 \iff x \leq -\pi - 1 \text{ ou } x \geq -\pi + 1.$ L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc :

$$\mathcal{S} =]-\infty; -\pi - 1] \cup [-\pi + 1; +\infty[.$$

CALCUL LITTÉRAL, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • CHAP. 3

36 Points et distance

Énoncé
p. 85

Lycée Notre-Dame, Boulogne

- 1 $|x + 3| = |x - (-3)|$, donc $|x - 3|$ représente la distance entre M et A .

De même, $|x - 1|$ représente la distance entre M et B .

- 2 De la question précédente, nous pouvons dire que l'égalité $|x + 3| = |x - 1|$ signifie que $MA = MB$ et donc que M est le milieu de $[AB]$. Son abscisse x est donc le centre de l'intervalle $[-3; 1]$. Ainsi,

$$x = \frac{-3 + 1}{2} = -1.$$

37 Diverses questions

Énoncé
p. 85

Lycée Notre-Dame, Boulogne

- 1 Écrire le nombre $|3\pi - 12|$ sans valeurs absolues.

On cherche pour cela le signe de $3\pi - 12$: on sait que $3 < \pi < 4$ donc $9 < 3\pi < 12$. Ainsi, $3\pi - 12 < 0$. On en conclut alors que :

$$|3\pi - 12| = -(3\pi - 12) = 12 - 3\pi.$$

- 2 Sur une droite graduée, M et N sont les points d'abscisses respectives -4 et $-2,5$. Quelle est la distance MN ?

Convenons de noter x_M et x_N les abscisses respectives des points M et N . On a $x_N > x_M$. Pour déterminer la distance MN , on effectue le calcul :

$$MN = x_N - x_M = -2,5 - (-4) = -2,5 + 4 = 1,5.$$

À RETENIR

Quels que soient les points A et B sur l'axe gradué,

$$d(A, B) = |x_A - x_B| = |x_B - x_A|.$$

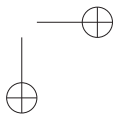
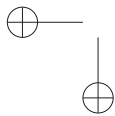
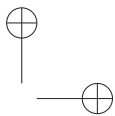
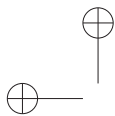
- 3 Le tableau complété est le suivant :

Intervalle	Encadrement	Centre	Rayon	Valeur absolue
$x \in]0; 10[$	$0 < x < 10$	5	5	$ x - 5 < 5$
$x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$	$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\left x - \frac{1}{8}\right \leq \frac{5}{8}$
$x \in]-0,53; -0,51[$	$-0,53 < x < -0,51$	$-0,52$	0,01	$ x + 0,52 < 10^{-2}$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Configurations du plan

Plan du chapitre

1. Le triangle
2. Projections et symétries
3. Le cercle
4. Trigonométrie

Exercice type

Lycée Janson de Sailly, Paris

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et C un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B . Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[OA]$. La droite (CJ) coupe (OI) en K .

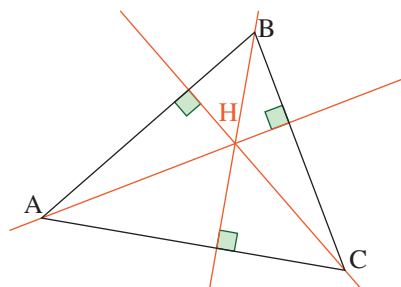
- 1 Montrer que (OI) et (BC) sont perpendiculaires. Que dire de BCK ?
- 2 Montrer que $COKA$ est un parallélogramme.
- 3 Montrer que O est le centre de gravité de BCK .

Voir corrigé page 131

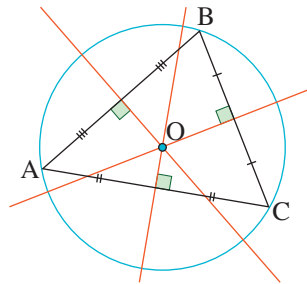
1 Le triangle

Dans un triangle (non aplati), nous avons les propriétés suivantes :

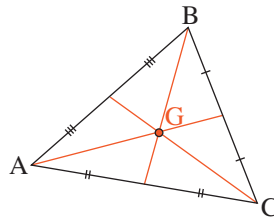
- Les trois hauteurs sont concourantes. Le point de concours H s'appelle l'*orthocentre* du triangle.



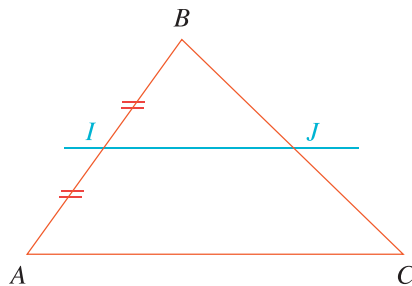
- Les trois médiatrices des côtés sont concourantes. Le point de concours O est le *centre* du cercle circonscrit du triangle.



- Les trois médianes sont concourantes. Le point de concours G est le *centre de gravité* (situé aux deux-tiers de chaque médiane en partant du sommet).



- Si une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.
- Si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.

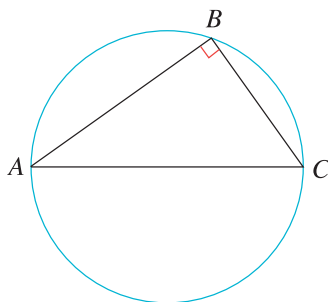


Si I est le milieu de $[AB]$ et si $(IJ) \parallel (AC)$, alors J est le milieu de $[BC]$.

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

1.1 Le triangle rectangle

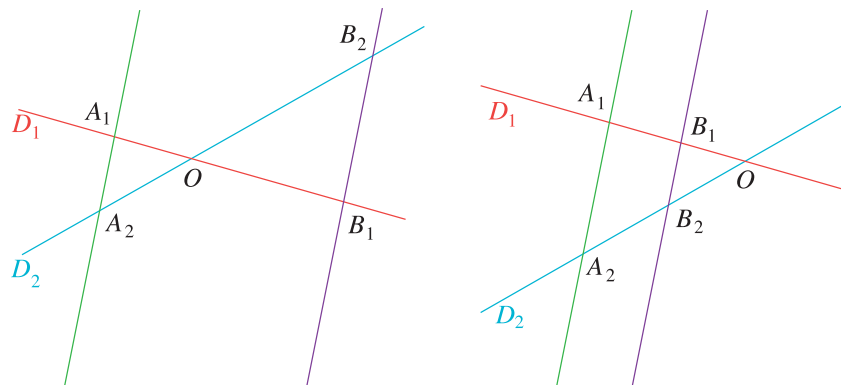
- Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit.
- (Réciproque) Si B appartient au cercle de diamètre $[AC]$, alors le triangle ABC est rectangle en B .



1.2 Le théorème de Thalès

Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en O . Soient deux droites parallèles ne passant pas par O qui coupent D_1 respectivement en A_1 et B_1 , et D_2 respectivement en A_2 et B_2 .

On a deux configurations possibles :



Alors :

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}.$$

Remarque : ne cherchez pas à apprendre ces formules par cœur. Vous risquez la catastrophe si les noms des points ne sont pas les mêmes dans votre énoncé. Faites plutôt une figure, remarquez bien quels sont les triangles semblables, quelles sont les longueurs proportionnelles, quels sont les angles égaux, et n'oubliez pas de citer le nom de Thalès.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1.3 La réciproque du théorème de Thalès

Théorème 1

Si D_1 et D_2 sont deux droites sécantes en O .

A_1 et B_1 deux points de D_1 , distincts de O .

A_2 et B_2 deux points de D_2 , distincts de O .

Si

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1}$$

et si les points O, A_1, B_1 et les points O, A_2, B_2 sont alignés dans le même ordre, alors les droites (A_1A_2) et (B_1B_2) sont parallèles.

Remarque : on est alors dans une des deux configurations de Thalès. On peut en déduire :

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}.$$

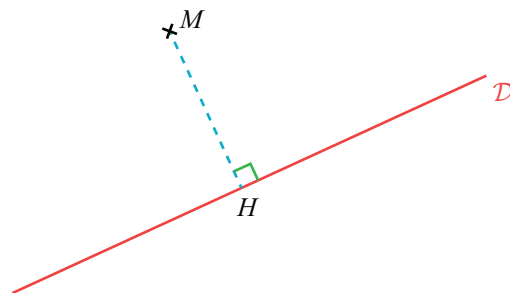
2 Projections et symétries

2.1 Projection orthogonale

Définition 1

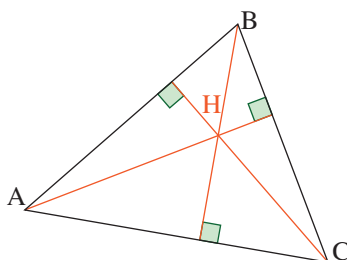
Soient $\mathcal{D}$ une droite et M un point du plan, il existe une unique droite D' passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{D}$. La droite D' coupe $\mathcal{D}$ au point H .

Le point H est le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$.



CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

Par exemple, dans un triangle, les « pieds » des hauteurs sont les projetés orthogonaux de chaque sommet sur le côté opposé :



Si A est un point de $\mathcal{D}$, alors le triangle AHM est rectangle en H . D'après le théorème de Pythagore,

$$AM^2 = AH^2 + HM^2.$$

Comme $AH^2 \geq 0$, on constate que :

- $AM^2 \geq HM^2$, donc $AM \geq HM$: la distance entre M et un point de $\mathcal{D}$ est toujours supérieure ou égale à HM ;
- $AM = HM$ si et seulement si $AH^2 = AM^2 - HM^2 = 0$, c'est-à-dire $AH = 0$, et donc $A = H$.

On peut ainsi caractériser le projeté orthogonal par la distance au point M :

Propriété 1

Le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$ est le point de $\mathcal{D}$ qui est le plus proche de M .

2.2 Symétrie orthogonale d'axe Δ

Définition 2

On considère deux points distincts A et A' et une droite (Δ) .

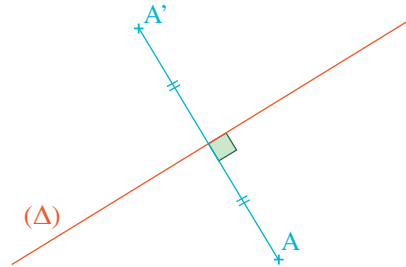
On dit que les points A et A' sont symétriques par rapport à (Δ) si (Δ) est la médiatrice du segment $[AA']$.

Dans le cas où les points A et A' sont confondus, A et A' sont symétriques par rapport à toute droite passant par A .

COURS

INTERROS

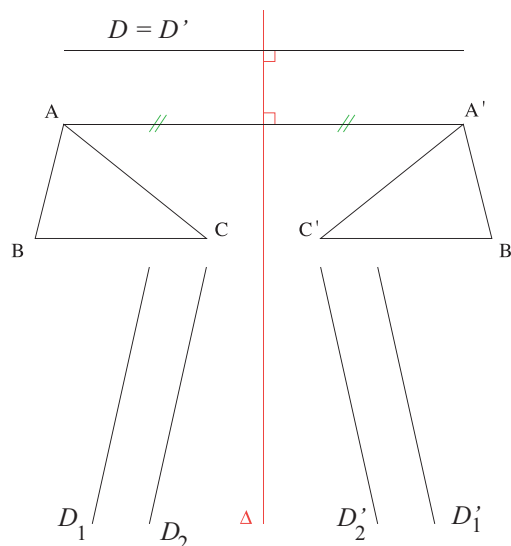
CORRIGÉS



Propriétés 2

Dans une symétrie d'axe Δ ,

- la droite Δ est invariante point par point ;
- toute droite perpendiculaire à Δ est globalement invariante ;
- les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.



Remarque : ne pas confondre la propriété : « les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles » (valable pour toutes les transformations que vous connaissez) et : « l'image d'une droite est une droite parallèle » (ce qui n'est vrai, sauf cas particuliers, que pour les symétries centrales et les translations).

Dans le cas d'une symétrie d'axe Δ , par exemple, si D_1 et D_2 sont deux droites parallèles, que D'_1 est l'image de D_1 et D'_2 l'image de D_2 , alors $D'_1 \parallel D'_2$. Pourtant, comme on peut le voir sur la figure, il n'y a pas de raison que D_1 et D'_1 soient parallèles.

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

2.3 Symétrie de centre O

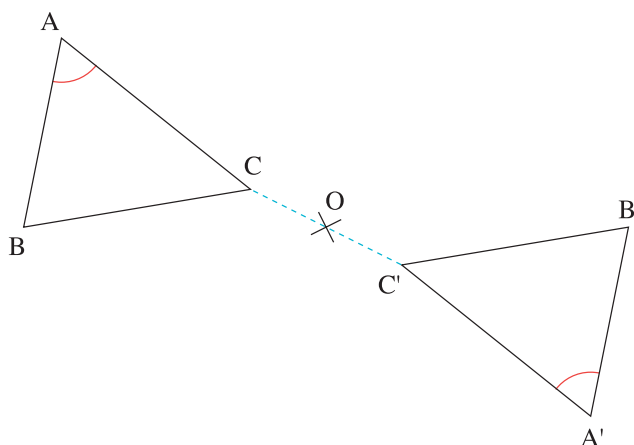
Définition 3

On considère deux points distincts A et A' et un troisième point O .
 A' est le symétrique de A par rapport à O si O est le milieu de $[AA']$.
 Si A et A' sont confondus, ils sont symétriques par rapport à A lui-même.

Propriétés 3

Dans une symétrie centrale,

- les angles sont conservés ;
- l'image d'une droite est une droite parallèle ;
- le centre de symétrie est l'unique point invariant ;
- les droites qui passent par le centre de symétrie sont globalement invariantes.



2.4 Propriétés communes aux symétries

Les symétries orthogonales (ou axiales) et les symétries centrales vérifient les propriétés suivantes (A' , B' , C' désignent les images des points A , B et C).

- Des points alignés ont pour images des points alignés.
- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- Conservation des distances : $AB = A'B'$.
- L'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$.
- L'image d'un cercle de centre A est le cercle de centre A' , de même rayon (vient de la conservation des distances).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- Conservation du parallélisme : les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- Conservation des angles : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.
- Conservation de l'orthogonalité : les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires (vient de la conservation des angles).

Remarque : un *point invariant* est un point qui est sa propre image (la transformation ne le change pas, ne le fait pas « varier »).
Si une droite a pour image elle-même, on dit qu'elle est *globalement invariante*.
Si de plus tous ses points sont invariants, on dit que la droite est *invariante point par point*.

3 Le cercle

Définition 4

Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tels que :

$$OM = r.$$

Remarque : on dit que tous les points d'un cercle sont *équidistants* de son centre.

Définition 5 : tangente à un cercle

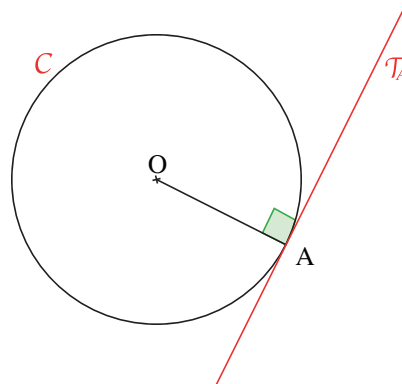
Soit C un cercle de centre O , et soit A un point appartenant à C .

On appelle *tangente à C au point A* l'unique droite dont l'intersection avec C est le point A .

Propriété 4

Soit C un cercle de centre O . Soient A un point de C et $\mathcal{T}_A$ la tangente à C au point A .

Alors, (OA) est perpendiculaire à $\mathcal{T}_A$.



CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

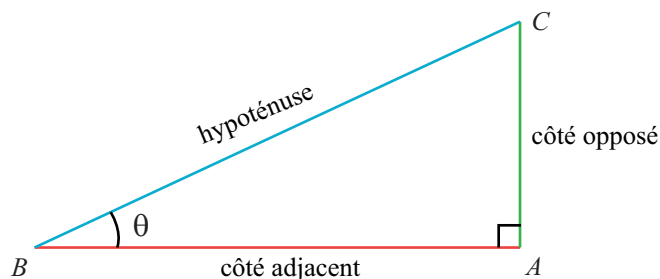
Le point A est ici le projeté orthogonal du centre O sur la tangente.

Inversement, si on projette orthogonalement un point O sur une droite D au point A , le cercle de centre O et passant par A est alors tangent à la droite D au point A .

4 Trigonométrie

4.1 Formule fondamentale

On considère dans un triangle rectangle, un angle θ autre que l'angle droit.



Le cosinus, le sinus et la tangente de θ sont donnés par :

$$\cos \theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \sin \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Notons que $\cos \theta$ et $\sin \theta$ sont des éléments de $]0, 1[$, car l'hypoténuse est le plus grand des trois côtés. En revanche, $\tan \theta$ peut prendre n'importe quelle valeur strictement positive.

On peut exprimer les longueurs des côtés à partir de l'hypoténuse : $AB = BC \cos(\theta)$ et $AC = BC \sin(\theta)$.

Or d'après le d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, c'est-à-dire $BC^2(\cos \theta)^2 + BC^2(\sin \theta)^2 = BC^2$. En simplifiant par BC , on obtient la relation fondamentale :

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1.$$

Supposons, par exemple, qu'on connaisse $\sin \theta = \frac{1}{3}$.

À l'aide de la formule $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$, on peut retrouver :

$$(\cos \theta)^2 = 1 - (\sin \theta)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

$$\text{donc } \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (car } \cos \theta \geq 0) \text{ et } \tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4.2 Quelques valeurs exactes

- *Angle de 45°* : on considère un triangle ABC rectangle en A et isocèle tel que :

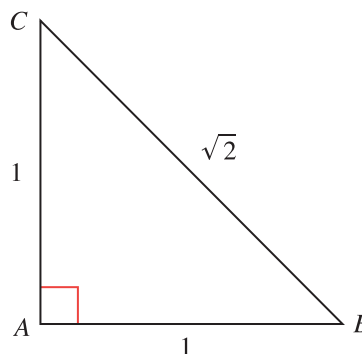
$$AB = AC = 1.$$

$$\text{Alors } \hat{B} = \hat{C} = 45^\circ.$$

D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2,$$

$$\text{donc } BC = \sqrt{2}.$$



Il vient :

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

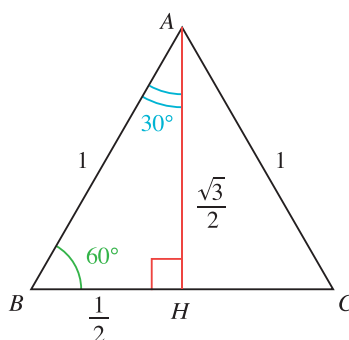
$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{On en déduit que } \cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- *Angles de 30° et 60°* : on considère un triangle ABC équilatéral de côté 1 et H le milieu de $[BC]$. Vous savez que, comme ABC est équilatéral, (AH) est également la hauteur issue de A , la médiatrice de $[BC]$, et la bissectrice de $\widehat{BAC}$. En particulier :

$$\widehat{HAB} = \frac{1}{2} \widehat{CAB} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

$$\widehat{ABH} = \widehat{ABC} = 60^\circ.$$



En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABH , rectangle en H , il vient :

$$BA^2 = BH^2 + AH^2 \iff 1 = \frac{1}{4} + AH^2 \iff \frac{3}{4} = AH^2 \iff \frac{\sqrt{3}}{2} = AH.$$

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

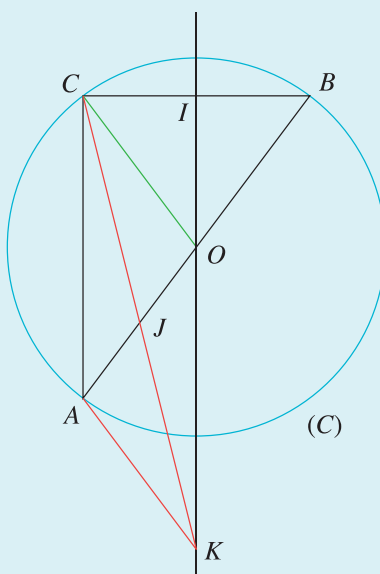
Dans ce même triangle ABH , on a :

$$\begin{aligned}\cos 60^\circ &= \cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \\ \sin 60^\circ &= \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 30^\circ &= \cos \hat{A} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 30^\circ &= \sin \hat{A} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice type

Lycée Janson de Sailly, Paris

- 1** Dans le triangle ABC , $IB = IC$ et $OB = OC$ donc (IO) est la médiatrice de $[BC]$. Ainsi, (IO) est perpendiculaire à (BC) .
 K appartenant à la médiatrice de $[BC]$, on a $KB = KC$ et donc BCK est isocèle en K .



- 2** Les droites (OI) et (AC) sont parallèles, donc les triangles ACJ et OJK sont en configuration de Thalès. Il vient :

$$\frac{JK}{JC} = \frac{JO}{JA} = 1$$

(car $JO = JA$), donc $JK = JC$ et J est le milieu de $[CK]$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Janson de Sailly, Paris

Les diagonales de $COKA$ se coupent en leur milieu J donc $COKA$ est un parallélogramme.

Autre méthode : Dans le triangle ABC , (OI) joint le milieu O de $[AB]$ et le milieu I de $[BC]$, donc $(OI) \parallel (AC)$. De là, la translation qui transforme C en A transforme O en un point M qui est aligné d'une part avec O et I , et de l'autre aligné avec J et C (car J est le milieu de $[OA]$) et donc de $[CM]$. On en déduit que M et K sont confondus.

- 3 J est le milieu de $[CK]$, donc (BJ) est une médiane de BCK . I est le milieu de $[BC]$ donc (IK) est une autre médiane de BCK . Ces deux médianes se coupent en O , donc O est le centre de gravité de BCK (intersection des médianes).

Voir énoncé page 121

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

1 QCM Projeté orthogonal

2 min

Corrigé
p. 139

- 1 Si EFG est un triangle rectangle en F alors :
 - ☐ a E est le projeté orthogonal de F sur (EG) .
 - ☐ b E est le projeté orthogonal de G sur (EF) .
 - ☐ c F est le projeté orthogonal de G sur (EF) .
 - ☐ d G est le projeté orthogonal de F sur (EG) .
- 2 Si $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $BD = 10$ cm et $AB = 8$ cm alors la distance entre O et $[AB]$ vaut :
 - ☐ a 5 cm
 - ☐ b 4 cm
 - ☐ c 3 cm
 - ☐ d 1 cm
- 3 Si ABC est un triangle isocèle en B alors :
 - ☐ a le milieu de $[BC]$ est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.
 - ☐ b le milieu de $[AC]$ est le projeté orthogonal de B sur $[AC]$.
 - ☐ c le milieu de $[AB]$ est le projeté orthogonal de C sur $[AB]$.

2 V/F Propriétés du triangle

5 min

Corrigé
p. 139

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

Dans un triangle :

- ☐ a Le centre de gravité est l'intersection des médiatrices.
- ☐ b L'orthocentre est l'intersection des hauteurs.
- ☐ c Si l'un des côtés est le diamètre d'un cercle, alors le triangle est rectangle.

3 V/F Propriétés du cercle

5 min

Corrigé
p. 139

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

Soit C un cercle de centre O . A et B sont deux points de C .

- ☐ a Le triangle OAB est équilatéral.
- ☐ b Si A et B sont diamétralement opposés alors les tangentes à C en A et B sont parallèles.

4 Nature d'un triangle



5 min

Corrigé
p. 139

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Les côtés d'un triangle IKJ ont pour longueurs $IJ = 3 + 2\sqrt{5}$,
 $JK = \sqrt{78}$ et $IK = 3\sqrt{5} - 2$.

Quelle est la nature du triangle IKJ ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 Trouver un sinus et un angle



5 min

Corrigé
p. 140

Lycée Pierre Caraminot, Egletons

Soit α la mesure d'un angle aigu telle que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

- 1 Calculer la valeur exacte de $\sin \alpha$.
- 2 Donner la valeur approchée de α arrondie au degré près.

6 Démontrer la perpendicularité



10 min

Corrigé
p. 140

Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

BAC est un triangle rectangle en A . H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. I est un point de $[AH]$. La droite parallèle à (AB) passant par I coupe (BC) en J et (AC) en K . Démontrer que (CI) est perpendiculaire à (AJ) .

7 Dans l'espace



10 min

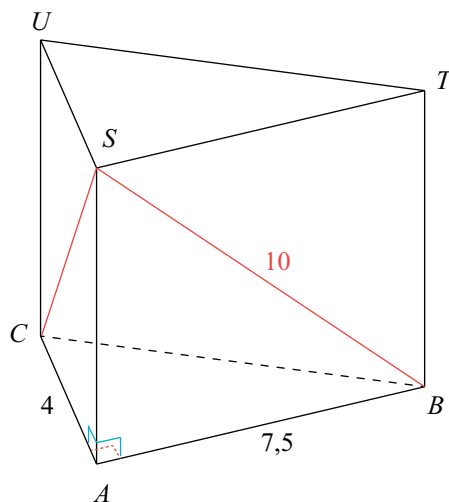
Corrigé
p. 141

Lycée Pierre Caraminot, Egletons

$STUABC$ est un prisme droit et $SABC$ est une pyramide à base triangulaire. La base ABC est un triangle rectangle en A .

On donne, en centimètres, les longueurs suivantes :

$$AC = 4 \quad ; \quad AB = 7,5 \quad ; \quad SB = 10.$$



- 1 Calculer une valeur arrondie au mm près de la longueur AS .
- 2 Calculer la mesure arrondie au degré près de l'angle $\widehat{ABC}$.
- 3 Soit I le projeté orthogonal de A sur (BC) .
Calculer une valeur arrondie de la longueur AI au mm près.

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

8 Théorème de Thalès



15 min

Corrigé
p. 142

Lycée Kléber, Strasbourg

$ABCD$ est un trapèze avec $(AB) \parallel (CD)$. Par E , intersection des diagonales (AC) et (BD) , on mène Δ , parallèle à (AD) et qui coupe $[DC]$ en F , ainsi que Δ' , parallèle à (BC) et qui coupe $[DC]$ en G .

- 1 Faire une figure.
- 2 Montrer que $GC = DF$.

9 À l'intérieur d'un cercle



15 min

Corrigé
p. 143

Lycée Français, Bruxelles

Soit C un cercle de centre O , de rayon R , et $[AB]$ un diamètre. Soit M un point de C , distinct de A et B , m le milieu de $[AM]$ et N le symétrique de m par rapport à O .

- 1 Montrer que m appartient au cercle de diamètre $[AO]$.
- 2 Montrer que N appartient au cercle de diamètre $[BO]$.

10 Avec deux cercles



15 min

Corrigé
p. 143

Lycée Louis-le-Grand, Paris

Deux cercles C et C' sont sécants en A et B . Soient P et Q les points diamétralement opposés à A sur chacun des cercles. Faire une figure et montrer que P , B et Q sont alignés.

11 Aire de rectangles



15 min

Corrigé
p. 144

Lycée Chateaubriand, Rennes

Un triangle ABC de hauteur $[AH]$ est tel que $AB = 5$, $BC = 8$, et $AH = 4$ (unité : le cm). Construire ce triangle.

Par un point K de $[AH]$, on mène la parallèle à (BC) . Elle coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N . P et Q sont les projetés orthogonaux de M et N sur (BC) . On note $AK = x$.

- 1 Calculer en fonction de x l'aire $a(x)$ du rectangle $MNPQ$.
- 2 Pour quelle valeur de x ce rectangle a-t-il une aire maximale ? Quel est ce maximum ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

12 À la recherche d'une aire



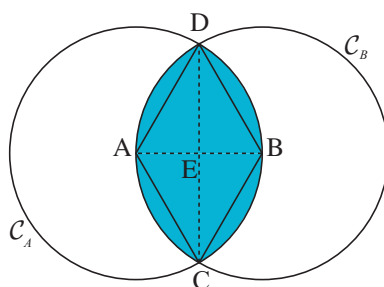
15 min

Corrigé
p. 145

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

Soient $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ deux cercles de centres respectifs A et B et de rayon 3 cm tels que $\mathcal{C}_A$ passe par B et $\mathcal{C}_B$ par A .

On note C et D les points d'intersection de ces deux cercles et E l'intersection de (CD) et (AB) .



On souhaite calculer l'aire du domaine coloré.

- 1 Montrer que le domaine coloré est symétrique par rapport à E .
- 2 En vous aidant de la nature du triangle ABD , déterminer son aire.
- 3 Calculer l'aire exacte, en cm^2 , du secteur angulaire $\widehat{ABD}$ à l'intérieur de $\mathcal{C}_A$.
- 4 En déduire l'aire exacte du domaine coloré, puis en donner une valeur approchée au dixième.

13 Aire d'un triangle



20 min

Corrigé
p. 146

Lycée Raspail, Paris

Soit ABC un triangle rectangle en A . Soit M un point de $[AB]$. La parallèle à (AC) passant par M coupe $[BC]$ en N ; la parallèle à (AB) passant par N coupe $[AC]$ en P . On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC .

- 1 Montrer que $APNM$ est un rectangle.
- 2 On pose $x = \frac{AM}{AB}$. Donner l'aire de PNC en fonction de x et $\mathcal{A}$.
- 3 Donner l'aire de MBN en fonction de x et $\mathcal{A}$.
- 4 Exprimer l'aire du rectangle $AMNP$ en fonction de x et $\mathcal{A}$.
- 5 Résoudre l'inéquation $2x(1-x) \geq \frac{1}{2}$ et montrer que l'aire du rectangle est maximum quand M est le milieu de $[AB]$.

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

14 Thalès et Pythagore



20 min

Corrigé
p. 148

Lycée Pasteur, Strasbourg

Les points A , B , C et D sont alignés, dans cet ordre, de sorte que $AB = BC = CD = 4$ cm. On note (C_1) , (C_2) , (C_3) les cercles de diamètres $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et O_1 , O_2 et O_3 leurs centres respectifs. Soit (C_4) le cercle de diamètre $[AO_3]$ et T un des points d'intersection des cercles (C_3) et (C_4) .

- 1 Faire une figure.
- 2 Prouver que la droite (AT) est tangente au cercle (C_3) .
- 3 La droite (AT) coupe le cercle (C_2) en P et Q . Soit I le milieu du segment $[PQ]$.
 - (a) Montrer que les droites (O_2I) et (AT) sont perpendiculaires.
 - (b) Calculer la longueur O_2I .
 - (c) En déduire la longueur PQ .

15 Théorème de Thalès



15 min

Corrigé
p. 149

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$. Une droite Δ parallèle à (AI) coupe (BC) , (CA) et (AB) , respectivement en A' , B' et C' . Montrer que :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB'}{AC'}.$$

16 Une formule avec des sinus



15 min

Corrigé
p. 151

Lycée Henri IV, Paris

Un triangle ABC est tel que la hauteur issue de A a une longueur qui est la somme des longueurs des deux autres hauteurs. Montrer :

$$\frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}.$$

17 Théorème de Thalès



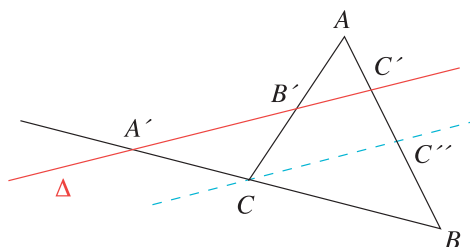
15 min

Corrigé
p. 151

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

On considère la figure ci-contre, où (CC'') et Δ sont parallèles. ABC est un triangle quelconque, et Δ est une transversale quelconque. Montrer que :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

18 Étude d'une configuration



15 min

Corrigé
p. 153

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

A, B, C sont trois points sur un cercle de centre O . D est le point diamétralement opposé à A sur le cercle. I est le milieu de $[BC]$ et $[AM]$, $[BN]$, $[CP]$ les trois hauteurs du triangle ABC . H est l'orthocentre de ABC et (AM) recoupe le cercle en H' .

- 1 Justifier que $\widehat{ABD}$, $\widehat{AH'D}$, $\widehat{ACD}$ sont trois angles droits.
- 2 Montrer que $BDC H$ est un parallélogramme et que I est le milieu de $[DH]$.
- 3 Montrer que M est le milieu de $[HH']$.

19 Jouer au géomètre



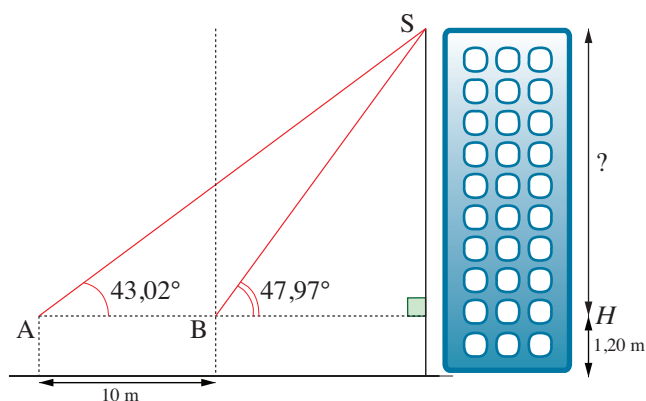
20 min

Corrigé
p. 153

Lycée Jacques Decour, Paris



Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.



Afin de mesurer la hauteur d'un bâtiment de sommet S , deux géomètres disposent leurs appareils de mesure en A et B . Les mesures qu'ils connaissent sont reportées sur le schéma ci-dessus.

Déterminer la hauteur du bâtiment (arrondie au mètre).

Indication : exprimer BH de deux façons différentes.

20 Théorème de Thalès



40 min

Corrigé
p. 154

Lycée Louis-le-Grand, Paris

$ABCD$ est un carré. $E \in (AB)$, $F \in (BC)$, $G \in (CD)$, $H \in (AD)$ tels qu'on ait (EG) perpendiculaire à (FH) .

- 1 Soit I , intersection de (EG) et (BC) , et J , celle de (FH) et (AB) . Montrer que (EF) et (IJ) sont perpendiculaires.
- 2 Comment choisir (EG) et (FH) pour que $EFGH$ soit un carré ?

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

1 QCM Projeté orthogonal

Énoncé
p. 133

- 1 Réponse **c**. F est le projeté orthogonal de G sur (EF) .
- 2 Réponse **c**. En effet, O est le milieu de $[BD]$, donc $OB = 5$ cm. De plus, la distance entre O et $[AB]$ est la longueur OI , où I est le milieu de $[AB]$. OIB est un triangle rectangle en I donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$OI^2 = OB^2 - IB^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9.$$
 soit $OI = \sqrt{9} = 3$.
- 3 Réponse **b**. En effet, si ABC est isocèle en B alors la médiane issue de B est aussi la hauteur issue de B . Si I est le milieu de $[AC]$ (BI) est donc perpendiculaire à (AC) et donc, par définition, I est le projeté orthogonal de B sur $[AC]$.

2 V/F Propriétés du triangle

Énoncé
p. 133

- a Faux. C'est l'intersection des médianes (droites qui lient un sommet et le milieu du côté opposé).
- b Vrai. Une hauteur passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé.
- c Faux. N'importe quel segment est le diamètre d'un cercle (et d'un seul). Cependant, si le troisième sommet se trouve sur ce cercle, alors le triangle est rectangle.

3 V/F Propriétés du cercle

Énoncé
p. 133

- a Faux. Si A et B sont sur un même cercle de centre O , alors $OA = OB$ donc OAB est isocèle, mais il existe des configurations où $AB \neq OA$, auquel cas OAB n'est pas équilatéral.
- b Vrai. Si A et B sont diamétralement opposés alors $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$. Les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et B sont perpendiculaires respectivement à $[OA]$ et $[OB]$, donc au diamètre $[AB]$. Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles entre elles, donc les tangentes sont bien parallèles.

4 Nature d'un triangle

Énoncé
p. 133

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Calculons :

- $IJ^2 = (3 + 2\sqrt{5})^2 = 9 + 12\sqrt{5} + 20 = 29 + 12\sqrt{5}$.
- $JK^2 = (\sqrt{78})^2 = 78$.
- $IK^2 = (3\sqrt{5} - 2)^2 = 45 - 12\sqrt{5} + 4 = 49 - 12\sqrt{5}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On peut alors remarquer que $IJ^2 + IK^2 = JK^2$. Le triangle est donc rectangle (en I). De plus, il n'est pas isocèle ni équilatéral car les trois côtés ont des mesures différentes.

5 Trouver un sinus et un angle

Énoncé
p. 134

Lycée Pierre Caraminot, Egletons

1 D'après le cours,

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 &\iff \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \\ &\iff \frac{5}{9} + \sin^2 \alpha = 1 \\ &\iff \sin^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \\ &\iff \sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{9}} \\ &\iff \sin \alpha = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

2 À la calculatrice, on trouve :

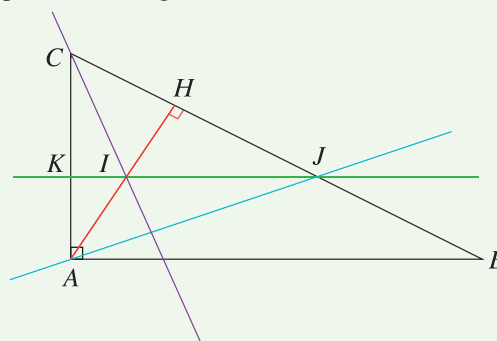
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 42^\circ.$$

6 Démontrer la perpendicularité

Énoncé
p. 134

Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

Commençons par faire une figure :



On considère le triangle AJC ; (AH) en est la hauteur issue de A .

Comme (JK) et (AB) sont parallèles et que (AB) et (AC) sont perpendiculaires, on en déduit que (JK) et (AC) sont perpendiculaires. (JK) est donc une hauteur de AJC .

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

Finalement, I étant l'intersection des deux hauteurs (JK) et (AH) , I est donc l'orthocentre du triangle AJC . En particulier, (CI) est une hauteur donc (CI) et (AJ) sont perpendiculaires.

7 Dans l'espace

Énoncé
p. 134

Lycée Pierre Caraminot, Egletons

- 1 Le triangle ABS est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BS^2 &= AB^2 + AS^2 \\ \Leftrightarrow 10^2 &= (7,5)^2 + AS^2 \\ \Leftrightarrow AS^2 &= 100 - 56,25 \\ \Leftrightarrow AS &= \sqrt{43,75} \\ \Leftrightarrow AS &\approx 6,6 \text{ cm.} \end{aligned}$$

ATTENTION

Les longueurs sont données en centimètres donc arrondir au millimètre signifie qu'il faut prendre le résultat arrondi au dixième.

- 2 Dans le triangle ABC , rectangle en A ,

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{7,5}$$

d'où :

$$\widehat{ABC} = \arctan\left(\frac{4}{7,5}\right) \approx 28^\circ.$$

- 3 I est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc le triangle AIB est rectangle en I . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sin \widehat{ABC} &= \frac{AI}{AB} \Leftrightarrow AI = AB \times \sin \widehat{ABC} \\ \Leftrightarrow AI &\approx 7,5 \times \sin(28^\circ) \\ \Leftrightarrow AI &\approx 3,5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

MÉTHODE

Bien que l'on soit dans un contexte de géométrie dans l'espace, les concepts de géométrie du plan peuvent être utilisés. Pour cela, il suffit de se placer dans le plan qui nous convient le mieux autant de fois que nécessaire.

COURS

INTERROS

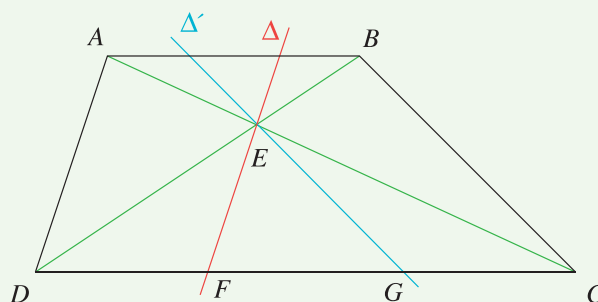
CORRIGÉS

8 Théorème de Thalès

Lycée Kléber, Strasbourg

Énoncé
p. 135

1



2 Les triangles ACD et EFC sont en configuration de Thalès, donc :

$$\frac{DF}{DC} = \frac{AE}{AC}, \text{ d'où } \frac{ED}{BE} = \frac{EC}{AE} \text{ (en inversant).}$$

En fait, l'énoncé classique du théorème donne seulement l'égalité :

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{AC}.$$

Mais :

$$\frac{DF}{DC} = \frac{DC - FC}{CD} = 1 - \frac{FC}{CD}$$

et

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AC - EC}{AC} = 1 - \frac{EC}{AC}.$$

On a donc bien :

$$\frac{DF}{DC} = \frac{AE}{AC}.$$

Les triangles CDE et ABE sont en configuration de Thalès, donc :

$$\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{EC}.$$

Or :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AE + EC}{AE} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

et :

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BE + ED}{BE} = 1 + \frac{ED}{BE}.$$

On en déduit :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BE}$$

et en inversant :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BD}.$$

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

Enfin, les triangles DGE et DCB étant en configuration de Thalès, il vient comme ci-dessus :

$$\frac{BE}{BD} = \frac{CG}{CD}.$$

En rassemblant nos résultats, il vient :

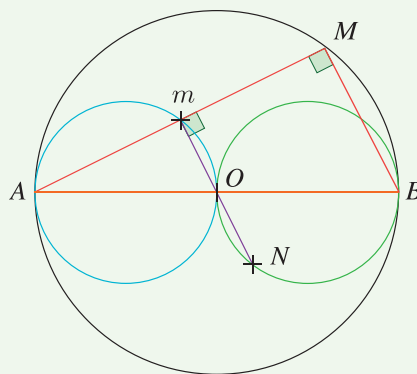
$$\frac{DF}{CD} = \frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BD} = \frac{CG}{CD}$$

et donc $GC = DF$.

9 À l'intérieur d'un cercle

Lycée Français, Bruxelles

Énoncé
p. 135



- 1** Pour montrer que m appartient au cercle de diamètre $[AO]$, il suffit de montrer que AOm est rectangle en m .

Dans le triangle AMB , O est le milieu de $[AB]$ et m est le milieu de $[AM]$, donc la droite (Om) est parallèle à (MB) (théorème de Thalès).

Or M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, donc AMB est rectangle en M .

On a $(Om) \parallel (MB)$ et $(MB) \perp (AM)$ donc $(Om) \perp (AM)$, ce qui montre que AOm est bien rectangle en m , et donc m est sur le cercle de diamètre $[AO]$.

- 2** Comme O est le milieu de $[AB]$, les cercles de diamètre $[OA]$ et $[OB]$ sont symétriques par rapport à O . Or N est le symétrique de m par rapport à O , donc N appartient au cercle de diamètre $[OB]$.

10 Avec deux cercles

Lycée Louis-le-Grand, Paris

Énoncé
p. 135

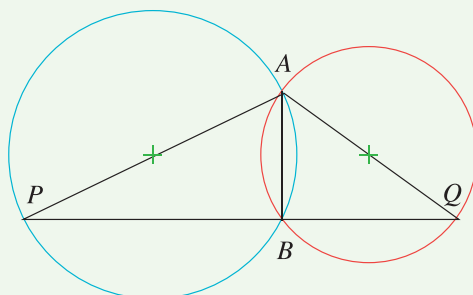
B appartenant au cercle de diamètre $[AP]$, le triangle ABP est rectangle en B , donc $(BP) \perp (AB)$. B appartenant au cercle de diamètre $[AQ]$, ABQ est rectangle en B , donc $(BQ) \perp (AB)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On en déduit que (BP) et (BQ) sont parallèles, donc confondues, puisqu'elles contiennent toutes les deux le point B .



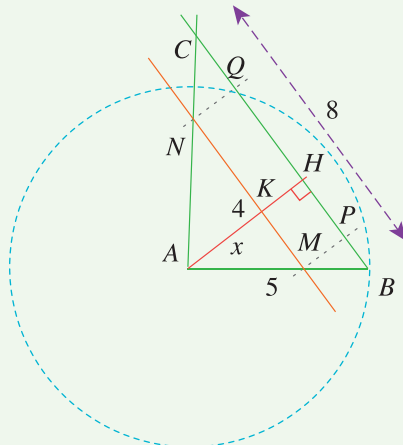
Conclusion : B , P et Q sont alignés.

11 Aire de rectangles

Lycée Chateaubriand, Rennes

Énoncé
p. 135

Pour construire le triangle, on commence par tracer le segment $[AH]$ puis la perpendiculaire à (AH) en H . On place le point B à l'une des intersections de cette droite et du cercle de centre A et de rayon 5. Il n'y a plus qu'à placer le point C , sur la perpendiculaire à (AH) , et à huit unités de B .



- 1 Calculons en fonction de x les longueurs MN et MP . Il est clair que $MP = KH = 4 - x$. Appliquons le théorème de Pythagore dans ABH . On en tire : $BH = 3$, donc $HC = 5$. En appliquant le théorème de Thalès comme en troisième, on montre sans difficulté :

$$\frac{MK}{BH} = \frac{AK}{AH} = \frac{KN}{HC}.$$

Il vient : $MK = \frac{3x}{4}$ et $KN = \frac{5x}{4}$, d'où $MN = 2x$.

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On calcule donc facilement l'aire du rectangle :

$$a(x) = MN \times MP = 2x(4 - x).$$

2 Il suffit d'écrire :

$$a(x) = -2(x^2 - 4x).$$

On reconnaît dans $x^2 - 4x$ le début d'un produit remarquable.

$$\begin{aligned} a(x) &= -2[x^2 - 4x + 4 - 4] \\ &= -2[(x - 2)^2 - 4] \\ &= 8 - 2(x - 2)^2. \end{aligned}$$

Cette dernière écriture fait apparaître que $a(x)$ est toujours inférieure à 8, avec égalité si $(x - 2)^2 = 0$, c'est-à-dire si $x = 2$. L'aire du rectangle atteint alors son maximum : $a(2) = 8$.

12 À la recherche d'une aire

Énoncé
p. 136

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

1 C et D sont sur $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ donc :

$$AD = AC = BD = BC.$$

Ainsi, $ACBD$ est un losange ; ses diagonales se coupent donc perpendiculairement en leur milieu E .

De plus, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon donc l'image de $\mathcal{C}_A$ par la symétrie de centre E est un cercle de centre le symétrique de A , donc B , et de rayon 3 cm ; c'est $\mathcal{C}_B$.

La figure, est donc le domaine coloré, est donc symétrique par rapport à E .

2 Le triangle ABD est équilatéral (car $AB = AD = BD$) donc son aire est :

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{AB \times ED}{2} = \frac{AB}{2} \times ED = \frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

Rappel : dans un triangle équilatéral de côté a , chaque hauteur mesure

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (on peut le démontrer à l'aide du théorème de Pythagore).}$$

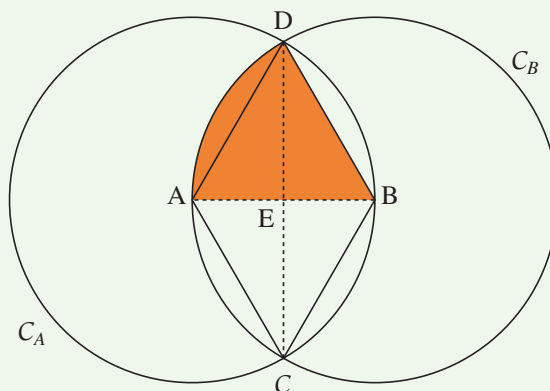
3 Le secteur angulaire $\widehat{ABD}$ à l'intérieur de $\mathcal{C}_A$ est le domaine coloré sur le schéma ci-dessous.

C'est une part du disque de centre B et de rayon 3 cm. Son angle est $\widehat{ABD} = 60^\circ$ car ABD est équilatéral. Pour déterminer son aire, nous allons utiliser le schéma suivant (proportionnalité) :

$$\begin{array}{l} \pi r^2 \longrightarrow 360^\circ \\ ? \longrightarrow 60^\circ \end{array}$$

60° est le sixième de 360° donc :

$$\mathcal{A}_{\widehat{ABD}} = \frac{1}{6} \times \pi \times 3^2 = \frac{3\pi}{2} \text{ cm}^2.$$



4 Notons $\mathcal{A}$ l'aire cherchée. Pour des raisons de symétrie, on a :

$$\begin{aligned} 4\mathcal{A}_{\widehat{ABD}} - 2\mathcal{A}_{ABD} &= 4 \times \frac{3\pi}{2} - 2 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} \\ &= 6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 \quad (\text{valeur exacte}) \\ &\approx 11,1 \text{ cm}^2 \quad (\text{valeur approchée au dixième}). \end{aligned}$$

13 Aire d'un triangle

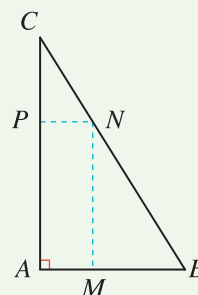
Énoncé
p. 136

Lycée Raspail, Paris

- 1 $\begin{cases} (AP) \parallel (MN) & \text{car } (AP) = (AC) \text{ et } (AC) \parallel (MN) \\ (PN) \parallel (AM) & \text{car } (AM) = (AB) \text{ et } (PN) \parallel (AB) \end{cases}$

donc $APNM$ est un parallélogramme.

De plus, il y a un angle droit en A,
donc $APNM$ est un rectangle.



- 2 Comme $(NP) \parallel (AB)$, le théorème de Thalès donne, dans le triangle ABC :

$$\frac{CP}{CA} = \frac{PN}{AB} \quad \text{soit} \quad \frac{CP}{CA} = \frac{AM}{AB} = x \text{ car } PN = AM.$$

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

Donc $CP = x \times CA$ et $AM = x \times AB$. CPN est rectangle en P , donc :

$$\begin{aligned}\text{Aire}(PNC) &= \frac{1}{2} CP \times PN \\ &= \frac{1}{2} CP \times AM \\ &= \frac{1}{2} \times x \times CA \times x \times AB \\ &= x^2 \times \mathcal{A} \text{ car } \mathcal{A} = \frac{1}{2} CA \times AB.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 \quad BM &= AB - AM \quad \text{et} \quad MN = AP \\ &= (1-x)AB \quad \quad \quad = AC - CP \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad = (1-x)AC.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\text{Aire}(BNM) &= \frac{1}{2} BM \times MN = \frac{1}{2} (1-x)AB \times (1-x)AC \\ &= (1-x)^2 \times \frac{1}{2} AB \times AC \\ &= (1-x)^2 \times \mathcal{A}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4 \quad \text{Aire}(AMNP) &= \mathcal{A} - \text{Aire}(CPN) - \text{Aire}(BNM) \\ &= \mathcal{A} - x^2 \mathcal{A} - (1-x)^2 \mathcal{A} \\ &= (1-x^2 - (1-x)^2) \mathcal{A} \\ &= (1-x^2 - 1 + 2x - x^2) \mathcal{A} \\ &= 2x(1-x) \mathcal{A}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5 \quad 2x(1-x) &\geq \frac{1}{2} \iff x(1-x) \geq \frac{1}{4} \\ &\iff x - x^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \\ &\iff -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \\ &\iff x - \frac{1}{2} = 0 \text{ (car un carré ne peut être négatif)} \\ &\iff x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

L'aire du rectangle est maximale quand $x = \frac{1}{2}$, donc quand M est le milieu de $[AB]$.

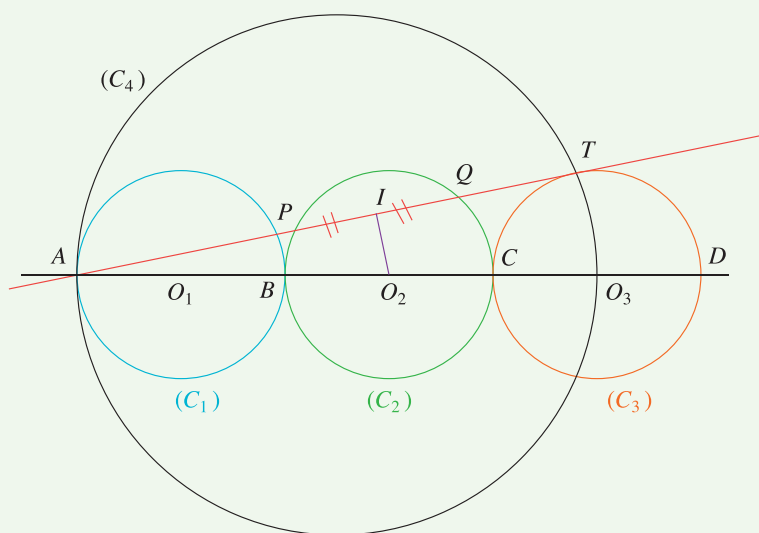
COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ **Énoncé**
p. 137

1



- $$\frac{O_2 I}{O_3 T} = \frac{AO_2}{AO_3}.$$

$$O_2I = O_3T \times \frac{AO_2}{AO_3} = 2 \times \frac{6}{10} = 1,2 \text{ cm.}$$

- $$IP^2 = O_2P^2 - O_2I^2 = 2^2 - 1,2^2 = 2,56 = 1,6^2$$

D'où $IP = 1,6$ et $PQ = 2IP = 3,2$ cm.

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

15 Théorème de Thalès

Énoncé
p. 137

Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Telle quelle, l'égalité est assez difficile à comprendre, mais on peut la transformer en :

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{AB'}{AC}.$$

Ce qui fait apparaître des rapports de longueurs entre des points *alignés*. Il suffit d'appliquer correctement le théorème de Thalès.

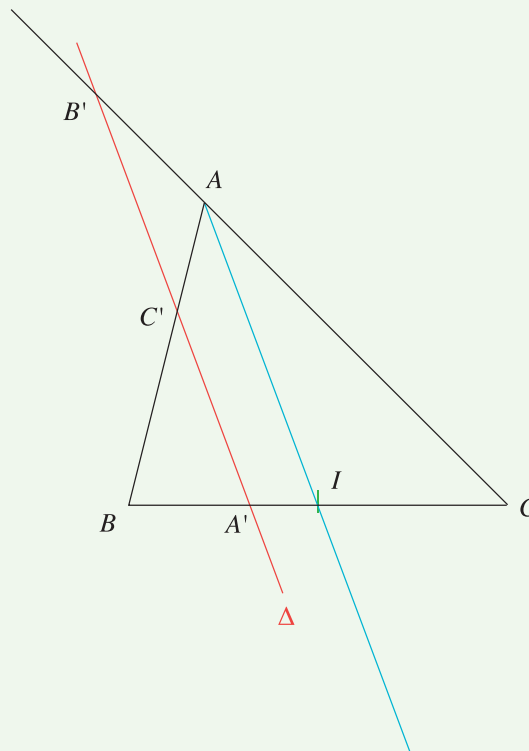
En considérant les triangles AIC et $B'CA'$, en configuration de Thalès, où $(AI) \parallel (B'A')$:

$$\frac{CA}{CB'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{AI}{B'A'}.$$

Comme les points C , A et B' sont alignés dans cet ordre, on a :

$$CB' = CA + AB'$$

$$\text{De même, } CA' = CI + IA'$$



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\frac{CA}{CB'} = \frac{CI}{CA'}$$

$$\frac{CB'}{CA} = \frac{CA'}{CI} \text{ (en inversant les quotients)}$$

$$\frac{CA + AB'}{CA} = \frac{CI + IA'}{CI}$$

$$1 + \frac{AB'}{CA} = 1 + \frac{IA'}{CI}$$

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{IA'}{IC}. \quad (1)$$

I est le milieu de $[BC]$, donc $IC = BI$, d'où :

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{IA'}{BI}.$$

Les triangles $BC'A'$ et BAI sont également en configuration de Thalès, où $(C'A') \parallel (AI)$, donc :

$$\frac{BA'}{BI} = \frac{BC'}{BA} = \frac{A'C'}{IA}.$$

Comme les points B , A' et I sont alignés dans cet ordre, on a :

$$BI = BA' + A'I$$

$$\text{De même, } BA = BC' + C'A.$$

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\frac{BA'}{BI} = \frac{BC'}{BA}$$

$$\frac{BA' + A'I - A'I}{BA' + A'I} = \frac{BC' + C'A - C'A}{BC' + C'A}$$

$$1 - \frac{A'I}{BA' + A'I} = 1 - \frac{C'A}{BC' + C'A}$$

$$1 - \frac{A'I}{BI} = 1 - \frac{C'A}{BA}$$

$$\frac{A'I}{BI} = \frac{C'A}{BA}. \quad (2)$$

Les égalités (1) et (2) entraînent :

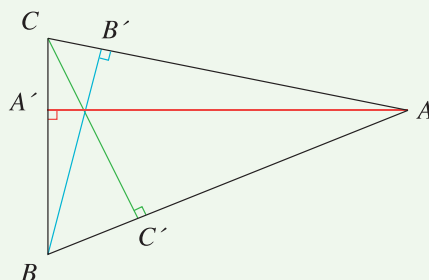
$$\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{AB}, \text{ et donc } \frac{AC}{AB} = \frac{AB'}{AC'}.$$

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4

16 Une formule avec des sinus

Énoncé
p. 137

Lycée Henri IV, Paris



Notons h_A la hauteur issue de A , h_C celle issue de C et h_B celle issue de B , et notons A' , B' et C' les pieds des hauteurs issues de A , B , et C .

En considérant le triangle ABA' , rectangle en A' , on constate :

$$\sin \widehat{B} = \frac{h_A}{AB}.$$

En considérant le triangle ACA' , rectangle en A' , on a :

$$\sin \widehat{C} = \frac{h_A}{AC}.$$

Dans le triangle ACC' , rectangle en C' , on a :

$$\sin \widehat{A} = \frac{h_C}{AC}.$$

Dans le triangle ABB' , rectangle en B' , on a :

$$\sin \widehat{A} = \frac{h_B}{AB}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \widehat{B}} + \frac{1}{\sin \widehat{C}} &= \frac{AB}{h_A} + \frac{AC}{h_A} \\ &= \frac{1}{h_A} \left(\frac{h_B}{\sin \widehat{A}} + \frac{h_C}{\sin \widehat{A}} \right) \\ &= \frac{1}{h_A \sin \widehat{A}} \times (h_B + h_C) \\ &= \frac{1}{h_A \sin \widehat{A}} \times h_A \\ &= \frac{1}{\sin \widehat{A}}. \end{aligned}$$

17 Théorème de Thalès

Énoncé
p. 137

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Il suffit d'appliquer correctement le théorème de Thalès à deux endroits de la figure.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On remarque que les triangles $A'BC'$ et CBC'' sont en configuration de Thalès, où $(CC'') \parallel (A'C')$, donc :

$$\frac{BC}{BA'} = \frac{BC''}{BC'} = \frac{CC''}{A'C'}.$$

Comme les points B , C et A' sont alignés dans cet ordre, on a :

$$BA' = BC + CA'.$$

$$\text{De même, } BC' = BC'' + C''C'.$$

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{BC}{BA'} &= \frac{BC''}{BC'} \\ \frac{BC + CA' - CA'}{BC + CA'} &= \frac{BC'' + C''C' - C''C'}{BC'' + C''C'} \\ 1 - \frac{CA'}{BA'} &= 1 - \frac{C''C'}{BC'} \\ \frac{CA'}{BA'} &= \frac{C''C'}{BC'} \\ \frac{BA'}{CA'} &= \frac{BC'}{C''C'} \quad (\text{en prenant les inverses}) \quad (1) \end{aligned}$$

De même, les triangles $AB'C'$ et ACC'' sont en configuration de Thalès, où $(B'C') \parallel (CC'')$, donc :

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{AC''} = \frac{B'C'}{CC''}.$$

Comme les points A , B' et C sont alignés dans cet ordre, on a :

$$AC = AB' + B'C.$$

$$\text{De même, } AC'' = AC' + C'C''.$$

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{AB'}{AC} &= \frac{AC'}{AC''} \\ \frac{AC}{AB'} &= \frac{AC''}{AC'} \quad (\text{en inversant les quotients}) \\ \frac{AB' + B'C}{AB'} &= \frac{AC' + C'C''}{AC'} \\ 1 + \frac{B'C}{AB'} &= 1 + \frac{C'C''}{AC'} \\ \frac{B'C}{AB'} &= \frac{C'C''}{AC'} \quad (2) \end{aligned}$$

Des égalités (1) et (2), on déduit :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = \frac{C'B}{C'C''} \times \frac{C'C''}{C'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Dans le triangle BHS rectangle en H :

$$\tan(47,97^\circ) = \frac{SH}{BH}$$

donc :

$$SH = BH \times \tan(47,97^\circ).$$

Ainsi,

$$AH \times \tan(43,02^\circ) = BH \times \tan(47,97^\circ).$$

De plus,

$$AH = 10 + BH$$

donc, l'égalité devient :

$$(10 + BH) \times \tan(43,02^\circ) = BH \times \tan(47,97^\circ)$$

ou encore :

$$10 \tan(43,02^\circ) = BH (\tan 47,97^\circ - \tan 43,02^\circ)$$

et donc :

$$BH = \frac{10 \tan 43,02^\circ}{\tan 47,97^\circ - \tan 43,02^\circ} \approx 52,94.$$

Pour connaître SH , on prend la deuxième égalité :

$$SH = BH \times \tan(47,97^\circ) \approx 58,73.$$

Ainsi, la hauteur du bâtiment est :

$$58,7 + 1,2 \approx 60\text{m}.$$

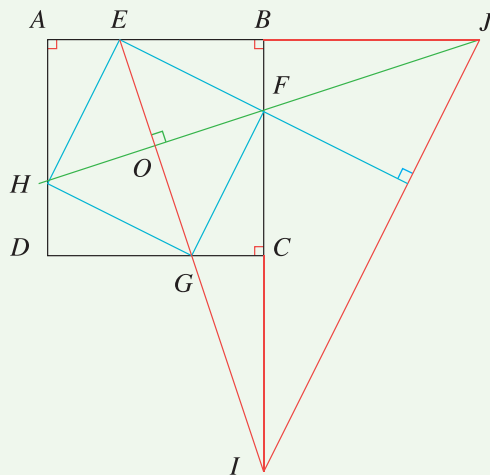
20 Théorème de Thalès

Énoncé
p. 138

Lycée Louis-le-Grand, Paris

- 1 Il faut considérer les hauteurs du triangle EIJ . (AB) et (BC) (donc (BI)) sont perpendiculaires, ce qui fait de (BI) une hauteur de EIJ . (EG) et (HF) sont perpendiculaires, donc $(EI) \perp (FJ)$ et (FJ) est une deuxième hauteur de EIJ . Sachant que (BI) et (FJ) se coupent en F , F est l'orthocentre de EIJ , et donc (EF) , hauteur, est perpendiculaire à (IJ) .
- 2 Notons K l'intersection des diagonales de $EFGH$. Si l'on suppose que $EFGH$ est un carré, K est le milieu de $[EG]$ et de $[FH]$. Montrons que K est le milieu de $[AC]$. En appelant S la symétrie de centre K , on constate que $S(H) = F$. L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle, donc l'image de (AD) , droite contenant H , est une droite parallèle qui passe par F , c'est-à-dire (BC) . De même, $S(E) = G$, et on montre que l'image de (AB) est (DC) . A est l'intersection de (AD) et (AB) , donc $S(A)$ est l'intersection de (BC) et (DC) . Il vient $S(A) = C$, donc K est le milieu de $[AC]$, et K est le centre du carré $ABCD$.

CONFIGURATIONS DU PLAN • CHAP. 4



Dans un deuxième temps, supposons que (EG) et (FH) se coupent au centre de $ABCD$, que nous notons O , et montrons que $EFGH$ est un carré.

Montrons que O est le milieu des diagonales de $EFGH$.

Les triangles AOH et OFC sont en configuration de Thalès, donc

$$\frac{OF}{OH} = \frac{OC}{OA} = 1.$$

Ce qui montre que $OF = OH$, donc O est le milieu de $[FH]$.

De même, O est le milieu de $[EG]$.

On sait désormais que $EFGH$ est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires. C'est donc un losange.

Pour prouver que c'est un carré, nous allons démontrer que ses diagonales ont même longueur.

Les triangles EBI et GCI sont en configuration de Thalès, où $(EB) \parallel (GC)$, donc :

$$\frac{IG}{IE} = \frac{IC}{IB} = \frac{GC}{EB}.$$

Comme les points I , G et E sont alignés dans cet ordre, on a :

$$IE = IG + GE.$$

$$\text{De même, } IB = IC + CB.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}\frac{IG}{IE} &= \frac{IC}{IB} \\ \frac{IG+GE-GE}{IG+GE} &= \frac{IC+CB-CB}{IC+CB} \\ 1 - \frac{GE}{IE} &= 1 - \frac{CB}{IB} \\ \frac{EG}{EI} &= \frac{BC}{BI}.\end{aligned}$$

De même, les triangles JAH et JBF sont en configuration de Thalès, où $(AH) \parallel (BF)$, donc, de la même façon que précédemment, on montre que :

$$\frac{HF}{HJ} = \frac{AB}{AJ}.$$

On en déduit les égalités :

$$EG = BC \times \frac{EI}{BI} \text{ et } HF = BA \times \frac{HJ}{AJ}.$$

En calculant l'aire du triangle EIJ de deux façons différentes, on obtient (entre autres) l'égalité :

$$OJ \times EI = BI \times EJ$$

et donc

$$\frac{EI}{BI} = \frac{EJ}{OJ}.$$

Il vient :

$$EG = BC \times \frac{EJ}{OJ}.$$

Observons le triangle EOJ rectangle en O .

On peut écrire $\cos \widehat{EJO} = \frac{OJ}{EJ}$.

Dans le triangle AHJ , rectangle en A , on peut écrire $\cos \widehat{AJH} = \frac{AJ}{JH}$.

$\widehat{EJO} = \widehat{AJH}$, donc $\frac{OJ}{EJ} = \frac{AJ}{JH}$ et :

$$\frac{EJ}{OJ} = \frac{JH}{AJ}.$$

En utilisant que $BC = AB$, on écrit :

$$EG = BC \times \frac{JH}{AJ} = AB \times \frac{JH}{AJ} = HF.$$

Le quadrilatère $EFGH$ est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, se coupent en leur milieu, et ont même longueur, c'est donc un carré.

Chapitre

5

Généralités sur les fonctions

Plan du chapitre

1. Rappels de collège
2. Variations
3. Parité d'une fonction

Exercice type

Lycée Jean Monnet, Franconville

Soit $f : x \mapsto \frac{1+x^2}{x}$.

- 1 Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
- 2 Quelle est l'image de -3 ? Quel sont les antécédents de 2 ?
- 3 Montrer que f est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$ et strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$. En déduire le tableau des variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
- 4 Représenter le graphe de f dans un repère orthonormal (O, I, J) .
- 5 Déterminer graphiquement les solutions de $f(x) = 4$.

Voir corrigé page 164

1 Rappels de collège

1.1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Définition 1

On considère un ensemble $\mathcal{D}$ inclus dans $\mathbb{R}$.

Une *fonction* définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un objet mathématique qui, à tout nombre x de $\mathcal{D}$, associe un unique réel, noté $f(x)$.

- $f(x)$ est l'image de x par f .
- $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f .

On note : $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

Exemples

- La fonction qui, à un nombre, associe son carré est la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x^2$$

Cela signifie notamment que « pour tout x réel, $f(x) = x^2$ ».

- Si x représente la longueur d'un côté d'un carré alors le périmètre de ce carré est donné par la fonction $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ car le périmètre d'un carré est obtenu en

$$x \mapsto 4x$$

multipliant par 4 la longueur d'un côté.

Remarque : dans certains énoncés, on donne une expression littérale et on demande de déterminer le domaine de définition d'une fonction.

Dans ce cas, on cherche les valeurs pour lesquelles les images seraient calculées à l'aide de l'expression littérale.

Il s'agit de trouver le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ pour lequel les nombres sont « calculables » à l'aide de l'expression.

Exemple : le nombre $\frac{1}{x-2}$ est défini pour tout nombre x différent de 2.

En effet, si $x = 2$, le dénominateur de l'écriture fractionnaire est égal à 0, ce qui n'est pas possible.

Si l'on demande de « déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{1}{x-2}$ », le domaine de définition sera alors $\mathbb{R} - \{2\}$; c'est l'ensemble qui contient tous les nombres réels ($\mathbb{R}$), sauf le réel 2.

On peut aussi noter : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (on lit alors « $\mathbb{R}$ privé du nombre 2 »).

Parfois, dans des exercices mettant en jeu des situations concrètes, on choisit le domaine de définition selon des connaissances de l'objet étudié. Par exemple, si la variable représente une longueur, le domaine de définition ne contient pas les réels négatifs. Dans certains cas, le domaine est imposé par l'énoncé. On peut ainsi considérer par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie seulement sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Le domaine de définition est souvent noté $\mathcal{D}$ (quand il n'y a qu'une seule fonction dans l'exercice) ou $\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g, \dots$ s'il y a plusieurs fonctions $f, g, \dots$ dans l'exercice.

1.2 Image et antécédent(s)

Si x est un réel, le réel $f(x)$ est son *image*. Le réel x est un *antécédent* de $f(x)$. Par exemple, si l'on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$, 4 est l'image de 2 car $2^2 = 4$, et -3 est un antécédent de 9 (car $(-3)^2 = 9$).

Remarquez bien le vocabulaire utilisé : « son » image, « un » antécédent. En effet, $f(x)$ peut avoir plusieurs antécédents (x , mais peut-être aussi d'autres réels). Cependant, l'image de x est unique, s'il en a une.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

1.3 Tableau de valeurs

Un *tableau de valeurs* est un tableau à deux lignes :

- sur la 1^{re} sont indiquées les valeurs des x dont on veut trouver l'image ;
- sur la 2^{de} sont reportées les images des x .

Exemple : on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -x^2 + 2$. Alors, le tableau suivant est un tableau de valeurs pour des valeurs entières de x comprises entre -3 et 3 :

Valeurs de x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Valeurs de $f(x)$	-7	-2	1	2	1	-2	-7

Explications : quand $x = -3$, pour trouver son image par la fonction f , on remplace x par -3 dans l'expression, ce qui donne :

$$f(-3) = -(-3)^2 + 2 = -9 + 2 = -7.$$

On fait de même pour les autres valeurs de x .

1.4 Courbe représentative d'une fonction

Définition 2

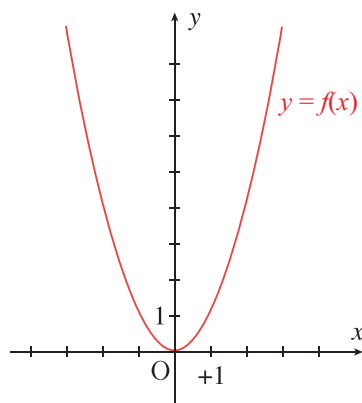
La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble de tous les points qui ont pour coordonnées $(x ; f(x))$ quand x appartient au domaine de définition de f .

Ainsi, à partir d'un tableau de valeurs, on peut représenter *sommairement* une fonction.

Exemple : Voici un tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[-3 ; 3]$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Ce tableau permet de tracer la courbe ci-contre.



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Variations

2.1 Fonctions croissantes, décroissantes et constantes

Définition 3 : fonction croissante

Une fonction f est *croissante* sur un intervalle lorsque pour tout élément u et v de l'intervalle, si $u \leq v$, alors $f(u) \leq f(v)$.

Remarque : cela signifie que les nombres de l'intervalle sont rangés dans le même ordre que leurs images par la fonction f . Lorsque, dans la définition, on remplace les deux inégalités larges ($\leq$) par deux inégalités strictes ($<$), on définit ce qu'est une fonction *strictement* croissante.

Définition 4 : fonction décroissante

Une fonction f est *décroissante* sur un intervalle lorsque pour tout élément u et v de l'intervalle, si $u \leq v$, alors $f(u) \geq f(v)$.

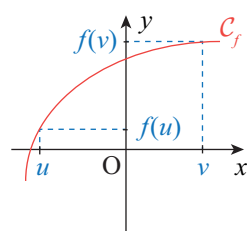
Remarque : lorsque, dans la définition, on remplace les deux inégalités larges par deux inégalités strictes, on définit ce qu'est une fonction *strictement* décroissante.

Définition 5 : fonction constante

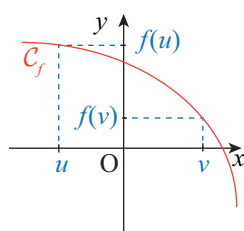
Une fonction est *constante* sur un intervalle lorsqu'il existe un réel a tel que pour tout x de l'intervalle, $f(x) = a$.

Autrement dit, une fonction constante prend toujours la même valeur.

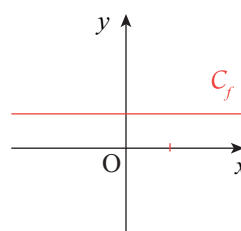
Remarque : une fonction est constante si et seulement si elle est à la fois croissante et décroissante.



Fonction croissante



Fonction décroissante

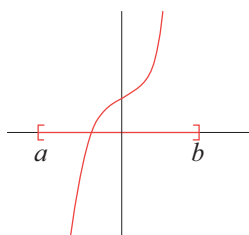


Fonction constante

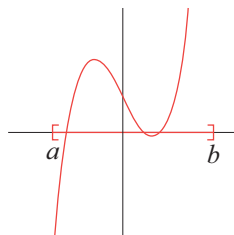
GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

Définition 6 : fonction monotone

Une fonction qui est soit croissante, soit décroissante sur un intervalle est appelée une fonction *monotone*.



Fonction monotone sur $[a; b]$



Fonction non monotone sur $[a; b]$

ATTENTION

Il ne suffit pas de prendre deux points au hasard dans l'intervalle et de les comparer. Par exemple, pour $f : x \mapsto x^2 - 5x$, il ne s'agit pas de calculer $f(2)$ et $f(4)$, puis de voir lequel des deux est le plus grand. Il s'agit de déterminer le signe de l'expression $f(v) - f(u)$ en supposant que $v > u$.

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 - 5x$.

Soient u et v deux nombres appartenant à $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ tels que $u < v$. Alors :

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &= (v^2 - 5v) - (u^2 - 5u) \\ &= v^2 - 5v - u^2 + 5u \\ &= v^2 - u^2 - 5v + 5u \\ &= (v - u)(v + u) - 5(v - u) \\ &= (v - u)(v + u - 5). \end{aligned}$$

Comme $-1 \leq u < v \leq \frac{5}{2}$, on voit que $v - u > 0$ et $v + u - 5 < 0$.

On en déduit que $f(v) - f(u) < 0$, et que f est décroissante sur l'intervalle $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$. On a prouvé une inégalité *stricte* entre $f(v)$ et $f(u)$, donc on peut ajouter que f est *strictement* décroissante sur $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$.

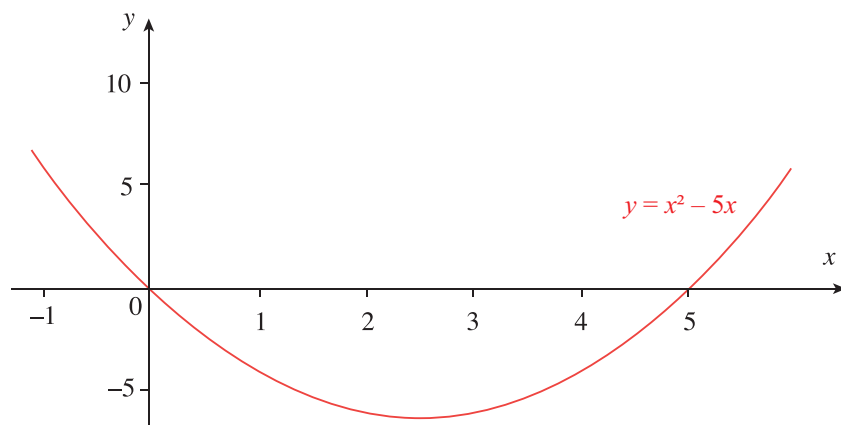
Maintenant, si on prend u et v sur $\left[\frac{5}{2}; 6\right]$, toujours avec $u < v$, alors $v + u - 5 > 0$ donc $f(v) - f(u) > 0$, ce qui signifie que f est *strictement* croissante sur $\left[\frac{5}{2}; 6\right]$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On peut représenter graphiquement la fonction f comme sur le graphique suivant.



2.2 Maximum et minimum d'une fonction

Définitions 7

Le *maximum* d'une fonction f sur son domaine de définition est la valeur la plus haute atteinte par la fonction.

Le *minimum* est la plus basse.

Exemple : reprenons la fonction $f : x \mapsto x^2 - 5x$ dont on a trouvé les variations dans le paragraphe précédent.

Elle est décroissante sur $\left[-1 ; \frac{5}{2}\right]$ puis croissante sur $\left[\frac{5}{2} ; 6\right]$ donc l'image de $\frac{5}{2}$ est le minimum : c'est la plus petite valeur atteinte par $f(x)$ sur $[-1 ; 6]$.

$f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4}$ donc $-\frac{25}{4}$ est le minimum de f sur $[-1 ; 6]$.

Pour avoir la valeur du maximum, il suffit de calculer $f(-1)$ et $f(6)$:

$$f(-1) = (-1)^2 - 5 \times (-1) = 6 \quad \text{et} \quad f(6) = 6^2 - 5 \times 6 = 6$$

donc « 6 » est le maximum de f sur l'intervalle $[-1 ; 6]$.

Remarque : une fonction n'a pas nécessairement de maximum ou de minimum. Par exemple, la fonction $x \mapsto x$, définie sur $\mathbb{R}$, n'admet aucune plus grande valeur ni aucune plus petite.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

3 Parité d'une fonction

Définition 8 : fonction paire

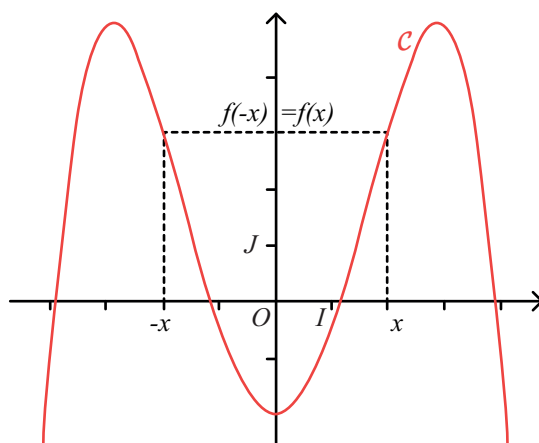
Soit f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathcal{D}$. On dit que f est paire si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$ (on dit alors que $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0) ;
- $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$.

Propriété 1 : conséquence graphique

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Si f est paire alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition 9 : fonction impaire

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathcal{D}$. On dit que f est impaire si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0) ;
- $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$.

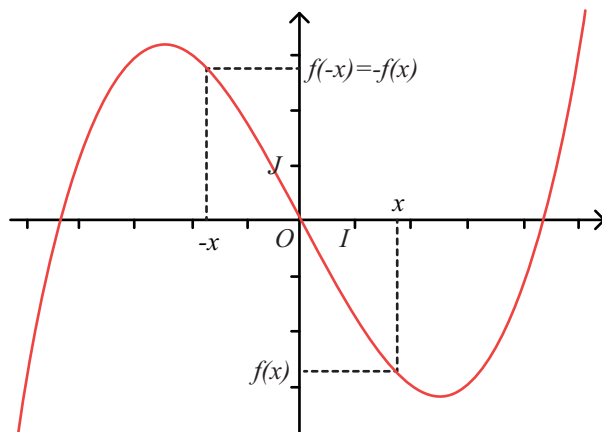
Propriété 2 : conséquence graphique

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Si f est impaire alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



➡ Solution de l'exercice type

Lycée Jean Monnet, Franconville

- 1** Le dénominateur de la fraction ne doit pas s'annuler, donc x ne doit pas être égal à zéro.

L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Remarque : l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est aussi noté : $\mathbb{R} - \{0\}$ et $\mathbb{R}^*$.

2 $f(-3) = \frac{1+9}{-3} = -\frac{10}{3}$.

Pour trouver le ou les antécédents de 2, il suffit de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{1+x^2}{x} = 2 &\iff 1+x^2 = 2x, x \neq 0 \\ &\iff 1-2x+x^2 = 0, x \neq 0 \\ &\iff (1-x)^2 = 0, x \neq 0 \\ &\iff x = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, 2 a pour antécédent le nombre 1.

- 3** Prenons deux réels a et b , strictement positifs et supposons que $a < b$. Calculons :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1+b^2}{b} - \frac{1+a^2}{a} \\ &= \frac{a(1+b^2)}{ba} - \frac{b(1+a^2)}{ab} \\ &= \frac{a+ab^2-b-ba^2}{ab} \\ &= \frac{a-b-ba(a-b)}{ab} \\ &= (a-b) \frac{1-ba}{ab}. \end{aligned}$$

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Jean Monnet, Franconville

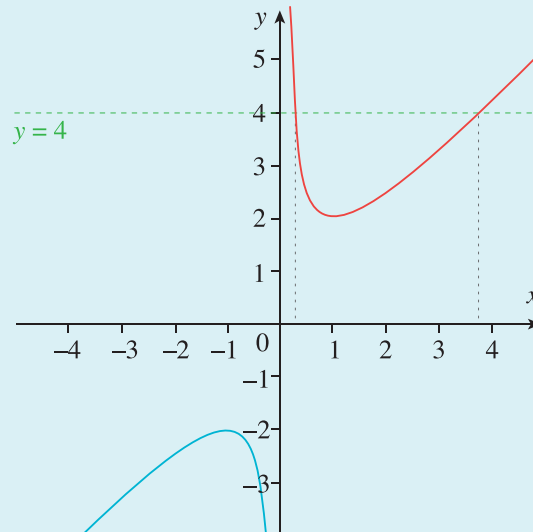
Si a et b sont tous deux dans $]0 ; 1[$, ba est plus petit que 1 et donc $f(b) - f(a)$ est strictement négatif. On en déduit que $f(b) < f(a)$, et que f est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$. D'un autre côté, si a et b sont tous deux supérieurs à 1, on a $a - b < 0$ et $1 < ab$ et donc $f(b) - f(a) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.

Par un raisonnement analogue, on pourrait montrer que f est décroissante sur $[-1 ; 0[$ et croissante sur $] - \infty ; -1]$.

On peut alors résumer ces constatations dans un tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

4 Représentation graphique :



- 5 Il suffit de tracer sur le graphique la droite horizontale qui passe par le point de coordonnées $(0 ; 4)$ et regarder l'abscisse des points d'intersection de cette droite avec la courbe. On obtient, en lisant sur le graphique, deux solutions : 0,25 et 3,75.

Voir énoncé page 157

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

1 V/F Image et antécédent

3 min

Corrigé
p. 175

Dans l'écriture $5 = f(2)$:

- ☐ a f est un nombre ☐ b $f(2)$ est un nombre
☐ c 5 est l'image de 2 par f ☐ d 2 est l'image de 5 par f

2 QCM Image et antécédent

3 min

Corrigé
p. 175

9 est antécédent de $\sqrt{2}$ par f s'écrit :

- ☐ a $f(9) = \sqrt{2}$ ☐ b $f(\sqrt{2}) = 9$
☐ c $f : \sqrt{2} \mapsto 9$

3 V/F Ensembles de définition

3 min

Corrigé
p. 175

D désignant l'ensemble de définition de f , quelles sont les propositions qui conviennent ?

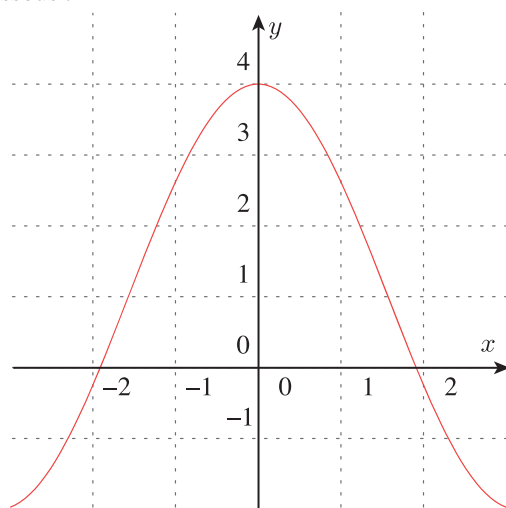
- ☐ a $f : x \mapsto 5x + 2$ $D = \mathbb{R}$
☐ b $f : x \mapsto \frac{1}{x-2}$ $D = \mathbb{R} - \{-2\}$
☐ c $f : x \mapsto (1+x^2)^2$ $D = \mathbb{R}_+$
☐ d $f : x \mapsto \frac{x-5}{x+2}$ $D = \mathbb{R} - \{-2; 5\}$

4 V/F Représentation graphique

5 min

Corrigé
p. 175

À la lecture du graphique, la fonction définie sur $[-3; 3]$ et représentée ci-dessous :



(courbe représentative
de la fonction f)

- ☐ a est décroissante
☐ b a pour maximum 4
☐ c a pour maximum 0

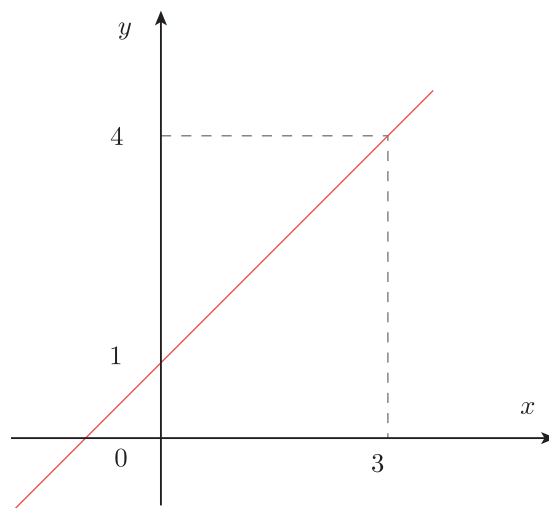
GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

5 V/F Représentation graphique

5 min

Corrigé
p. 175

À la lecture du graphique, la fonction représentée :



- ☐ a est croissante
- ☐ b est affine
- ☐ c est linéaire
- ☐ d est $x \mapsto x + 4$

6 V/F Calculs algébriques

5 min

Corrigé
p. 176

On considère $f : x \mapsto x^2 - x$ définie sur $[0 ; 4]$.

- ☐ a $f(0) = f(1)$.
- ☐ b Le point $M(2 ; 2)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f .
- ☐ c Le point $N(3 ; 9)$ est au-dessus de la courbe représentative de f .
- ☐ d Le point $P(5 ; 20)$ appartient à la courbe représentative de f .

Images et antécédents

7 Fonction $x^2 - 4$



10 min

Corrigé
p. 176

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

Soit f la fonction définie, pour tout réel x , par : $f(x) = x^2 - 4$.

- 1 Calculer l'image par la fonction f des réels 0, 1, -2.
- 2 Déterminer, lorsque c'est possible, le ou les antécédent(s) par f des réels 5, -7, -4.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

8 Fonction quotient



10 min

Corrigé
p. 176

Lycée Jean Puy, Roanne

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x-3}.$$

- 1 Déterminer le domaine de définition de f .
- 2 Trouver, si elles existent, les images de -1 et 2 par f .
- 3 Déterminer les éventuels antécédents de -3 et 1 .

9 Encore une fraction



20 min

Corrigé
p. 177

Lycée Saint-Louis, Saint-Nazaire

Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) = \frac{6}{9x^2 - 16}.$$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2 Calculer l'image de -1 .
- 3 Déterminer les antécédents éventuels de $\frac{1}{8}$.

Variations

10 Imaginer une courbe



10 min

Corrigé
p. 177

Lycée Albert Chatelet, Douai

Dans un repère $(O; I, J)$, en prenant comme unité le cm, dessiner une courbe possible représentative d'une fonction répondant aux indications suivantes :

- f est définie sur $[-3; 4[$;
- $f(-3) = 1$;
- f admet un maximum qui est 3 , atteint en -1 ;
- f est croissante sur $[-3; -1]$ et décroissante sur $[-1; 4[$;
- les réels -2 et 1 ont la même image qui est $2,5$;
- $f(3) = 0$.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

11 À partir de graphiques

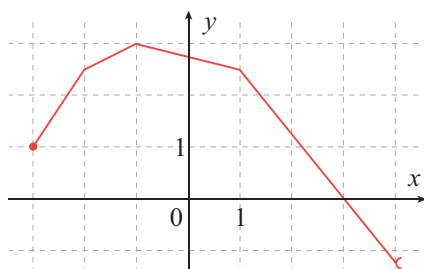


10 min

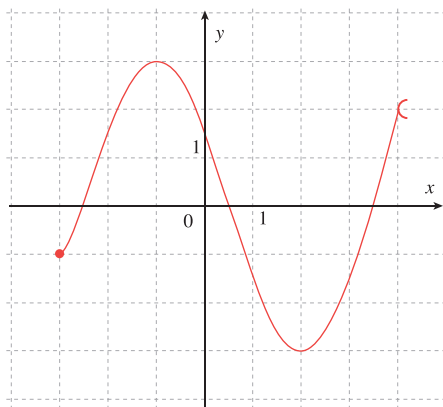
Corrigé
p. 178

Lycée Molière, Paris

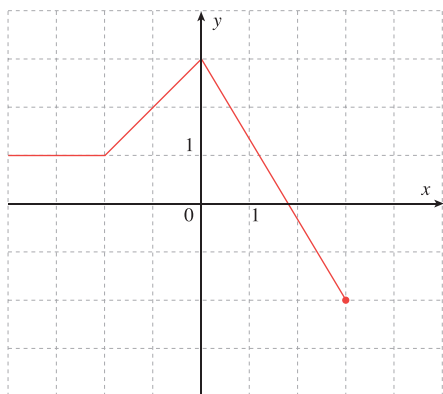
Examiner les courbes des fonctions f , g et h suivantes :



La fonction f



La fonction g



La fonction h

- 1 Proposer pour chaque fonction un ensemble de définition.
- 2 Donner le tableau de variations des fonctions f , g et h

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

12 Lectures graphiques

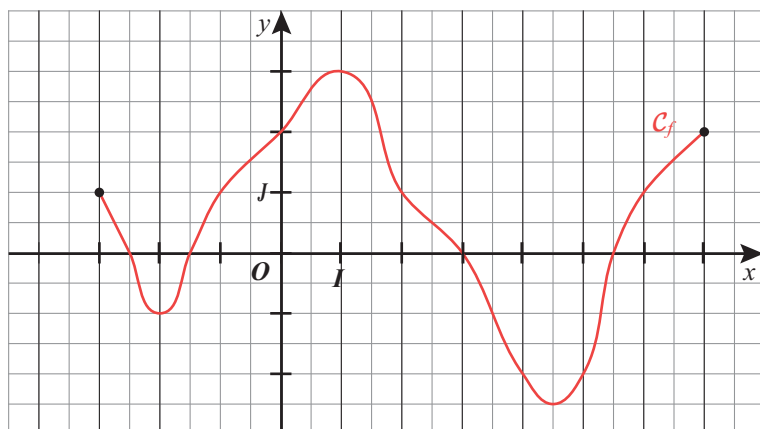


10 min

Corrigé
p. 178

Lycée Louis Vincent, Metz

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 7]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



- 1 Déterminer l'image de -3 par f .
- 2 Déterminer les éventuels antécédents de 4 par f .
- 3 Dresser le tableau de variations de f .
- 4 Quel est le maximum de f sur $[-3; 7]$? En quelle valeur est-il atteint?
- 5 Quel est le minimum de f sur $[-3; 7]$? En quelle valeur est-il atteint?
- 6 Dresser le tableau de signes de f .
- 7 Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ (en justifiant votre réponse).
- 8 Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 1$ (en justifiant votre réponse).

13 Généralités



10 min

Corrigé
p. 179

Lycée Louis Vincent, Metz

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal

- 1 Quel est l'ensemble de définition de f ? Justifier votre réponse.
- 2 Calculer l'image de 2 par f puis l'image de -1 par f .
- 3 Les points suivants sont-ils situés sur $\mathcal{C}$. Justifier votre réponse.

$$M\left(0; \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad N(15; 4,27) \quad ; \quad P\left(\frac{1}{3}; -\frac{9}{11}\right).$$

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

14 Lecture d'un tableau de variations



10 min

Corrigé
p. 180

Lycée Louis Vincent, Metz

Le tableau de variations d'une fonction f est donné ci-dessous.

x	-5	-2	0	3	5
f	-4		6		4
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		-5		0	

- Déterminer le maximum et le minimum de f ainsi que les valeurs pour lesquels ils sont atteints.
- Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$. Justifier votre réponse.
- Compléter par $<$, $>$ ou ? si on ne peut pas savoir en justifiant votre réponse :
 $f(1) \dots f(2)$ $f(-1) \dots f(-2)$ $f(-1) \dots f(4)$ $f(4) \dots f(-3)$

15 Résolution graphique

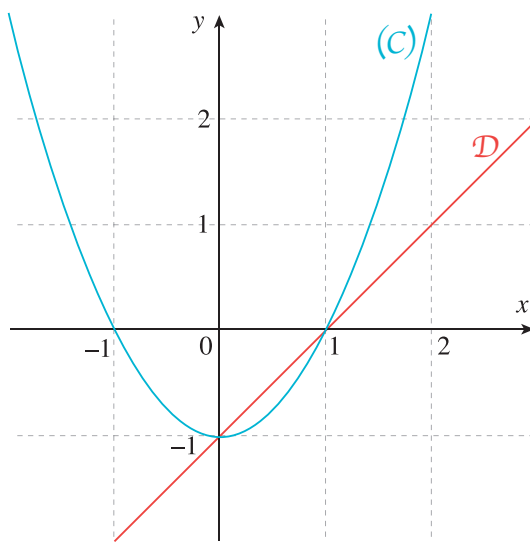


15 min

Corrigé
p. 180

Lycée Montaigne, Bordeaux

La courbe (C) est la courbe représentative dans le repère $(O; I, J)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 1$.



- Indiquer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x :
 (a) graphiquement ; (b) par le calcul.
- Quelle est la fonction affine g représentée par la droite D ?
- Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

16 Variations



15 min

Corrigé
p. 182

Lycée Talma, Brunoy

Étudier le sens de variation des fonctions suivantes, sur les intervalles I donnés :

1 $f(x) = \frac{-x+3}{x-5}$, $I =]-\infty ; 5[$.

2 $g(x) = (x-8)^2$, $I = [8 ; +\infty[$.

17 Trouver les variations



20 min

Corrigé
p. 183

Lycée Thiers, Marseille



Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f :]0 ; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Soit x_1 et x_2 tels que $0 < x_1 < x_2$.

- 1 Montrer que $f(x_1) - f(x_2)$ est du signe de $(1 - x_1x_2)$.
- 2 En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; 1]$ et sur $[1 ; +\infty[$.
- 3 Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
- 4 En déduire l'existence d'un extremum.

18 Un premier bilan

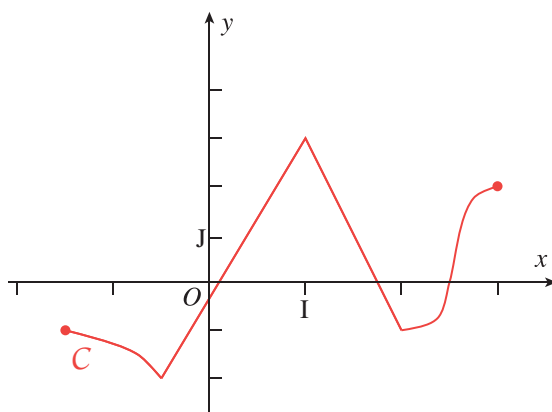


35 min

Corrigé
p. 183

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

La courbe $\mathcal{C}$ est représentative d'une fonction f dans le repère orthogonal $(O; I, J)$.



GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

- 1 Préciser le domaine de définition D_f de f .
- 2 Sachant qu'elles sont entières, donner les images par f des réels : $-\frac{1}{2}$; 1 ; 2 ; 2,5 et 3.
- 3 Quel est le nombre de solutions de :
 - l'équation $E_1 : f(x) = 0$?
 - l'équation $E_2 : f(x) = 2$?
 On les représentera sur la figure.
- 4 f est-elle bornée sur D_f ?
- 5 Sachant que la courbe de f sur $[-0,5 ; 2]$ est l'union de deux segments, exprimer $f(x)$ pour tout x de $[-0,5 ; 2]$.
- 6 Résoudre alors l'équation E_1 , puis l'équation E_2 .

19 Généralités



45 min

Corrigé
p. 185

Lycée Saint-Louis-de-Gonzague, Paris

On considère les fonctions f et g définies pour tout x réel par :

$$f(x) = (2x + 1)^2 - (-x + 3)^2$$

$$g(x) = x^2 - 16 - (2x + 8)(-2x + 1)$$

- 1 Développer et réduire $f(x)$.
- 2 Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
- 3 Déterminer les antécédents de -8 par f .
- 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) + g(x) = 0$.
- 5 On considère la fonction $h : x \mapsto g(x) - f(x)$ définie sur $[-4 ; 2]$.
Montrer que $h(x) = 2[(x + 1)^2 - 9]$.

Parité

20 Parité avec une valeur absolue



5 min

Corrigé
p. 186

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

- 1 Soit h la fonction définie par :

$$h : x \mapsto \frac{4 - |x|}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

Montrer que h est une fonction paire.

- 2 Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3}{x^3 + 4x}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

21 Paire et impaire



10 min

Corrigé
p. 187

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est paire ou impaire :

1 Pour $x \in [-5 ; 5]$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

2 Pour $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{3x}$

3 Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 + x + 1$

4 Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 2x$

22 Dédution



10 min

Corrigé
p. 187

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Soit f une fonction impaire sur $\mathcal{D}$. De plus, $0 \in \mathcal{D}$.

Démontrer que $f(0) = 0$.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

1 V/F Image et antécédent

→ Énoncé
p. 166

- a) *Faux.* f est une application.
- b) *Vrai.* C est l'image de 2 par l'application f .
- c) *Vrai.*
- d) *Faux.* 2 est un antécédent de 5 par f .

2 QCM Image et antécédent

→ Énoncé
p. 166

- a) *Vrai.* $\sqrt{2}$ est l'image de 9 par f .
- b) *Faux.* Cette écriture signifie que l'image de $\sqrt{2}$ par f est 9, c'est-à-dire qu'un antécédent de 9 par f est $\sqrt{2}$.
- c) *Faux.* Cette écriture avec $\mapsto$ s'emploie au moment où on *définit* la fonction f . Elle signifie que 9 est l'image de $\sqrt{2}$.

3 V/F Ensembles de définition

→ Énoncé
p. 166

- a) *Vrai.* Par exemple, une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- b) *Faux.* C'est la valeur 2, solution de $x - 2 = 0$, qu'il faut ôter de l'ensemble de définition : $D = \mathbb{R} - \{2\}$.
- c) *Vrai.* On peut calculer $f(x)$ pour n'importe quel x de $\mathbb{R}_+$. $D = \mathbb{R}$ convient également.
- d) *Vrai.* À cause du dénominateur $x + 2$, il faut enlever la valeur -2 de l'ensemble de définition. Mais 5 ne pose pas de problème : $f(5) = 0$. Un ensemble de définition est $\mathbb{R} - \{-2\}$. Mais $\mathbb{R} - \{-2; 5\}$ convient aussi.

4 V/F Représentation graphique

→ Énoncé
p. 166

- a) *Faux.* Elle est croissante sur $\mathbb{R}_-$, décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
- b) *Vrai.* Ce maximum est atteint en 0.
- c) *Faux.* Le maximum est atteint en 0, mais il vaut 4.

5 V/F Représentation graphique

→ Énoncé
p. 167

- a) *Vrai.* « La droite monte quand on va de gauche à droite ».
- b) *Vrai.* La fonction est représentée par une droite et ne passe pas par l'origine du repère.
- c) *Faux.* La droite ne passe pas par l'origine du repère.
- d) *Faux.* Si tel était le cas, la droite passerait par $y = 4$ sur l'axe des ordonnées, ce qui n'est pas le cas.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

6 V/F Calculs algébriques

Énoncé
p. 167

- a** Vrai. $f(0) = f(1) = 0$
b Faux. $f(2) = 4 - 2 = 2$, donc le point $M(2 ; 2)$ appartient bien à la courbe.
c Vrai. $f(3) = 6$, donc $9 > f(3)$, et $N(3 ; 9)$ est au-dessus de la courbe.
d Vrai. En effet, $f(5) = 25 - 5 = 20$.

7 Fonction $x^2 - 4$

Énoncé
p. 167

Lycée Fustel de Coulanges, Massy

- 1** Il faut remplacer x par sa valeur dans l'expression de f .
 • $f(0) = 0^2 - 4 = -4$;
 • $f(1) = 1^2 - 4 = 1 - 4 = -3$;
 • $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.
2 Nous devons, connaissant la valeur de $f(x)$, retrouver celle(s) de x :

$$f(x) = 5 \iff x^2 - 4 = 5 \iff x^2 = 4 + 5 \iff x^2 = 9$$

$$\iff x \in \{-3 ; 3\}.$$

Les antécédents de 5 par f sont donc -3 et 3 .

$$f(x) = -7 \iff x^2 - 4 = -7 \iff x^2 = -3$$

Cette dernière égalité est impossible, puisqu'un carré est toujours positif, -7 n'a donc pas d'antécédent par f .

$$f(x) = -4 \iff x^2 - 4 = -4 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

L'antécédent de -4 par f est donc 0 (et c'est le seul !).

8 Fonction quotient

Énoncé
p. 168

Lycée Jean Puy, Roanne

- 1** $f(x)$ est définie à condition que $x - 3$ soit différent de zéro. L'ensemble de définition est donc :

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}.$$

- 2** $f(-1) = \frac{-1}{-1-3} = \frac{1}{4}$ et $f(2) = \frac{2}{2-3} = -2$.

- 3** On résout l'équation $f(x) = -3$:

$$\begin{aligned} -3 &= \frac{x}{x-3} \iff -3(x-3) = x, x \neq 3 \\ &\iff -3x + 9 = x \\ &\iff 9 = 4x \\ &\iff x = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

$\frac{9}{4}$ est donc l'unique antécédent de -3 .

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

Calculons les antécédents de 1 :

$$\begin{aligned} 1 = f(x) &\iff 1 = \frac{x}{x-3} \\ &\iff x-3 = x \\ &\iff -3 = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours fausse. 1 n'a donc pas d'antécédent.

9 Encore une fraction

Énoncé
p. 168

Lycée Saint-Louis, Saint-Nazaire

1 $f(x)$ existe si $9x^2 - 16 \neq 0$. On résout :

$$9x^2 - 16 = 0 \iff (3x-4)(3x+4) = 0 \iff x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = -\frac{4}{3}$$

On conclut que l'ensemble de définition de f est :

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{-4}{3}; \frac{4}{3} \right\}.$$

2 On calcule : $f(-1) = \frac{6}{9-16} = \frac{-6}{7}$.

3 Pour calculer les antécédents de $\frac{1}{8}$ par f , on résout :

$$\begin{aligned} \frac{6}{9x^2-16} &= \frac{1}{8} \\ \iff 48 &= 9x^2 - 16 \\ \iff 64 &= 9x^2 \\ \iff x^2 &= \frac{64}{9} \\ \iff x &= \frac{8}{3} \text{ ou } x = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Les antécédents de $\frac{1}{8}$ sont donc $\frac{8}{3}$ et $-\frac{8}{3}$.

10 Imaginer une courbe

Énoncé
p. 168

Lycée Albert Chatelet, Douai

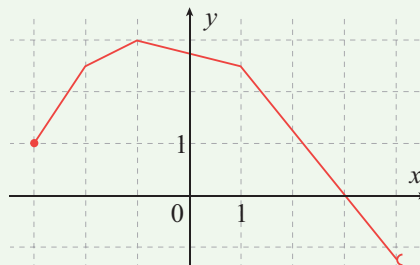
Il y a plusieurs réponses possibles, mais votre dessin doit ressembler à la figure page suivante ; n'oubliez pas notamment :

- le gros point en $(-3; 1)$ qui signale que l'ensemble de définition s'arrête en -3 et contient -3 ;
- le crochet à l'abscisse 4 qui signale que 4 est une extrémité (exclue) de l'ensemble de définition.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



11 À partir de graphiques

Énoncé
p. 169

Lycée Molière, Paris

- 1 (a) L'ensemble de définition est $[-3 ; 4[$. Le gros point à l'abscisse -3 et le crochet à l'abscisse $+4$ signalent que -3 est inclus alors que $+4$ est exclu de l'ensemble.
- (b) L'ensemble de définition est $[-3 ; 4[$, tout comme pour la première fonction.
- (c) L'ensemble de définition peut être ici : $[-4 ; 3]$, ne sachant pas l'allure de la courbe pour $x < -4$.

2 (a)

x	-3	-1	4
$f(x)$	1	3	

(b)

x	-3	-1	$+2$	$+4$
$g(x)$	-1	$+3$	-3	2

(c)

x	-4	-2	0	$+3$
$h(x)$		$+1$	3	-2

12 Lectures graphiques

Énoncé
p. 170

Lycée Louis Vincent, Metz

- 1 L'image de -3 par f est $f(-3) = 1$. En effet, le point de la courbe ayant pour abscisse -3 a pour ordonnée 1 .
- 2 La droite horizontale passant par $y = 4$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$; par conséquent, 4 n'a pas d'antécédent par f (il n'existe aucun point de la courbe dont l'ordonnée est égale à 4).

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

3 On a le tableau suivant :

x	-3	-2	1	4,5	7
f	1		3		2
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		-1		-2,5	

4 Le maximum de f sur $[-3; 7]$ est 3, atteint pour $x = 1$.

5 Le minimum de f sur $[-3; 7]$ est $-2,5$, atteint pour $x = 4,5$.

6 D'après le graphique, le tableau de signes de f est le suivant :

x	-3	-2,5	-1,5	3	5,5	7	
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	+

7 La courbe représentative de f admet 4 points d'ordonnée égale à 1. Donc l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 1$ est constitué de leur abscisse : $S = \{-3; -1; 2; 6\}$.

8 La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = 1$ entre $x = -1$ et $x = 2$, et entre $x = 6$ et $x = 7$. Ainsi, l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) > 1$ est : $S =]-1; 2[\cup]6; 7]$.

13 Généralités

Énoncé
p. 170

Lycée Louis Vincent, Metz

1 f est un quotient, dont le dénominateur s'annule uniquement pour $x = 4$.

Ainsi, le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

2 • $f(2) = \frac{3 \times 2 + 2}{2 - 4} = \frac{8}{-2} = -4$. • $f(-1) = \frac{-3 + 2}{-1 - 4} = \frac{1}{5}$.

L'image de 2 par f est -4 . L'image de -1 par f est $\frac{1}{5}$.

3 • $f(0) = \frac{3 \times 0 + 2}{0 - 4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \neq y_M$. Donc $M \notin \mathcal{C}_f$.

• $f(15) = \frac{3 \times 15 + 2}{15 - 4} = \frac{47}{11} \approx 4,2727 \dots \neq y_N$. Donc $N \notin \mathcal{C}_f$.

ATTENTION

Ce n'est pas parce que $\frac{47}{11}$ est presque égal à 4,27 que c'est *exactement* égal... Le point sera *proche* de $\mathcal{C}_f$, mais ne sera pas *sur* la courbe.

• $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3 \times \frac{1}{3} + 2}{\frac{1}{3} - 4} = \frac{3}{-\frac{11}{3}} = -\frac{9}{11} = y_P$. Donc $P \in \mathcal{C}_f$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

14 Lecture d'un tableau de variations

Énoncé
p. 171

Lycée Louis Vincent, Metz

- 1 Le maximum de f est 6, et il est atteint pour $x = 0$.
Le minimum de f est -5 , et il est atteint pour $x = -2$.
- 2
 - Sur $[-5; -2[$, $f(x)$ passe de -4 à -5 , donc ne passe pas par 4;
 - Sur $] -2; 0[$, $f(x)$ passe de -5 à 6, donc passe par 4;
 - Sur $]0; 3[$, $f(x)$ passe de 6 à 0, donc passe par 4;
 - Sur $]3; 5]$, $f(x)$ passe de 0 à 4, donc passe par 4 (à la fin);

Au final, $f(x)$ passe trois fois par 4; ainsi, l'équation $f(x) = 4$ admet trois solutions.
- 3
 - $1 < 2$ et f est strictement décroissante sur $[0; 3]$.
Donc $f(1) > f(2)$.
 - $-1 > -2$ et f est strictement croissante sur $[-2; 0]$.
Donc $f(-1) > f(-2)$.
 - On ne peut pas comparer $f(-1)$ et $f(4)$ car sur $[-1; 4]$, f n'est pas strictement monotone et les extrema locaux (6 et 0) ne permettent pas de conclure.
 - Bien que f ne soit pas strictement monotone sur $[-3; 4]$, on peut cette fois-ci comparer $f(4)$ et $f(-3)$ à l'aide des extrema locaux. En effet, $f(-3) \in [-5; -4]$, donc $f(-3) < 0$, et $f(4) \in [0; 4]$, donc $f(4) \geq 0$.
Ainsi, $f(4) > f(-3)$.

15 Résolution graphique

Énoncé
p. 171

Lycée Montaigne, Bordeaux

- 1 (a) On lit sur le graphique les abscisses des points qui sont au-dessus ($f(x) \geq 0$) ou au-dessous ($f(x) \leq 0$) de l'axe des abscisses. On résume dans un tableau :

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$		
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

- (b) Dans ce type d'inéquation, deux méthodes sont possibles.

- On peut factoriser $f(x) = (x - 1)(x + 1)$ puis utiliser un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

- On peut aussi remarquer que le signe de $f(x)$ dépend de la position de x^2 par rapport à 1, ce qui permet d'utiliser les variations de la fonction $x \mapsto x^2$:

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
x^2		1	0	1	

On lit dans le tableau : $x^2 \leq 1$ pour $x \in [-1 ; 1]$ et $x^2 \geq 1$ pour $x \in]-\infty ; -1]$ ou $x \in [1 ; +\infty[$. On retrouve ainsi les résultats précédents.

- 2** La fonction g est sous la forme $x \mapsto ax + b$. On lit sur le graphique : $g(0) = -1$ et $g(1) = 0$, d'où les équations :

$$\begin{cases} g(0) = b = -1 \\ g(1) = a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

g est donc la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x - 1.$$

- 3** Graphiquement, on constate que la parabole $(\mathcal{C})$ est au-dessous de la droite $\mathcal{D}$ pour les points dont les abscisses sont comprises entre 0 et 1. L'inégalité est large, il faut donc inclure les valeurs 0 et 1, d'où :

$$S = [0 ; 1].$$

Par le calcul :

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\iff x^2 - 1 \leq x - 1 \\ &\iff (x - 1)(x + 1) \leq (x - 1) \\ &\iff (x - 1)[(x + 1) - 1] \leq 0 \\ &\iff x(x - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

On utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$+1$	$+\infty$
x		-	+	+
$(x - 1)$		-	0	+
$x(x - 1)$		+	0	+

On constate que $x(x - 1) \leq 0$ pour $x \in [0 ; 1]$, ce qui confirme le résultat lu sur le graphique.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

16 Variations

Énoncé
p. 172

Lycée Talma, Brunoy

- 1 Prenons dans I deux réels x et x' tels que $x' > x$ et comparons $f(x')$ et $f(x)$. Pour rendre la comparaison plus commode, exprimons :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \frac{-x' + 3}{x' - 5} - \frac{-x + 3}{x - 5} \\ &= \frac{(-x' + 3)(x - 5) - (-x + 3)(x' - 5)}{(x' - 5)(x - 5)} \\ &= \frac{-x'x + 3x + 5x' - 15 - (-xx' + 5x + 3x' - 15)}{(x' - 5)(x - 5)} \\ &= \frac{-x'x + 3x + 5x' - 15 + xx' - 5x - 3x' + 15}{(x' - 5)(x - 5)} \\ &= \frac{-2x + 2x'}{(x' - 5)(x - 5)} \\ &= (x' - x) \frac{2}{(x' - 5)(x - 5)}. \end{aligned}$$

Comme $x' - x > 0$, $x' - 5 < 0$ et $x - 5 < 0$, on obtient :

$$f(x') - f(x) > 0, \text{ donc } f(x') > f(x).$$

On en déduit que f est strictement croissante sur I .

- 2 Prenons encore dans I deux réels, $x' > x$.

Cette fois, plutôt que calculer $f(x') - f(x)$, écrivons directement :

$$\begin{aligned} x' &> x \\ x' - 8 &> x - 8 \end{aligned}$$

et, ces deux réels étant positifs (car $x \geq 8$), on peut élever les deux membres au carré :

$$(x' - 8)^2 > (x - 8)^2$$

ce qui donne : $f(x') > f(x)$. On en déduit que f est strictement croissante sur I .

Remarque : ce type d'exercice n'est plus vraiment dans l'esprit du programme. Cependant, connaître cette méthode pour déterminer les variations d'une fonction peut être intéressant pour celles et ceux qui ont envie d'aller au-delà du programme.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

17 Trouver les variations

Énoncé
p. 172

Lycée Thiers, Marseille



- 1 Obéissons poliment aux injonctions de l'énoncé, et munissons-nous de x_1 et x_2 , tels que $0 < x_1 < x_2$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{1}{x_1} - x_2 + x_1 - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{1}{x_1} - \frac{x_2 x_1}{x_1} + \frac{x_1 x_2}{x_2} - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{1}{x_1} (1 - x_2 x_1) + \frac{1}{x_2} (x_1 x_2 - 1) \\ &= (1 - x_2 x_1) \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \end{aligned}$$

Ceci est du signe de $(1 - x_2 x_1)$, puisque, x_1 étant inférieur à x_2 , $\frac{1}{x_1}$ est supérieur à $\frac{1}{x_2}$, donc : $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ est positif.

- 2 Si l'on se donne deux points x_1 et x_2 inférieurs à 1, et tels que nous avons $0 < x_1 < x_2$, alors $(1 - x_2 x_1)$ est positif (si ce point ne vous paraît pas évident, cherchez-en une preuve *maintenant*, une correction est donnée à la fin de ce paragraphe). Donc $f(x_1) - f(x_2)$ est positif, et f est *décroissante* sur $]0 ; 1]$ (x_1 est le plus petit et son image est la plus grande). En revanche, si les deux points x_1 et x_2 sont supérieurs à 1, alors $(1 - x_2 x_1)$ est négatif. Donc $f(x_1) - f(x_2)$ est négatif, et f est *croissante* sur $[1 ; +\infty[$ (x_1 est le plus petit et son image est aussi la plus petite).

Au sujet de $1 - x_2 x_1 > 0$: vous savez que $0 < x_1 < 1$ et $0 < x_2 < 1$, il suffit de multiplier membre à membre ces encadrements (ce que l'on a le droit de faire car ils concernent des nombres tous positifs), et il vient : $0 < x_1 x_2 < 1$, d'où : $1 - x_1 x_2 > 0$.

- 3 À l'aide de la question précédente, on dresse le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		2	

- 4 D'après le tableau de variations, f admet pour minimum 2 en $x = 1$.

18 Un premier bilan

Énoncé
p. 172

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

- 1 f est définie sur $[-1,5 ; 3]$.
2 On lit sur le graphique : $f(-0,5) = -2$, $f(1) = 3$, $f(2) = -1$, $f(2,5) = 0$ et $f(3) = 2$.

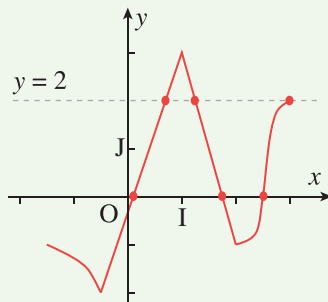
COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

- 3 On a indiqué les « points-solutions » sur la figure ci-dessous. Dans les deux cas, il y a trois solutions.



- 4 f est bornée sur son ensemble de définition, par -2 et 3 .
5 D'après l'énoncé, la courbe de f est un segment de droite sur $[-0,5 ; 1]$. Sur cet intervalle, la fonction s'écrit donc :

$$f(x) = ax + b$$

où a et b sont deux constantes réelles. On peut donc écrire :

$$f(-0,5) = -0,5a + b \text{ et } f(1) = a + b$$

En tenant compte de la question 2), il n'y a plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2 = -0,5a + b \\ 3 = a + b \end{cases} &\iff \begin{cases} 3 = a + b \\ 5 = 1,5a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 3 - a \\ a = \frac{10}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ a = \frac{10}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne sur l'intervalle $[-0,5 ; 1]$:

$$f(x) = \frac{10}{3}x - \frac{1}{3}.$$

On utilise la même méthode sur $[1 ; 2]$.

$f(1) = a + b$ et $f(2) = 2a + b$, on résout le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3 = a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases} &\iff \begin{cases} b = 3 - a \\ -4 = a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 7 \\ a = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

f , sur l'intervalle $[1 ; 2]$, a pour expression :

$$f(x) = -4x + 7.$$

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

- 6** Il y a trois solutions à E_1 . La première se trouve dans l'intervalle $[-0,5 ; 1]$, il suffit de résoudre :

$$\frac{10}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \iff x = \frac{1}{10}.$$

Il y a une deuxième solution dans $[1 ; 2]$:

$$-4x + 7 = 0 \iff x = \frac{7}{4}.$$

La troisième solution est parfaitement lisible, puisque $f(2,5) = 0$.

L'ensemble des solutions de E_1 est donc :

$$\left\{ \frac{1}{10} ; \frac{7}{4} ; \frac{5}{2} \right\}.$$

Ici encore, la première solution de E_2 se trouve dans $[-0,5 ; 1]$. On résout :

$$\frac{10}{3}x - \frac{1}{3} = 2 \iff \frac{10}{3}x = \frac{7}{3} \iff x = \frac{7}{10}.$$

Il y a une autre solution, dans l'intervalle $[1 ; 2]$:

$$-4x + 7 = 2 \iff -4x = -5 \iff x = \frac{5}{4}.$$

Enfin, nous savons déjà que $f(3) = 2$.

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\left\{ \frac{7}{10} ; \frac{5}{4} ; 3 \right\}$.

19 Généralités

➔ Énoncé
p. 173

Lycée Saint-Louis-de-Gonzague, Paris

1 $f(x) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 6x - 9 = 3x^2 + 10x - 8.$

2 • $f(x) = [(2x + 1) + (-x + 3)][(2x + 1) - (-x + 3)]$
 $= (2x + 1 - x + 3)(2x + 1 + x - 3)$
 $= (x + 4)(3x - 2).$

• $g(x) = (x - 4)(x + 4) - 2(x + 4)(-2x + 1)$
 $= (x + 4)[(x - 4) - 2(-2x + 1)]$
 $= (x + 4)(x - 4 + 4x - 2)$
 $= (x + 4)(5x - 6).$

- 3** Il suffit de résoudre l'équation :

$$-8 = 3x^2 + 10x - 8 \iff 0 = 3x^2 + 10x \iff x(3x + 10) = 0.$$

Les antécédents de -8 par f sont donc : 0 et $-\frac{10}{3}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 4 Utilisons les expressions factorisées de f et g :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) = 0 &\iff (x+4)(3x-2) + (x+4)(5x-6) = 0 \\ &\iff (x+4)(3x-2+5x-6) = 0 \\ &\iff (x+4)(8x-8) = 0 \\ &\iff (x+4)(x-1) = 0. \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions : $S = \{-4; 1\}$.

- 5 Utilisons encore les expressions factorisées de f et g :

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= (x+4)(5x-6) - (x+4)(3x-2) \\ &= (x+4)(5x-6-3x+2) \\ &= (x+4)(2x-4) \\ &= 2(x+4)(x-2) \\ &= 2(x+1+3)(x+1-3) \\ &= 2[(x+1)^2 - 9]. \end{aligned}$$

20 Parité avec une valeur absolue

Énoncé
p. 173

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

- 1 Pour étudier la parité de la fonction h , calculons :

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{4 - |-x|}{\sqrt{(-x)^2 - 9}} \\ &= \frac{4 - |x|}{\sqrt{x^2 - 9}} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité signifie que h est une fonction paire.

- 2 Calculons :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^2 - 3}{(-x)^3 + 4(-x)} \\ &= \frac{x^2 - 3}{-x^3 - 4x} \\ &= \frac{x^2 - 3}{-(x^3 + 4x)} \\ &= -\frac{x^2 - 3}{x^3 + 4x} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc impaire.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS • CHAP. 5

21 Paire et impaire

Énoncé
p. 174

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

1 Pour $x \in [-5 ; 5]$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

$\forall x \in [-5 ; 5]$,

• $-x \in [-5 ; 5]$

• et $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$

donc f est paire.

2 Pour $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{3x}$

L'ensemble de définition de f n'est pas symétrique par rapport à 0 donc f n'est ni paire ni impaire.

3 Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 + x + 1$

On remarque que $f(-1) = 4$ et $f(1) = 6$ donc f n'est ni paire ni impaire.

4 Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 2x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4 \times (-x)^3 + 2 \times (-x) \\ &= -4x^3 - 2x \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

donc f est impaire.

22 Dédution

Énoncé
p. 174

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

f est impaire, donc :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x).$$

En particulier, pour $x = 0$,

$$f(-0) = -f(0)$$

soit :

$$f(0) = -f(0)$$

et donc :

$$f(0) + f(0) = 0$$

soit :

$$2f(0) = 0$$

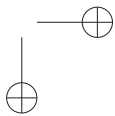
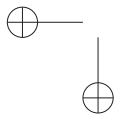
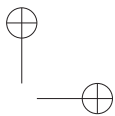
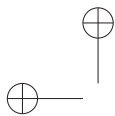
d'où :

$$f(0) = 0.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Chapitre

6

Fonctions de référence

Plan du chapitre

1. Fonctions linéaires et affines
2. Les autres fonctions usuelles

1 Fonctions linéaires et affines

Exercice type 1

Lycée Pascal Paoli, Corte

- 1 Donner les variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_1(x) = 2x + 3 \\ f_2(x) = 2x - 3 \\ f_3(x) = -2x + 3 \end{cases}$$

- 2 Tracez leur courbe représentative.

Voir corrigé page 190

1.1 Comment varient les fonctions linéaires et affines ?

Une fonction affine s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

où a et b sont des réels fixés. Les variations de $f(x)$ et de x sont proportionnelles, car : $f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$, soit :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

a est le coefficient de proportionnalité.

- On a : $b = f(0)$ (c'est « l'ordonnée à l'origine »).
- La « courbe » représentative de f est une droite.
- L'équation de cette droite est : $y = ax + b$.
- La direction de cette droite est indiquée par le réel a , appelé *coefficient directeur*.

Le signe du coefficient directeur indique le sens de variation de f :

- Si $a > 0$, la fonction est strictement croissante.
- Si $a = 0$, la droite est parallèle à l'axe des abscisses, la fonction est constante.
- Si $a < 0$, la fonction est strictement décroissante.

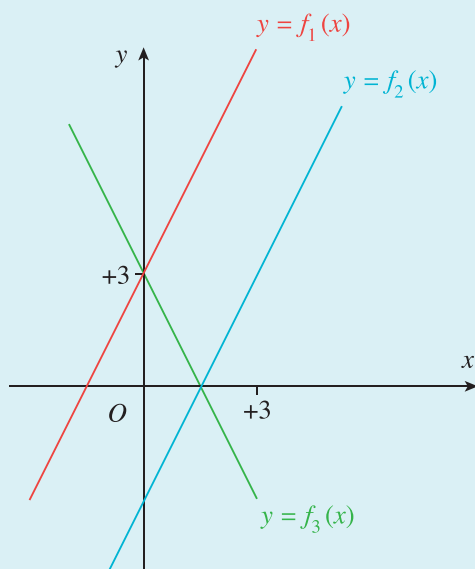
Remarque : une fonction *linéaire* (de la forme $x \mapsto ax$, où a est une constante) est un cas particulier de fonction affine ($b = 0$).

➔ Solution de l'exercice type 1

Lycée Pascal Paoli, Corte

- 1 Le coefficient directeur de f_1 est $+2$ donc f_1 est croissante.
Celui de f_2 est également $+2$ donc f_2 est croissante. Les coefficients directeurs étant les mêmes, les droites sont parallèles.
Le coefficient directeur de f_3 est -2 , donc f_3 est décroissante.

2



Voir énoncé page 189

2 Les autres fonctions usuelles

Exercice type 2

Lycée Chaptal, Paris

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Développer l'expression $(x + 3)^2 - 6$.
- 2 En déduire que la courbe d'équation $y = x^2 + 6x + 3$ est une parabole, dont on déterminera le sommet S .
- 3 Écrire l'expression $2 + \frac{3}{x-1}$ sous la forme d'une fraction.
- 4 En déduire l'ensemble de définition et les variations de la fonction f :
$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}.$$

Voir corrigé page 195

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6

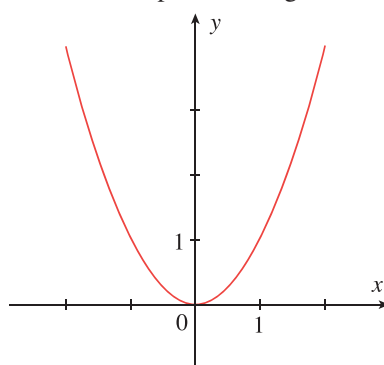
2.1 La fonction « carré »

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$.

Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2		$\searrow \quad 0 \quad \nearrow$	

Sa courbe représentative s'appelle une *parabole*. Au minimum de la fonction, 0, correspond sur la courbe le *sommet*, placé à l'origine du repère.

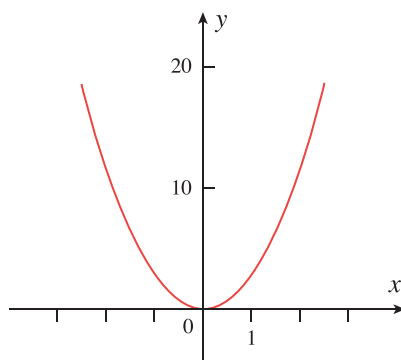


La fonction carré n'est croissante que sur $[0, +\infty[$ (également noté $\mathbb{R}_+$), on ne peut donc passer au carré dans une inégalité que si les deux membres sont positifs. Par exemple, $3 < 5$ donc $9 < 25$. En revanche, $-2 < 1$ et pourtant $4 > 1$!

Si on note $f(x) = x^2$, on constate que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: on dit que la fonction est *paire* (comme l'exposant 2 dans x^2). On peut le voir graphiquement car l'égalité $f(-x) = f(x)$ signifie que deux points de la courbe qui ont des abscisses opposées ont toujours la même ordonnée : la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe (Oy).

Toutes les courbes dont l'équation peut s'écrire, dans un certain repère, sous la forme $y = ax^2$ ($a \neq 0$), sont des paraboles, dont le sommet est l'origine du repère. Le signe de a donne l'orientation (branches vers le haut ou vers le bas) de la parabole.

Voici par exemple la courbe représentative de $x \mapsto 3x^2$:

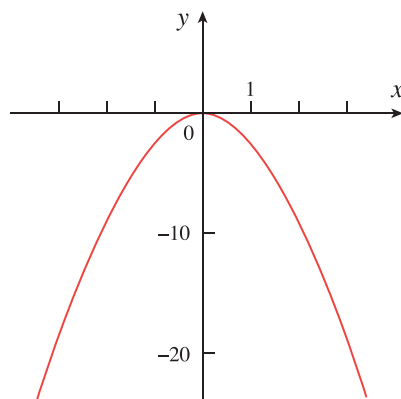


COURS

INTERROS

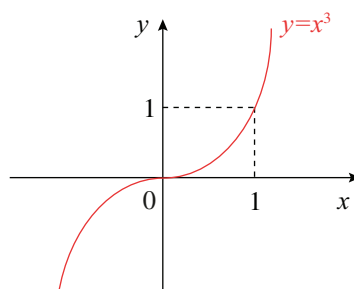
CORRIGÉS

et celle de la fonction $x \mapsto -2x^2$:



2.2 La fonction « cube »

La fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, si a et b sont deux réels tels que $a < b$, alors $a^3 < b^3$. On a donc le droit de « passer au cube » une inégalité de réels, même si les deux membres ne sont pas positifs. Voici la courbe représentative de cette fonction :

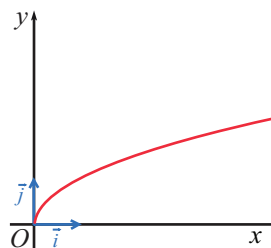


Si on note $f(x) = x^3$, on constate que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: on dit que la fonction est *impaire* (comme l'exposant 3 dans x^3).

L'égalité $f(-x) = -f(x)$ signifie que deux points de la courbe qui ont des abscisses opposées ont des ordonnées opposées : la courbe est donc symétrique par rapport à O .

2.3 La fonction « racine carrée »

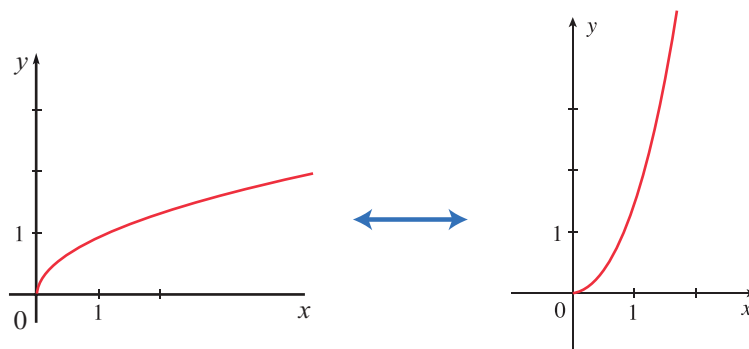
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Elle est croissante, et sa courbe est représentée ci-contre.



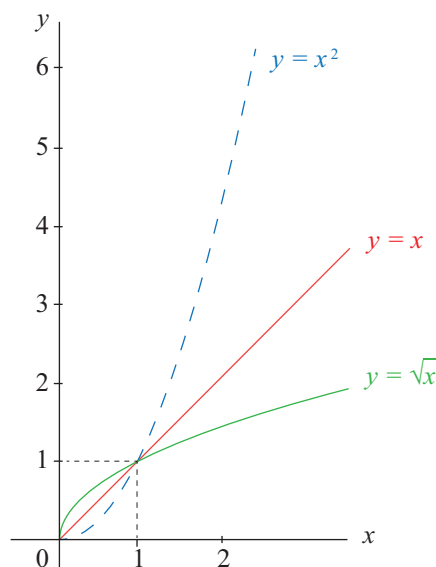
FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6

Se demander si elle est paire ou impaire n'a pas de sens, car elle n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$.

Si on regarde la figure ci-dessous dans un miroir et qu'on la tourne un peu, la courbe de $y = \sqrt{x}$ devient la branche droite de la parabole.



Ceci montre que les courbes d'équation $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$ (pour $x \geq 0$) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



On a cette propriété parce que les fonctions racine et carré (sur $[0, +\infty[$) sont réciproques l'une de l'autre : si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2} = x$ et $(\sqrt{x})^2 = x$.

⚠ ATTENTION

Si $x < 0$, alors $(\sqrt{x})^2$ n'existe pas et $\sqrt{x^2} = -x$ (par exemple $(-2)^2 = 4$ et $\sqrt{4} = 2$ et non -2).

En testant les deux cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$, on montre la formule :

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2.4 La fonction « inverse »

C'est la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$. Cet ensemble est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un intervalle. Il est formé de la *réunion* de deux intervalles : $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

La fonction est décroissante sur ces deux intervalles. Si on inverse les membres d'une inégalité entre nombres de mêmes signes, on obtient une inégalité de sens contraire.

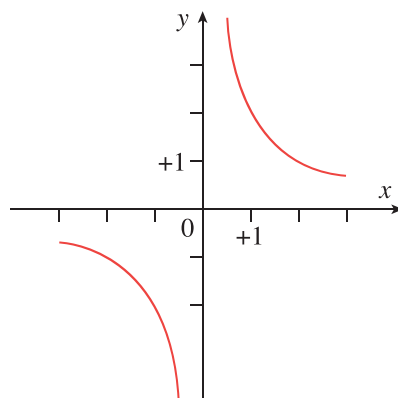
Attention ! La fonction inverse n'est pas décroissante *sur* $\mathbb{R}^*$ car, par exemple, $f(-1) < f(+1)$.

Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			
	$\searrow$		$\searrow$

La courbe représentative est une *hyperbole*. Elle est formée de deux branches disjointes.

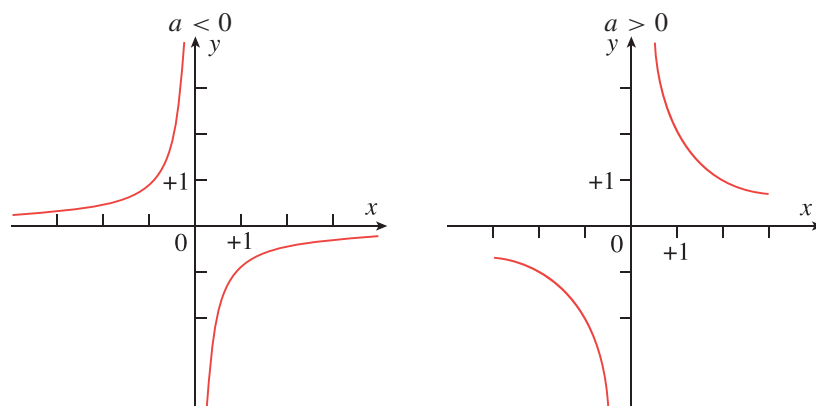
Notons $f(x) = \frac{1}{x}$. On constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -f(x)$. La fonction est donc impaire et la courbe admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



La courbe se rapproche des deux axes du repère, mais sans les toucher ; on dit que les axes sont les *asymptotes* de l'hyperbole.

Toutes les courbes dont l'équation s'écrit sous la forme $y = \frac{a}{x}$ s'appellent des hyperboles, et l'origine du repère est leur *centre*.

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6



➔ Solution de l'exercice type 2

Lycée Chaptal, Paris

- 1 On développe : $(x + 3)^2 - 6 = x^2 + 6x + 9 - 6 = x^2 + 6x + 3$.
- 2 L'équation $y = x^2 + 6x + 3$ s'écrit donc aussi : $y = (x + 3)^2 - 6$, soit : $y + 6 = (x + 3)^2$.
On pose $Y = y + 6$ et $X = x + 3$, on obtient l'équation $Y = X^2$, ce qui montre que la courbe est une parabole. Son sommet S est l'origine du nouveau repère. Il est donc donné par $X = 0$ et $Y = 0$, c'est-à-dire $x = -3$ et $y = -6$. En conclusion, S a pour coordonnées $(-3; -6)$.
- 3 On réduit au même dénominateur :

$$2 + \frac{3}{x-1} = \frac{2(x-1) + 3}{x-1} = \frac{2x-2+3}{x-1} = \frac{2x+1}{x-1}.$$

- 4 L'expression $\frac{2x+1}{x-1}$ n'est définie que si le dénominateur est différent de 0, donc pour $x \neq 1$.

L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, qu'on peut aussi noter $] - \infty, +1[\cup]1, +\infty[$.

Pour les variations, considérons deux éléments a et b de $]1, +\infty[$ tels que $a < b$. On a donc $a - 1 < b - 1$ et comme ces deux nombres sont strictement positifs : $\frac{1}{a-1} > \frac{1}{b-1}$. On applique aux deux membres la fonction $x \mapsto 3x + 2$, qui est une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on en déduit que $\frac{3}{a-1} + 2 > \frac{3}{b-1} + 2$, c'est-à-dire $f(a) > f(b)$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

Si a et b sont éléments de $] - \infty, +1[$, on a de même $a - 1 < b - 1$, et comme ces deux nombres sont strictement négatifs, on a encore $\frac{1}{a-1} > \frac{1}{b-1}$, puis $f(a) > f(b)$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $] - \infty, 1[$.

Voir énoncé page 190

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Fonctions affines et linéaires

5 min

Corrigé
p. 205

Répondre par « vrai » ou « faux » aux propositions suivantes.

- 1 On considère la fonction $f : x \mapsto -\frac{21}{2}x + 7$ définie sur $\mathbb{R}$.
 - a f est une fonction linéaire.
 - b f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
 - c La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en $-\frac{7}{3}$.
 - d -98 est l'image de 10 par f .
- 2 Un carré de côté x a un périmètre noté $\mathcal{P}(x)$ et une aire notée $\mathcal{A}(x)$.
 - a $\mathcal{P}$ est une fonction linéaire.
 - b $\mathcal{A}$ est une fonction affine.
 - c Il n'existe pas de valeur de x autre que 0 telle que $\mathcal{P}(x) = \mathcal{A}(x)$.

2 V/F Fonctions inverse et carré

5 min

Corrigé
p. 205

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

- a La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- b Les courbes représentatives des fonctions inverse et carré se coupent en un seul point.
- c La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -x^2 + 2x - 1$ a un sommet de coordonnées $(1 ; 0)$.

Fonctions affines et linéaires

3 Fonctions affines



10 min

Corrigé
p. 206

Lycée Édouard Herriot, Lyon

Trouver une fonction affine f telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $f(1) = \frac{1}{4}$.

4 Alignement de points



10 min

Corrigé
p. 206

Lycée Les Francs-Bourgeois, Paris

Dans un repère (O, I, J) , on considère les points $A(-1 ; -5)$, $B(2 ; 1)$ et $C(3 ; 3)$.

- 1 Soit $f : x \mapsto ax + b$ la fonction affine dont la courbe représentative passe par A et B . Déterminer a et b .
- 2 Les points A , B et C sont-ils alignés ?

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6

5 Dans un trapèze



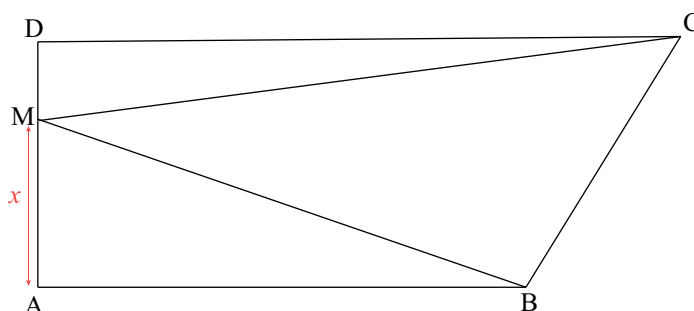
20 min

Corrigé
p. 206

Lycée Loquidy, Nantes

On considère un trapèze $ABCD$ rectangle en A et en D tel que : $AB = 8$, $AD = 5$ et $CD = 10$.

M est un point mobile sur le segment $[AD]$. On note $AM = x$.



- 1 À quel intervalle appartient x ?
- 2 Soit f la fonction qui, à x , associe l'aire du triangle ABM .
Montrer que $f(x) = 4x$.
- 3 Soit g la fonction qui, à x , associe l'aire du triangle CDM .
Montrer que $f(x) = 25 - 5x$.
- 4 Soit h la fonction qui, à x , associe l'aire du triangle BCM .
On admet que h est une fonction affine telle que $f(1) = 21$ et $h(4) = 24$.
En déduire l'expression algébrique de $h(x)$.
- 5 Pour quelle valeur de x l'aire de ABM est égale à celle de CDM ?
- 6 Pour quelle valeur de x l'aire de BCM est égale à celle de CDM ?

6 Fonctions affines



20 min

Corrigé
p. 207

Lycée P. et I. Joliot-Curie, Nanterre

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions affines ? Si oui, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite qui les représente ainsi que leur sens de variation :

1 $f_1 : x \mapsto \frac{3 + 11x}{6}$.

2 $f_2 : x \mapsto -5$.

3 $f_3 : x \mapsto 7 - x$.

4 $f_4 : x \mapsto \frac{5x + 4}{x - 8}$.

5 $f_5 : x \mapsto \frac{2}{3}x$.

6 $f_6 : x \mapsto (x - 4)(x + 2) - x^2 + 10$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Fonction carré

7 Comparaison de deux carrés



5 min

Corrigé
p. 208

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Comparer $(2 - \sqrt{5})^2$ et $(2 - \sqrt{7})^2$ sans les calculer.

8 Avec la fonction carré



5 min

Corrigé
p. 209

Lycée Loquidy, Nantes

Compléter les pointillés suivants.

- 1 Si $3 \leq x \leq 5$ alors $\dots x^2 \dots$
- 2 Si $x < -2$ alors $x^2 \dots$
- 3 Si $x \in]-1; 4]$ alors $x^2 \in \dots$
- 4 Sachant que $x^2 < 5$, on peut dire que $x \dots$

9 Sous diverses formes



15 min

Corrigé
p. 209

Lycée Les-Francis-Bourgeois, Paris

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$.

- 1 Montrer que $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$.
- 2 Montrer que $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.
- 3 Déterminer les points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

10 Étude graphique



20 min

Corrigé
p. 210

Lycée Vaugelas, Chambéry

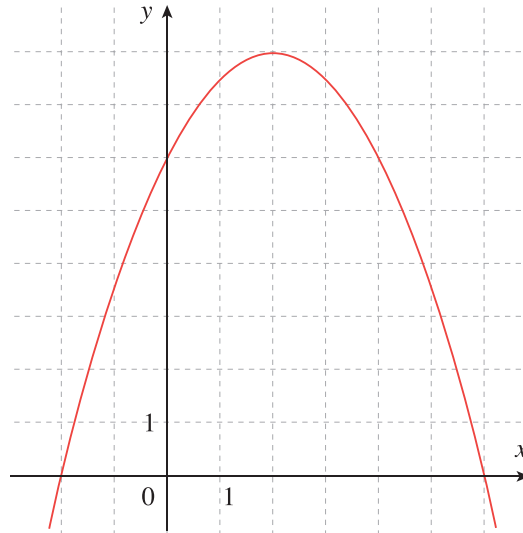
La figure page ci-contre représente la courbe de la fonction f .

- 1 Quelle semble être la nature de cette courbe ?
- 2 Dresser le tableau de variations de f .
- 3 En fait, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'une des expressions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \\ \text{(b)} & f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(c)} & f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \end{array}$$

Laquelle ? Donner une justification simple.

Fonctions de référence • Chap. 6



11 Réciproque et contraposée



10 min

Corrigé
p. 210

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

On désigne par f la fonction carré.

Soit $\mathcal{P}$ la propriété : « si $x = -2$ alors $f(x) = 4$. »

- 1 La propriété $\mathcal{P}$ est-elle vraie ?
- 2 Formuler la propriété réciproque de la propriété $\mathcal{P}$. Est-t-elle vraie ?
- 3 Formuler la propriété contraposée de $\mathcal{P}$. Est-elle vraie ?

12 Les coins du carré

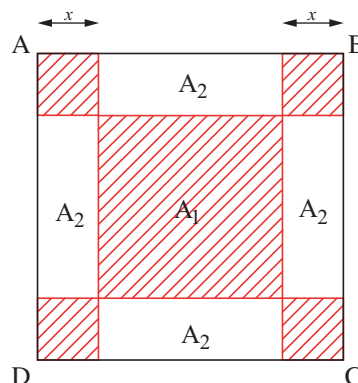


15 min

Corrigé
p. 211

Lycée Les-Francis-Bourgeois, Paris

Un carré $ABCD$ de côté 4 cm est partagé selon le schéma suivant :



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

Les « coins » sont des carrés de côtés x tel que $x \in [0 ; 2]$.

On note A_1 l'aire de la figure hachurée et A_2 l'aire de ce qui n'est pas hachuré.

- 1 Exprimer en fonction de x l'aire A_1 .
- 2 Exprimer en fonction de x l'aire A_2 .
- 3 Montrer que $A_2 = -8(x - 1)^2 + 8$. En déduire la valeur de x pour laquelle A_2 est maximale.

13 Variations



20 min

Corrigé
p. 211

Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, Étampes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- 1 Vérifier que $f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1)(4 - (x_1 + x_2))$.
- 2 Démontrer les deux propriétés suivantes :
 - si $x_1 < x_2 \leq 2$ alors $x_1 + x_2 < 4$;
 - si $2 \leq x_1 < x_2$ alors $x_1 + x_2 > 4$.
- 3 En déduire que f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 2]$ et que f est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variations de f .
- 4 Vérifier que $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.
- 5 Résoudre l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.
- 6 Utiliser les questions 3 et 5 pour résoudre l'inéquation $x^2 \geq 4x - 3$.
- 7 Retrouver le résultat de la question 6 en utilisant la question 4.

14 Aires et fonctions



40 min

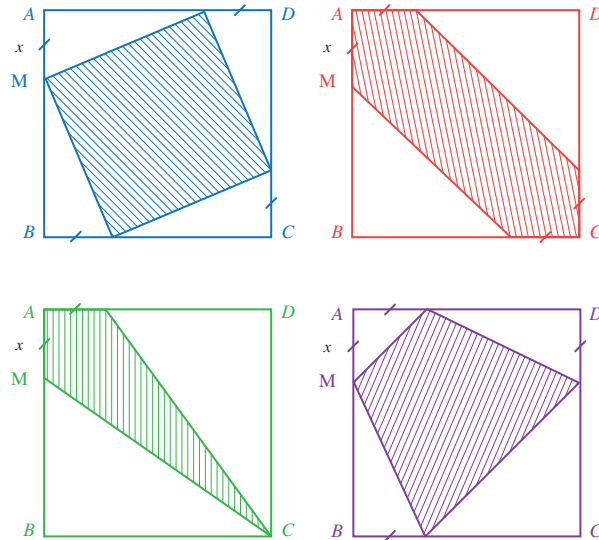
Corrigé
p. 213

Lycée Paul Langevin, Suresnes

Dans un carré $ABCD$ de côté 1, on inscrit quatre figures, comme illustré page ci-contre.

- 1 Déterminer, dans chaque configuration, l'aire de la partie hachurée en fonction de $x = AM$.
- 2 Déduire des représentations graphiques des quatre aires, selon les valeurs de x , quelle est la figure hachurée qui a l'aire la plus grande ; la plus petite.

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6



15 Algorithmique



15 min

Corrigé
p. 214

Lycée Stanislas, Paris

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 19x - 14.$$

On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution entière comprise entre 0 et 20.

- 1 Écrire un algorithme qui permet de la trouver.
- 2 Programmer cet algorithme en Python ou sur la calculatrice.

16 Aire minimale

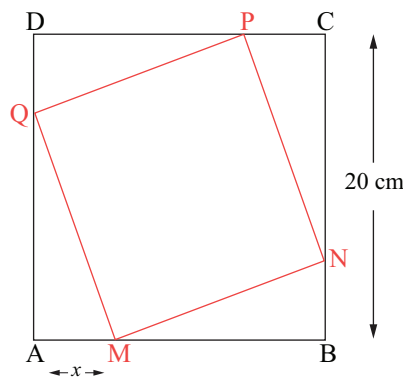


30 min

Corrigé
p. 215

Lycée Jacques Decour, Paris

Dans le carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ suivant le schéma ci-dessous :



INTERROS

On pose $x = AM = BN = CP = DQ$, avec $0 \leq x \leq 20$.

- 1 Calculer l'aire du carré $MNPQ$ en fonction de x .

Cette aire, exprimée en cm^2 , sera notée $S(x)$ et sera donnée sous la forme développée et réduite.

- 2 Vérifier que $2(x - 10)^2 + 200 = 2x^2 - 40x + 400$.

- 3 Quelle est l'aire minimale du carré $MNPQ$?

- 4 On veut déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du carré $MNPQ$ ne dépasse pas 272 cm^2 .

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : x, S nombres réels
Initialisation
  x ← 0
  S ← 400
Début :
  Tant que S ≥ 272
    x ← x+0,01
    S ← 2x2 - 40x + 400
  Fin Tant que
Sortie : Afficher x
```

- (a) Expliquer la raison pour laquelle cet algorithme ne répond pas à notre souhait.
- (b) On admet que $S(x) = 272$ pour des valeurs de x entières. Modifier alors l'algorithme afin de répondre à notre problème et programmer-le en Python.

Fonction inverse

17 De l'inverse à une fonction carré



15 min

Corrigé
p. 216

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On s'intéresse aux points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x - 7.$$

- 1 Soit $h(x) = \frac{-2x^2 + 7x + 1}{x}$, pour $x \neq 0$.

Montrer que chercher les abscisses de ces éventuels points revient à résoudre l'équation $h(x) = 0$.

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6

2 Montrer que :

$$-2x^2 + 7x + 1 = -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{57}{8}.$$

3 En déduire l'abscisse des points d'intersection cherchés initialement.

18 Changement de repère



20 min

Corrigé
p. 217

Lycée Fernand Daguin, Mérignac



Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on considère la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}.$$

1 Quel est le domaine de définition de f ?

2 Montrer que $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$.

3 On considère les points $O'(2 ; 1)$, $I'(3 ; 1)$ et $J'(2 ; 2)$ et le repère (O', I', J') .

On convient de noter $(X ; Y)$ les coordonnées des points dans ce nouveau repère, et $(x ; y)$ celles des points dans (O, I, J) .

(a) Expliquer les égalités : $x = X + 2$ et $y = Y + 1$.

(b) Montrer que dans (O', I', J') , tout point $M(X ; Y)$ de $\mathcal{C}$ est tel que $Y = \frac{1}{X}$.

Que peut-on en conclure sur $\mathcal{C}$?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Fonctions racine carrée et cube

19 Encadrement par deux entiers



2 min

Corrigé
p. 218

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

Encadrer le nombre $\sqrt{123}$ par deux entiers sans utiliser la calculatrice.

20 Domaine



5 min

Corrigé
p. 218

Lycée Stanislas, Paris

Quel est l'ensemble de définition de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 - 2}{x + 5}}.$$

21 Parité



10 min

Corrigé
p. 219

Lycée Marcelin Berthelot, Châtelleraut

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et étudier leur parité.

1 $f_1(x) = \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

3 $f_3(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}}$

2 $f_2(x) = \frac{x^2 - 5}{x^3}$

4 $f_4(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6

1 V/F Fonctions affines et linéaires

Énoncé
p. 196

- 1** **a** Faux. $f(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -\frac{21}{2}$ et $b = 7$ donc f est une fonction affine.
b Vrai. $a < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
c Faux. Pour connaître l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- $$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -\frac{21}{2}x + 7 = 0 \\ &\iff -\frac{21}{2}x = -7 \\ &\iff x = -7 \times \left(-\frac{2}{21}\right) \\ &\iff x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en $\frac{2}{3}$.

- d** Vrai. $f(10) = -\frac{21}{2} \times 10 + 7 = -21 \times 5 + 7 = -98$, donc -98 est bien l'image de 10 par la fonction f .
2 **a** Vrai. $\mathcal{P}(x) = 4x$ car le périmètre d'un carré est égal au quadruple de la mesure d'un côté. $\mathcal{P}(x)$ est de la forme ax donc $\mathcal{P}$ est bien une fonction linéaire.
b Faux. $\mathcal{A}(x) = x^2$ donc l'aire est la fonction carré.
c Faux. $\mathcal{P}(x) = \mathcal{A}(x) \iff 4x = x^2$
- $$\begin{aligned} &\iff x^2 - 4x = 0 \\ &\iff x(x - 4) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4. \end{aligned}$$

Donc l'aire est égale au périmètre quand $x = 4$ et quand $x = 0$.

2 V/F Fonctions inverse et carré

Énoncé
p. 196

- a** Faux. La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R}$.
b Vrai. En effet, il n'existe qu'un nombre dont l'inverse est égal à son carré : $x = 1$. Donc le seul point d'intersection est le point de coordonnées $(1 ; 1)$.
c Vrai. $-x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x - 1)^2$. Cette dernière forme ($a(x - p)^2 + q$, forme canonique) nous indique que le sommet de la parabole qui représente la fonction a pour coordonnées $(p ; q) = (1 ; 0)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 Fonctions affines

Énoncé
p. 196

Lycée Édouard Herriot, Lyon

Une fonction affine est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux réels fixés.

Dans un premier temps, supposons que f existe, donc que $a \times \frac{1}{2} + b = 1$ et que $a \times 1 + b = \frac{1}{4}$.

Pour trouver a et b , nous devons donc résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b = 1 \\ a + b = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{a}{2} = \frac{3}{4} \\ a + b = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{7}{4} \end{cases}$$

La fonction affine f est donc définie par :

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Vous pouvez vérifier que cette fonction répond à la question.

4 Alignement de points

Énoncé
p. 196

Lycée Les Francs-Bourgeois, Paris

1 Notons $\mathcal{D}$ la droite représentant la fonction f dans (O, I, J) .

$$\begin{array}{ll} \bullet A \in \mathcal{D} \iff f(x_A) = y_A & \bullet B \in \mathcal{D} \iff f(x_B) = y_B \\ \iff f(-1) = -5 & \iff f(2) = 1 \\ \iff -a + b = -5 & \iff 2a + b = 1 \\ \iff b = -5 + a; & \iff 2a + (-5 + a) = 1 \\ & \iff 3a = 6 \\ & \iff a = 2. \end{array}$$

Donc $a = 2$ et $b = -5 + 2 = -3$.

Finalement, on trouve : $f(x) = 2x - 3$.

2 $f(3) = 2 \times 3 - 3 = 6 - 3 = 3$ donc $f(x_C) = y_C$; par conséquent, $C \in \mathcal{D}$, ce qui signifie que les points A , B et C sont alignés.

5 Dans un trapèze

Énoncé
p. 197

Lycée Loquidy, Nantes

1 Le point M appartient au segment $[AD]$, avec $AD = 5$.
Donc $x \in [0; 5]$.

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2 ABM est un triangle rectangle en A donc son aire est :

$$f(x) = \frac{AB \times AM}{2} = \frac{8x}{2} = 4x.$$

- 3 CDM est un triangle rectangle en D donc son aire est :

$$g(x) = \frac{DC \times MD}{2} = \frac{10(5-x)}{2} = 5(5-x) = 25 - 5x.$$

- 4 h est une fonction affine, donc il existe deux réels m et p tels que $h(x) = mx + p$.

- $h(1) = 21 \Leftrightarrow m \times 1 + p = 21 \Leftrightarrow m + p = 21 \Leftrightarrow p = 21 - m.$
- $h(4) = 24 \Leftrightarrow m \times 4 + p = 24 \Leftrightarrow 4m + p = 24 \Leftrightarrow p = 24 - 4m.$

On en déduit alors que :

$$21 - m = 24 - 4m \Leftrightarrow -m + 4m = 24 - 21 \Leftrightarrow 3m = 3 \Leftrightarrow m = 1.$$

Ainsi,

$$p = 21 - m = 21 - 1 = 20.$$

Finalement, $h(x) = x + 20$.

- 5 L'aire de ABM est égale à celle de CDM si :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 4x = 25 - 5x \\ &\Leftrightarrow 9x = 25 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{25}{9}. \end{aligned}$$

De plus, $\frac{25}{9} \in [0; 5]$ donc l'aire de ABM est égale à celle de CDM lorsque M est à une distance de $\frac{25}{9}$ de A .

- 6 L'aire de BCM est égale à celle de CDM si :

$$\begin{aligned} x + 20 = 25 - 5x &\Leftrightarrow x + 5x = 25 - 20 \\ &\Leftrightarrow 6x = 5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

De plus, $\frac{5}{6} \in [0; 5]$ donc l'aire de BCM est égale à celle de CDM lorsque M est à une distance de $\frac{5}{6}$ de A .

6 Fonctions affines

➔ Énoncé
p. 197

Lycée P. et I. Joliot-Curie, Nanterre

- 1 f_1 est bien sûr une fonction affine, puisqu'on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{11}{6}x + \frac{3}{6}.$$

L'ordonnée à l'origine de la droite qui représente f_1 est $\frac{3}{6}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. Son coefficient directeur est $\frac{11}{6}$. Il est positif (strictement), donc f_1 est croissante (strictement).

2 f_2 est une fonction constante (donc en particulier affine), représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses, d'ordonnée à l'origine -5 . Le coefficient directeur de cette droite « horizontale » est bien entendu 0.

3 f_3 est clairement une fonction affine. L'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 7, son coefficient directeur est -1 . Il est négatif et non nul, donc la fonction est strictement décroissante.

4 f_4 n'est pas une fonction affine. J'espère que cela vous a sauté aux yeux ($f_4(x)$ ne peut être mis sous la forme $ax + b$). La méthode la plus rapide pour prouver que f_4 n'est pas une fonction affine est de remarquer que f_4 n'est pas définie en 8, alors que les fonctions affines sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5 f_5 est une fonction affine. Elle est même linéaire : l'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 0. Le coefficient directeur de cette droite est $\frac{2}{3}$; il est positif et non nul, donc f_5 est strictement croissante.

6 Si on jette un coup d'œil (trop !) rapide sur f_6 , celle-ci ne paraît pas affine, vue la présence de termes en x^2 . Néanmoins, si l'on développe la formule, on obtient :

$$f_6(x) = x^2 + 2x - 4x - 8 - x^2 + 10 = -2x + 2.$$

f_6 est donc bien une fonction affine. L'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 2, son coefficient directeur est -2 . f_6 est donc strictement décroissante.

7 Comparaison de deux carrés

Énoncé
p. 198

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Partons du fait que $5 < 7$:

$$\begin{aligned} 5 < 7 &\iff \sqrt{5} < \sqrt{7} \\ &\iff -\sqrt{5} > -\sqrt{7} \\ &\iff 2 - \sqrt{5} > 2 - \sqrt{7}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} 4 < 5 &\iff \sqrt{4} < \sqrt{5} \\ &\iff 2 < \sqrt{5} \\ &\iff 2 - \sqrt{5} < 0. \end{aligned}$$

On a donc :

$$2 - \sqrt{7} < 2 - \sqrt{5} < 0.$$

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6

On en conclut alors que :

$$0 < (2 - \sqrt{5})^2 < (2 - \sqrt{7})^2.$$

8 Avec la fonction carré

→ Énoncé
p. 198

Lycée Loquidy, Nantes

- 1 Si $3 \leq x \leq 5$ alors $9 \leq x^2 \leq 25$.

En effet, la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc les images par cette fonction sont rangées dans le même sens que leur antécédent.

- 2 Si $x < -2$ alors $x^2 > 4$.

En effet, la fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ donc les images sont rangées dans le sens inverse de leur antécédent.

- 3 Si $x \in] -1; 4]$ alors $x^2 \in [0; 16]$.

En effet,

- si $-1 < x \leq 0$ alors $0 \leq x^2 < 1$;
- si $0 \leq x \leq 4$ alors $0 \leq x^2 \leq 16$.

Au final, on a bien que $x^2 \in [0; 16]$.

⚠ ATTENTION

Si $x \in [a; b]$ avec $a < 0$ et $b > 0$, n'oubliez pas que x^2 transite nécessairement par 0, et donc que la valeur minimale de x^2 est 0.

- 4 Sachant que $x^2 < 5$, on peut dire que $x \in] -\sqrt{5}; \sqrt{5}[$.

En effet, si $x^2 < 5$, la partie de la courbe représentative de la fonction carré que l'on regarde est celle située sous la droite d'équation $y = \sqrt{5}$, c'est-à-dire la partie de la courbe définie pour x variant de $-\sqrt{5}$ à $\sqrt{5}$ (exclus).

9 Sous diverses formes

→ Énoncé
p. 198

Lycée Les-Francis-Bourgeois, Paris

- 1 On développe :

$$(2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 3x - 2 = f(x).$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}
 2 \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{25}{8} &= 2 \left(x^2 + 2 \times \frac{3}{4} \times x + \frac{3^2}{4^2} \right) - \frac{25}{8} \\
 &= 2 \left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} \right) - \frac{25}{8} \\
 &= 2x^2 + 3x + \frac{9}{8} - \frac{25}{8} \\
 &= 2x^2 + 3x - \frac{16}{8} \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

- 3 Pour déterminer les points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$. Il est donc préférable de prendre la forme factorisée.

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\iff (2x - 1)(x + 2) = 0 \\
 &\iff 2x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0 \\
 &\iff x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -2.
 \end{aligned}$$

Les points d'intersection ont donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et $(-2; 0)$.

10 Étude graphique

Énoncé
p. 198

Lycée Vaugelas, Chambéry

- 1 La courbe est une parabole.
2 On déduit de la courbe les variations de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	8	$-\infty$

- 3 $f(0) = 6$ et $f(2) = 0$. La seule solution est donc :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6.$$

11 Réciproque et contraposée

Énoncé
p. 199

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

- 1 La propriété $\mathcal{P}$ est vraie. En effet, si $x = -2$ alors $f(-2) = (-2)^2 = 4$.
2 La propriété réciproque de $\mathcal{P}$ peut-être formulée ainsi :

« Si $f(x) = 4$ alors $x = -2$. »

Cette réciproque est fausse car si $x^2 = 4$ alors $x = -2$ ou $x = 2$.

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6

- 3** La contraposée de $\mathcal{P}$ peut se formuler ainsi :

« Si $f(x) \neq 4$ alors $x \neq -2$. »

Cette contraposée est vraie. En effet, les deux seuls antécédents à 4 par la fonction carré sont -2 et 2 ; donc si l'image par f n'est pas égale à 4 alors les antécédents ne sont pas égaux à -2 et à 2 , donc *a fortiori* à -2 .

MÉTHODE

Si p et q sont deux propositions et si une propriété s'écrit

« $p \implies q$ » ou « Si p est vraie alors q est vraie »,

- sa réciproque s'écrit :

« $q \implies p$ » ou « Si q est vraie alors p est vraie » ;

- sa contraposée s'écrit :

« non $q \implies$ non p » ou « Si q est fausse alors p est fausse. »

12 Les coins du carré

Énoncé
p. 199

Lycée Les-Francis-Bourgeois, Paris

- 1** L'aire d'un coin est x^2 et l'aire du carré central est $(4 - 2x)^2$ donc :

$$\begin{aligned} A_1 &= 4x^2 + (4 - 2x)^2 \\ &= 4x^2 + 16 - 16x + 4x^2 \\ &= 8x^2 - 16x + 16. \end{aligned}$$

2 $A_2 = 4^2 - A_1$

$$\begin{aligned} &= 16 - (8x^2 - 16x + 16) \\ &= 16 - 8x^2 + 16x - 16 \\ &= -8x^2 + 16x. \end{aligned}$$

3 $-8(x - 1)^2 + 8 = -8[(x - 1)^2 - 1]$

$$\begin{aligned} &= -8(x^2 - 2x + 1 - 1) \\ &= -8(x^2 - 2x) \\ &= -8x^2 + 16x \\ &= A_2. \end{aligned}$$

La courbe de la fonction $x \mapsto -8(x - 1)^2 + 8$ est une parabole qui est maximale pour $x = 1$, donc A_2 est maximale pour $x = 1$.

On a alors $A_2 = 8 \text{ cm}^2$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

13 Variations

Énoncé
p. 200

Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, Étampes

1 On factorise :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= (x_1^2 - 4x_1 + 3) - (x_2^2 - 4x_2 + 3) \\ &= x_1^2 - 4x_1 + 3 - x_2^2 + 4x_2 - 3 \\ &= x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 4(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)[4 - (x_1 + x_2)]. \end{aligned}$$

2 Si $x_1 < x_2$, on peut écrire $x_1 + x_2 < 2x_2$. Avec l'hypothèse : $x_2 \leq 2$, on obtient $x_1 + x_2 < 4$.

Toujours avec $x_1 < x_2$, on écrit $x_1 + x_2 > 2x_1$. Avec $x_1 \geq 2$, on peut écrire $x_1 + x_2 > 4$.

3 Donnons-nous x_1 et x_2 dans $] -\infty ; 2]$, tels que $x_1 < x_2$. D'après les questions précédentes, on sait que $4 - (x_1 + x_2) > 0$ et, par ailleurs, $x_2 - x_1 > 0$, donc $f(x_1) - f(x_2) > 0$. On en déduit que $f(x_1) > f(x_2)$, donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 2]$.

De la même façon, on montre que dans $[2 ; +\infty[$, f est strictement croissante. Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$
		-1	

4 Il suffit de développer $(x - 1)(x - 3)$.

5 D'après la factorisation précédente, l'égalité est vérifiée pour $x = 1$ et $x = 3$, donc $S = \{1 ; 3\}$.

6 L'inéquation proposée revient à l'inéquation : $f(x) \geq 0$. f s'annule pour $x = 1$ et $x = 3$. Sur $] -\infty ; 1]$, f décroît, donc f est positive. Elle devient négative à partir de 1. Sur $[2 ; +\infty[$, la fonction croît, passe par la valeur 0 en $x = 3$, puis devient positive. Ces considérations apparaissent plus clairement dans le tableau de variations :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
		0	$\searrow$	$\nearrow$	
			-1		

L'ensemble des solutions est donc :

$$S =]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[.$$

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6

- 7 L'énoncé vous demande en fait de procéder directement à la résolution de l'inéquation, par un tableau de signes :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x - 1$		-	0	+
$x - 3$		-	0	+
$f(x)$		+	0	+

On retrouve le résultat de la question précédente.

14 Aires et fonctions

Énoncé
p. 200

Lycée Paul Langevin, Suresnes

- 1 • Pour la première configuration (bleue), on peut remarquer qu'il faut enlever au carré, d'aire 1, quatre triangles rectangles identiques, de côtés x et $1 - x$. L'aire cherchée s'écrit donc :

$$A_1(x) = 1 - 4 \frac{x(1-x)}{2} = 2x^2 - 2x + 1.$$

On peut retrouver aussi ce résultat en remarquant que l'aire hachurée est un carré, dont le côté est l'hypoténuse des petits triangles, et d'après le théorème de Pythagore :

$$A_1(x) = x^2 + (1-x)^2, \text{ soit encore : } A_1(x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

- Pour la seconde configuration (rouge), il faut enlever deux triangles rectangles isocèles, de côté $1 - x$, d'où :

$$A_2(x) = 1 - (1-x)^2.$$

- Pour la troisième configuration (verte), on enlève encore deux triangles rectangles, de côtés 1 et $1 - x$, d'où :

$$A_3(x) = 1 - (1-x) = x.$$

- On peut appliquer la même méthode au trapèze de la quatrième configuration (violette). Plus astucieusement, si on considère les diagonales du trapèze, on fait apparaître des rectangles, la moitié est hachurée. Le trapèze a donc pour aire la moitié de celle du carré, soit :

$$A_4(x) = \frac{1}{2}.$$

- 2 Vu le tracé des quatre courbes, on voit que l'aire la plus petite est $A_3(x)$ si $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, puis $A_4(x)$ pour $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Pour l'aire la plus grande, la compétition est entre $A_1(x)$ et $A_2(x)$. Vérifions pour quels x ces deux expressions sont égales. On calcule :

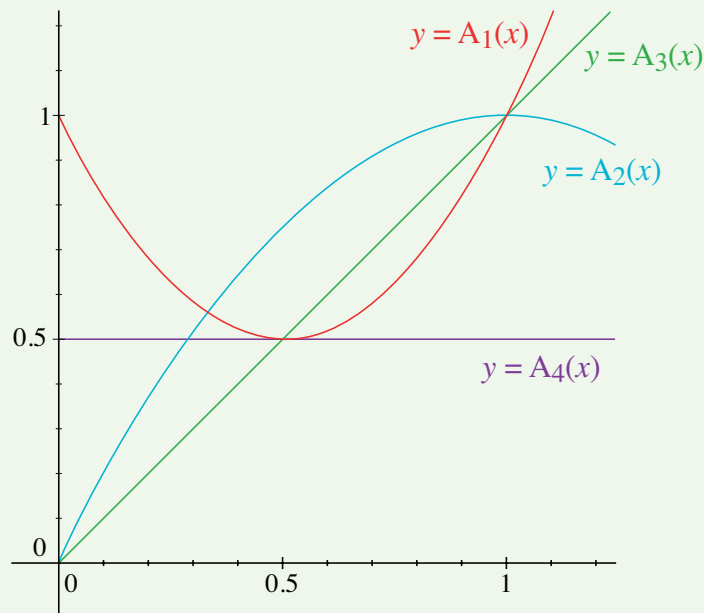
$$\begin{aligned} A_1(x) - A_2(x) &= 2x^2 - 2x + (1-x)^2 \\ &= 2x(x-1) + (1-x)^2 \\ &= (1-x)(1-3x). \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Donc les courbes se coupent au point d'abscisse $\frac{1}{3}$. On en déduit que l'aire la plus grande est $A_1(x)$ si $x \in \left[0 ; \frac{1}{3}\right]$, et $A_2(x)$ si $x \in \left[\frac{1}{3} ; 1\right]$.



15 Algorithmique

Lycée Stanislas, Paris

Énoncé
p. 201

- 1 Puisqu'on nous dit que la racine est un nombre entier compris entre 0 et 20, il suffit de tester chacun de ces nombres.

```
Variables x , y : nombres
Début
  Pour x allant de 0 à 20 Répéter
    y <-- 3*x^2-19*x-14
    Si y = 0 Alors
      Afficher x
    Fin Si
  Fin Pour
Fin
```

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6



2

En Python

```
for x in range(0,21) :
    y = 3 * x**2-19*x-14
    if y == 0 :
        print(y)
```

Il faut se rappeler qu'en Python, la valeur finale de l'intervalle est exclue, il faut donc écrire `range(0,21)` si on veut tester toutes les valeurs jusqu'à 20 inclus.

Notez également le double signe « = », opérateur qui teste l'égalité (==) et renvoie *True* ou *False*, à ne pas confondre avec le signe égale simple, opérateur d'affectation.

16 Aire minimale

Énoncé
p. 201

Lycée Jacques Decour, Paris

- 1 Le triangle AMQ est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}QM^2 &= x^2 + (20 - x)^2 \\&= x^2 + 400 - 40x + x^2 \\&= 2x^2 - 40x + 400.\end{aligned}$$

L'aire du carré $MNPQ$ est égale à QM^2 donc :

$$S(x) = 2x^2 - 40x + 400.$$

- 2 On développe :

$$\begin{aligned}2(x - 10)^2 + 200 &= 2(x^2 - 20x + 100) + 200 \\&= 2x^2 - 40x + 400 \\&= S(x).\end{aligned}$$

- 3 $S(x) = 200 + \underbrace{2(x - 10)^2}_{\geq 0} \geq 200$. L'aire minimale de $MNPQ$ est donc

égale à 200 cm^2 .

- 4 (a) Dans l'algorithme, on voit que les instructions de la boucle « Tant que » s'exécutent dès lors que S est supérieur ou égal à 272. La valeur initiale de S étant 400, on entre dans la boucle et on calcule $S(x)$ jusqu'à trouver un résultat inférieur à 272. Quand ce sera le cas, on sortira de la boucle et la valeur de x sera affichée.

Cependant, l'algorithme n'affiche qu'une valeur... Et on se doute bien qu'il y en a d'autres ! Il ne répond donc pas à notre souhait de trouver *toutes* les valeurs de x telles que $S(x) < 272$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

(b) Un algorithme possible est le suivant :

```
Variables : x, S nombres réels
Initialisation
  x ← 0
  S ← 400
Début :
  Tant que x < 20
    x ← x+1
    S ← 2x2 - 40x + 400
    Si S = 272 alors
      Afficher x
    Fin Si
  Fin Tant que
```

L'énoncé nous dit que les valeurs de x telles que $S(x) = 272$ sont entières donc nous allons faire un balayage de l'intervalle $[0;20]$ avec un pas de x égal à 1 (c'est-à-dire que x va augmenter de 1 en 1). Pour chaque valeur de x , on calcule $S(x)$ et si le résultat est égal à 272, on affiche la valeur de x .

D'après les variations de S , la première valeur qui s'affiche est la première valeur de x à partir de laquelle $S(x) \leq 272$ et la seconde sera celle à partir de laquelle $S(x) \geq 272$. Ainsi, entre les deux valeurs affichées, on est assuré que $S(x) \leq 272$.

Voici le programme Python correspondant :



```
x = 0
S = 400
while x < 20 :
  x = x + 1
  S = 2 * x**2 - 40 * x + 400
  if S == 272 :
    print(x)
```

17 De l'inverse à une fonction carré

Énoncé
p. 202

Lycée Camille Jullian, Bordeaux

- 1 Notons $M(x; y)$ l'un des éventuels points d'intersection des deux courbes. M est sur la courbe représentative de f donc $y = f(x)$; de même, M est sur celle de g donc $y = g(x)$ d'où $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2x - 7 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2x + 7 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 7x + 1}{x} = 0.$$

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Développons la forme donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{57}{8} &= -2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16}\right) + \frac{57}{8} \\ &= -2x^2 + 7x - \frac{49}{8} + \frac{57}{8} \\ &= -2x^2 + 7x + 1. \end{aligned}$$

3 Des questions précédentes, on déduit :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{57}{8} = 0 \\ &\iff -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{57}{8} \\ &\iff \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{57}{8} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\iff \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{57}{16} \\ &\iff x - \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{57}{16}} \quad \text{ou} \quad x - \frac{7}{4} = -\sqrt{\frac{57}{16}} \\ &\iff x = \frac{\sqrt{57}}{4} + \frac{7}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{57}}{4} + \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, il y a deux points d'intersection, d'abscisses $x_1 = \frac{7 - \sqrt{57}}{4}$ et $x_2 = \frac{7 + \sqrt{57}}{4}$.

18 Changement de repère

Énoncé
p. 203

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

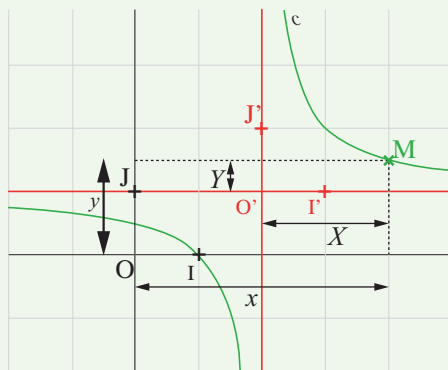


1 L'expression de la fonction f contient un quotient donc f est définie quand le dénominateur de ce dernier est différent de 0.

Le domaine de définition de f est donc : $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \quad 1 + \frac{1}{x-2} &= \frac{x-2}{x-2} + \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{x-2+1}{x-2} \\ &= \frac{x-1}{x-2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

3 (a)



On voit alors que $x = X + x_{O'} = X + 2$ et $y = Y + y_{O'} = Y + 1$.
Sur le schéma, toutes les coordonnées sont positives, mais les égalités sont bien sûr valables quand elles sont négatives.

(b) On sait que dans le repère (O, I, J) ,

$$y = f(x) = 1 + \frac{1}{x-2};$$

ainsi, à l'aide des égalités trouvées à la question précédente, on obtient :

$$Y + 1 = 1 + \frac{1}{X + 2 - 2} \quad \text{soit} \quad Y = \frac{1}{X}.$$

On peut alors conclure que la fonction f est la fonction inverse dans le repère (O', I', J') et donc que $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

19 Encadrement par deux entiers

Lycée Parc de Vilgenis, Massy

Énoncé
p. 203

On sait que $11^2 = 121$ et $12^2 = 144$ donc on peut écrire :

$$121 < 123 < 144 \iff \sqrt{121} < \sqrt{123} < \sqrt{144} \iff 11 < \sqrt{123} < 12.$$

20 Domaine

Lycée Stanislas, Paris

Énoncé
p. 203

Pour déterminer l'ensemble de définition de f , il faut savoir pour quels x la fraction $g(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 5}$ existe et est positive.

À cause du dénominateur, il faudra exclure la valeur -5 .

Après avoir remarqué que $\frac{x^2 - 2}{x + 5} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x + 5}$, on dresse un tableau de signes page ci-contre.

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • CHAP. 6

x	$-\infty$	-5	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$x - \sqrt{2}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{2}$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$x + 5$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$		$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi, $g(x) \geq 0$ si $-5 < x \leq -\sqrt{2}$ ou $x \geq \sqrt{2}$. L'ensemble de définition de f est donc une réunion de deux intervalles :

$$D_f =]-5, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[.$$

21 Parité

➔ Énoncé
p. 204

Lycée Marcelin Berthelot, Châtellerauld

- 1 $f_1(x)$ est définie quand son dénominateur est non nul, et que l'expression sous le radical est positive. On peut résumer ces deux conditions par : $x^2 - 1 > 0$, c'est-à-dire $x^2 > 1$.

C'est une inégalité entre nombres positifs, on obtient une inégalité équivalente en appliquant la racine carrée : $|x| > 1$.

Nous écrivons bien $\sqrt{x^2} = |x|$ et pas seulement x , sinon nous allons oublier la moitié des solutions !

Or $|x| > 1$ se traduit facilement par $x < -1$ ou $x > 1$.

L'ensemble de définition est donc $D_1 =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Cet ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 (si $x \in D_1$, alors $-x \in D_1$). On peut donc étudier la parité.

Prenons $x \in D_1$ et calculons $f_1(-x)$:

$$f_1(-x) = \frac{(-x)^3 - x}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{-x^3 - x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -f_1(x).$$

La fonction f_1 est donc impaire.

- 2 $f_2(x)$ est définie dès que son dénominateur est non nul, donc pour $x \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, l'ensemble de définition de f_2 est $D_2 = \mathbb{R}^*$. Cet ensemble est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D_2$,

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \frac{(-x)^2 - 5}{(-x)^3} \\ &= -\frac{x^2 - 5}{x^3} \\ &= -f_2(x). \end{aligned}$$

La fonction f_2 est elle aussi impaire.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 Notons $g(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$. À cause du radical, $f_3(x)$ est définie si et seulement si $g(x)$ est définie et positive.

Le dénominateur de $g(x)$ est toujours strictement positif, donc $g(x) \geq 0$ si et seulement si $x^2 - 2 \geq 0$, c'est à dire $x^2 \geq 2$.

En raisonnant comme à la question 1, on obtient l'inégalité équivalente $|x| \geq \sqrt{2}$, d'où $x \leq -\sqrt{2}$ ou $x \geq \sqrt{2}$.

Conclusion : $D_3 =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.

Cet ensemble est symétrique par rapport à 0 et si $x \in D_3$,

$$g(-x) = \frac{(-x)^2 - 2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} = g(x)$$

et donc $f_3(-x) = \sqrt{g(-x)} = \sqrt{g(x)} = f_3(x)$.

On en déduit que f_3 est paire.

- 4 f_4 est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien entendu symétrique par rapport à 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_4(-x) = \frac{-x + 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x + 1}{x^2 + 1}$. On « sent » que

cette expression n'est pas identique, ni opposée à $f_4(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$, mais il faut le prouver, d'autant que dans le cas de $x = 0$, on a une égalité. Deux méthodes sont possibles.

- On résout l'équation $f_4(-x) = f_4(x)$. Comme les dénominateurs sont les mêmes, on est vite ramené à $-x + 1 = x + 1$, donc $2x = 0$ puis $x = 0$, ce qui montre que l'égalité n'a lieu que pour le cas particulier $x = 0$: la fonction f_4 n'est donc pas paire. On procède ensuite de la même façon avec $f_4(-x) = -f_4(x)$ pour montrer que f_4 n'est pas impaire. Il y a mieux. En effet, en résolvant ces équations, on effectue un travail inutile.
- Il suffit de trouver un x pour lequel $f_4(-x) \neq f_4(x)$ pour affirmer que f_4 n'est pas paire, de même qu'il suffit de trouver un x pour lequel $f_4(-x) \neq -f_4(x)$ pour montrer que f_4 n'est pas impaire. Par exemple, $f_4(-1) = 0$ et $f_4(1) = 1$. Comme 0 et 1 ne sont ni égaux, ni opposés, f_4 n'est ni paire, ni impaire.

ATTENTION

Un entier est soit pair, soit impair. On a donc l'habitude de penser que ces deux mots sont des contraires.

Ce n'est pas le cas lorsqu'ils s'appliquent à des fonctions. Une fonction peut être paire (comme f_3), impaire (comme f_1 et f_2), ni l'une ni l'autre (comme f_4), et la fonction nulle est à la fois paire et impaire !

Chapitre

7

Vecteurs et coordonnées dans le plan

Plan du chapitre

1. Vecteurs
2. Vecteurs et alignement

1 Vecteurs

Exercice type

Lycée Lavoisier, Paris



 Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-3 ; 0)$, $B(-6 ; -3)$ et $C\left(\frac{3}{2} ; \frac{9}{2}\right)$.

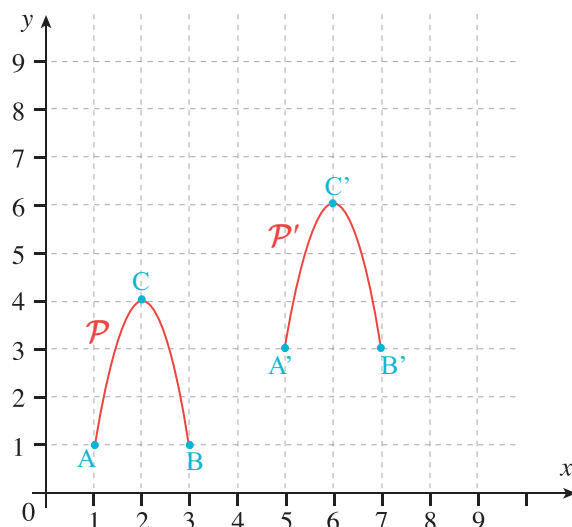
- 1 Montrer que les points A , B et C sont alignés.
- 2 Déterminer les coordonnées du point D pour que $COBD$ soit un parallélogramme.
- 3 Déterminer les coordonnées du point M centre de ce parallélogramme.

Voir corrigé page 228

1.1 Translations

Une figure du plan subit une translation lorsqu'elle est déplacée sans se déformer et sans tourner.

Sur la figure page suivante, la courbe rouge $\mathcal{P}$ subit une translation et est déplacée en $\mathcal{P}'$.



Au départ, le coin inférieur gauche se trouve en A , qui a pour coordonnées $(1; 1)$. La translation le déplace en A' , de coordonnées $(5; 3)$. Notons qu'on ajoute $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée de A pour obtenir les coordonnées de A' .

Regardons maintenant le coin inférieur droit, qui se trouve initialement en $B(3; 1)$. Il est déplacé jusqu'en $B'(7; 3)$. Ici encore, on ajoute $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée de B pour obtenir les coordonnées de B' .

Quelle est la position finale du sommet qui était en $C(2; 4)$? Pour lui aussi, il suffit d'ajouter $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée pour obtenir sa position finale $C'(6; 6)$.

Cette propriété est vérifiée pour n'importe quel point de la figure. Ainsi, le *mouvement* de translation peut être entièrement décrit par l'algorithme : ajouter $+4$ à l'abscisse et $+2$ à l'ordonnée.

On dit que le *vecteur* de la translation a pour coordonnées $\begin{pmatrix} +4 \\ +2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur est un objet abstrait : il décrit une translation. On peut le représenter par une flèche qui montre la direction (c'est-à-dire, par exemple, parallèlement à quelle droite ?), le sens (il y a deux sens pour une direction donnée) et la longueur du déplacement.

Le mot *vecteur* vient du latin *vehere* qui veut dire *transporter*. Le mot *véhicule* est de la même famille. Le vecteur montre comment les points sont « transportés » par la translation.

Pour noter un vecteur, on peut utiliser une lettre, en général surmontée d'une flèche : $\vec{u}$, $\vec{v}$. Comme la translation transforme A en A' , on peut également noter $\overrightarrow{AA'}$ le vecteur.

Sur la figure, on a indiqué trois flèches, mais elles représentent le *même* vecteur puisqu'il s'agit de la *même* translation.

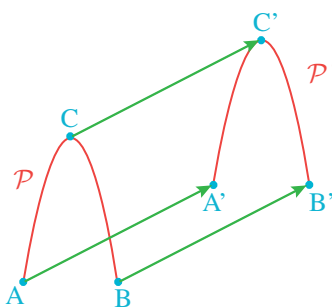
VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont égaux.

On note alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

Un cas particulier : si la translation est l'*identité* (cas particulier où on n'effectue aucun déplacement), alors le vecteur de translation est le *vecteur nul*. On le note $\vec{0}$. Il a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : il n'est nul besoin de coordonnées pour décrire une translation ou pour définir un vecteur. Par exemple, si on enlève le repère du dessin précédent, on peut tout de même parler du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ et dire que la translation de vecteur $\vec{u}$ déplace A en A' , B en B' et C en C' .



1.2 Coordonnées d'un vecteur

On considère deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Il faut ajouter $x_B - x_A$ à l'abscisse de A et $y_B - y_A$ à son ordonnée pour obtenir les coordonnées de B .

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Remarque :

- on indique les coordonnées d'un point en ligne : $M(2 ; 1)$;
- on indique (si possible) celles d'un vecteur en colonne : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (sans mettre de symbole « = » !).

1.3 Somme de vecteurs

Définition 1

Si on enchaîne la translation de vecteur $\vec{u}_2$ à la translation de vecteur $\vec{u}_1$, on obtient une translation, de vecteur $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Si $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, la première translation ajoute x_1 aux abscisses, et la seconde x_2 , on a donc ajouté $x_1 + x_2$.

De même, on ajoute $y_1 + y_2$ aux ordonnées, donc $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ a pour coordonnées :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

1.3.1 - La relation de Chasles

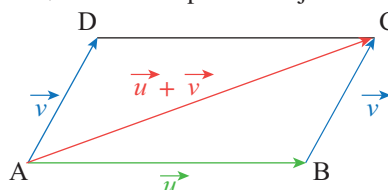
Si $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$, et $C(x_C ; y_C)$ sont trois points du plan, il suffit de calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ et $\vec{AC}$ pour constater :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

1.3.2 - La règle du parallélogramme

Pour construire la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a deux méthodes.

- On applique la relation de Chasles en trouvant des points A , B , C , tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$. Ainsi, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$.
- On choisit A , B et C tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AD} = \vec{v}$. On construit le parallélogramme $ABCD$. Dans ce parallélogramme, on constate $\vec{AD} = \vec{BC}$. Alors la relation de Chasles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ permet de justifier : $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.



Cette relation s'appelle la *règle du parallélogramme*

1.4 Norme et distance

Dans un repère orthonormé, la longueur du segment $[AB]$ (ou distance entre les points A et B) est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

(C'est une conséquence du théorème de Pythagore.)

Dans cette formule, on reconnaît les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$. Généralisons : si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, la norme du vecteur $\vec{u}$ est, par définition :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

En particulier, si $\vec{u} = \vec{AB}$, alors $||\vec{AB}|| = AB$: la norme du vecteur $\vec{AB}$ est la distance entre A et B (c'est donc la distance parcourue par chaque point lors d'une translation).

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

1.5 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Soient k un réel et $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On note $k \cdot \vec{u}$ le vecteur de coordonnées : $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$. C'est le produit de $\vec{u}$ par k . On peut le noter avec ou sans point de multiplication.

En particulier, $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ est le vecteur *opposé* de $\vec{u}$, il a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct, $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$.

1.6 Coordonnées du milieu d'un segment

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

Si M est le milieu de $[AB]$, avec alors : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. En écrivant les coordonnées des vecteurs, on obtient les égalités : $x_M - x_A = x_B - x_M$ et $y_M - y_A = y_B - y_M$, donc

$$M \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Remarque : si un point M vérifie $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, alors les droites (AM) et (MB) ont la même direction (c'est-à-dire qu'elles sont parallèles), et donc sont confondues, puisqu'elles ont un point commun. Or $AM = MB$, donc M est nécessairement le milieu de $[AB]$.

1.7 Base orthonormée, repère orthonormé

Deux vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ forment une base orthonormée du plan lorsque ces deux vecteurs sont de norme 1 et de directions perpendiculaires.

Si on les choisit de même direction et même sens que les axes de coordonnées, alors $\vec{i}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie sans peine que tout vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ s'écrit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Si O est l'origine du repère (intersection des axes), on dit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Vecteurs et alignement

2.1 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont même direction (ils sont « parallèles »).

À RETENIR : (Critère pratique)

Soient $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si et seulement si un des deux est le vecteur nul ou si on peut trouver un coefficient de proportionnalité k tel que $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} x_2 = kx_1 \\ y_2 = ky_1 \end{cases}$$

Exemple : si $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dites directement que $\vec{u}_1 = 3\vec{u}_2$, ce qui montre que les deux vecteurs sont colinéaires.

2.2 Déterminant de deux vecteurs

Si $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, leur déterminant est le nombre défini par :

$$\text{Det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Remarque : le déterminant n'est pas symétrique :

$$\text{Det}(\vec{u}_2, \vec{u}_1) = x_2 y_1 - y_2 x_1 = -(x_1 y_2 - y_1 x_2) = -\text{Det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2).$$

En fait, ce n'est pas grave car nous l'utilisons seulement pour vérifier s'il égale ou non 0.

Propriété 1

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Avec les vecteurs de l'exemple précédent, on pouvait aussi calculer $\text{Det}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 3 \times 2 - 6 \times 1 = 0$, ce qui confirme que les deux vecteurs étaient colinéaires.

2.3 Montrer que trois points sont alignés

Rappel : « A, B et C » sont alignés signifie qu'ils sont situés sur la même droite,

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

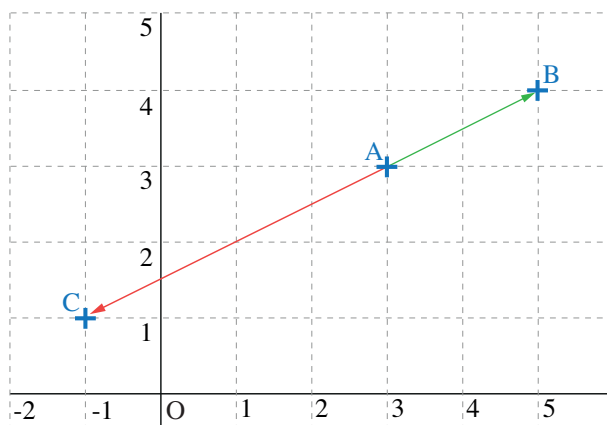
ou encore que les droites (AB) et (AC) sont confondues.

Comme elles ont un point commun, ceci revient à dire qu'elles ont la même direction :

Propriété 2

A , B et C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Exemple : $A(3 ; 3)$; $B(5 ; 4)$; $C(-1 ; 1)$. On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.



On constate $\vec{AC} = -2\vec{AB}$ (ou $\det(\vec{AC}, \vec{AB}) = 0$), donc A , B et C sont alignés.

Remarque : il suffit de former deux vecteurs distincts contenant les trois points.

On peut remplacer $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ par :

- $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$;
- $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$, etc.

2.4 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 2

Un vecteur *non nul* est un vecteur directeur de la droite D si et seulement si sa direction est celle de D (le vecteur est « parallèle » à la droite).

On dit que c'est un vecteur *directeur* car il indique sa *direction*.

Exemple : si le plan est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors $\vec{i}$ est un vecteur directeur de l'axe des abscisses, $\vec{j}$ est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Remarques

- $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) .
- Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, qui sont tous colinéaires.
- Si A est un point de la droite D , $\vec{u}$ un vecteur directeur de (AB) et B l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, alors B est un point de D .
- En revanche, $\overrightarrow{EF}$ peut être un vecteur directeur de D sans que ni E , ni F ne soient sur D .



➔ Solution de l'exercice type

Lycée Lavoisier, Paris

1 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6+3 \\ -3-0 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}+3 \\ \frac{9}{2}-0 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

Les deux vecteurs sont bien colinéaires (on a $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$), donc les trois points sont alignés.

2 $COBD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BD}$. Comme O est l'origine du repère, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}$ sont, par définition, celles de C :

$$\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Notons provisoirement $(x_D ; y_D)$ les coordonnées de D . Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} x_D + 6 \\ y_D + 3 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de résoudre l'équation :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OC} \iff \begin{cases} x_D + 6 = \frac{3}{2} \\ y_D + 3 = \frac{9}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_D = -\frac{9}{2} \\ y_D = \frac{3}{2} \end{cases}$$

D'où : $D \left(-\frac{9}{2} ; \frac{3}{2} \right)$.

3 Le centre du parallélogramme est le milieu commun des diagonales $[BC]$ et $[OD]$. Comme $O(0,0)$, il est préférable d'utiliser le segment $[OD]$, il vient facilement :

$$M \left(-\frac{9}{4} ; \frac{3}{4} \right).$$

Voir énoncé page 221

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

1 QCM Relation de Chasles

5 min

Corrigé
p. 238

Parmi les propositions faites une seule est correcte. Laquelle ?

Soient A , B et C trois points du plan.

- 1
- ☐ a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
 - ☐ b $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
 - ☐ c $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.
- 2
- ☐ a $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.
 - ☐ b $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
 - ☐ c $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.
- 3
- ☐ a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
 - ☐ b $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
 - ☐ c $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

2 QCM Test de connaissances générales

10 min

Corrigé
p. 238

Parmi les propositions aux questions suivantes, une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?

- 1 Quels que soient les points A , B et C :
- ☐ a $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$
 - ☐ b $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
 - ☐ c $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$
 - ☐ d $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AC}$
- 2 Si $2\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors :
- ☐ a $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$
 - ☐ b $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix}$
 - ☐ c $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$
 - ☐ d $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 3 $ABCD$ est un parallélogramme. Alors :
- ☐ a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
 - ☐ b $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
 - ☐ c $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$
 - ☐ d $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 **V/F** **Coordonnées des vecteurs**

5 min

Corrigé
p. 238

Dans le repère orthonormé (O, I, J) , on donne $A(3 ; 2)$ et $B(5 ; 1)$.

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont exactes ?

- ☐ **a** $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$
- ☐ **b** $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- ☐ **c** $AB = 2^2 + 1^2 = 5$
- ☐ **d** Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(4 ; \frac{3}{2}\right)$.

Géométrie non analytique

4 **Construction d'un point**



5 min

Corrigé
p. 238

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Soit ABC un triangle.

Construire le point I tel que $\vec{AI} = 2\vec{BC} - 3\vec{BA}$.

5 **Transformations**



5 min

Corrigé
p. 239

Lycée Colbert, Paris

$ABCD$ étant un parallélogramme de centre O , I et J milieux de $[OD]$ et $[OB]$, comparer IC et JA .

6 **Que de vecteurs !**



5 min

Corrigé
p. 240

Lycée Fénélon, Paris

On considère la figure ci-contre.

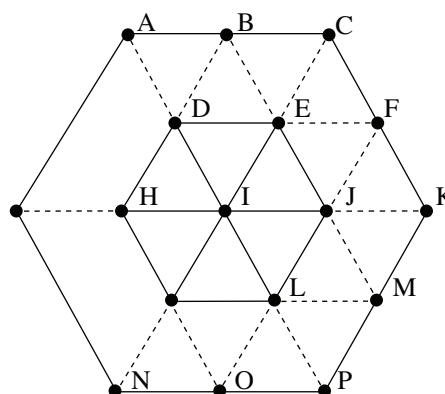
Compléter les égalités suivantes :

$$\vec{NP} + \vec{DE} = \dots \vec{AB}$$

$$\vec{HB} + \vec{EJ} = \vec{H} \dots$$

$$\vec{NK} - \vec{EF} + \vec{CH} = \dots$$

$$\vec{JB} - \vec{KM} + \vec{BC} = \vec{L} \dots$$



VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

7 Somme de vecteurs

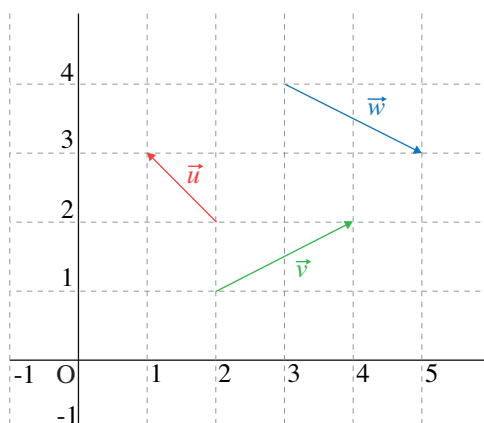


10 min

Corrigé
p. 240

Lycée Maurice Genevoix, Montrouge

On considère la figure suivante.



- 1 Quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$?
- 2 Placer le point A tel que $\vec{OA} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
Quelles sont les coordonnées de A ?

8 Calcul vectoriel



15 min

Corrigé
p. 240

Lycée Eugène Delacroix, Maisons-Alfort

Sur la figure suivante, les points sont équidistants.



Compléter les égalités par des nombres réels :

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1 $\vec{BD} = \dots \vec{AB}$ | 4 $\vec{EC} = \dots \vec{AG}$ |
| 2 $\vec{CD} = \dots \vec{BF}$ | 5 $\vec{AB} + 2\vec{CE} - \vec{AC} = \dots \vec{AB}$ |
| 3 $\vec{FC} = \dots \vec{DE}$ | 6 $\frac{1}{2}\vec{BF} - \frac{1}{4}\vec{AE} + \vec{FG} = \dots \vec{BD}$ |

9 Relation de Chasles



15 min

Corrigé
p. 241

Lycée Fénélon, Paris

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et H sont tels que :

$$\vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{AD} \quad \text{et} \quad \vec{CH} = \frac{2}{3}\vec{CD}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- 1 Recopier et compléter :

$$\overrightarrow{BE} = \dots + \overrightarrow{AE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BH} = \dots + \overrightarrow{CH}.$$

- 2 Exprimer $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

- 3 Démontrer que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires. Conclure.

10 Alignement de points



10 min

Corrigé
p. 241

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O .

Soit G le centre de gravité du triangle ACD .

Soit E le point tel que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC}$.

Soit A' le milieu de $[CD]$.

- 1 Faire une figure.
- 2 Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- 3 Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- 4 Montrer que les points A , G et E sont alignés.

11 Alignement de points



10 min

Corrigé
p. 242

Lycée Fénélon, Paris

ABC est un triangle quelconque. Soit D le point défini par :

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

Montrer que $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BC}$ et conclure sur l'alignement de trois points.

12 Alignement de points



15 min

Corrigé
p. 243

Lycée Jacques Decour, Paris

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soient E et F deux points définis par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}.$$

- 1 Faire une figure.
- 2 Montrer que C , E et F sont alignés.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

13 Parallélisme



15 min

Corrigé
p. 243

Lycée Jacques Decour, Paris

ABC est un triangle non aplati.

Les points I et O sont tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Montrer que les droites (OP) et (IB) sont parallèles.

14 Exercice de recherche



15 min

Corrigé
p. 244

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

On considère un parallélogramme $ABCD$. On définit alors les points M et N par :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DN} = -x^2\overrightarrow{AB} + 2x\overrightarrow{AD},$$

où x est un nombre réel.

Existe-t-il au moins une valeur de x pour laquelle M et N sont confondus ?

Géométrie analytique

15 Avec une symétrie

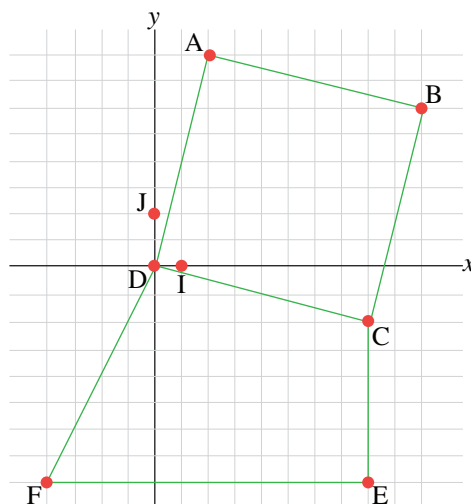


10 min

Corrigé
p. 245

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

On considère la figure suivante, où $ABCD$ est un carré et $FDCE$ un quadrilatère.



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- 1 Donner, dans le repère (D, I, J) , les coordonnées des points de la figure.
- 2 Calculer les coordonnées du point K milieu de $[AE]$.
- 3 Donner les coordonnées du point symétrique de B par rapport à K .

16 Calculs de longueurs



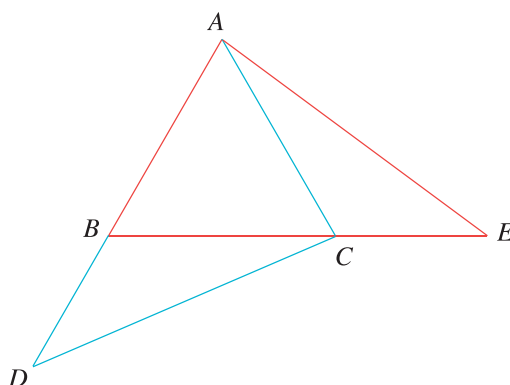
15 min

Corrigé
p. 246

Lycée Claude Debussy, Saint-Germain-en-Laye

Le triangle ABC est équilatéral de côté 2 et $BD = CE$.

On note O le pied de la hauteur issue de A dans ABC et on choisit un repère (O, C, J) de sorte que A ait une ordonnée positive.



- 1 Quelle est la distance OA ?
- 2 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans le repère orthonormé (O, C, J) .
- 3 On suppose $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{BC}$. Montrer que $AE = CD$.

17 Nature d'un triangle et cercle



15 min

Corrigé
p. 247

Lycée Jacques Decour, Paris

Dans un repère (O, I, J) orthonormé du plan, on considère les points $A(-1 ; 0)$, $B(3 ; -2)$ et $C(1 ; 4)$.

- 1 Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.
- 2 Déterminer par le calcul les coordonnées du centre K du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC , puis son rayon r .
- 3 Le point $D(3 ; 4)$ appartient-il à $\mathcal{C}$? Justifier votre réponse.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

18 Avec un cercle



20 min

Corrigé
p. 248

Lycée Champollion, Grenoble

Soient $A(2; 1)$, $B(5; 3)$, $C(7; 0)$ et $E\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)$ dans un repère orthonormé.

- 1 Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
- 2 Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre E et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$.
 - (a) Vérifier que A , B et C sont des points de $\mathcal{C}$ et que E est le milieu de $[AC]$.
 - (b) Construire $\mathcal{C}$.
- 3 Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$?

19 Alignement de points



20 min

Corrigé
p. 248

Lycée Buffon, Paris

On se place dans un repère orthonormé et on donne : $A(-5; 6)$, $B(-1; 1)$, $C(7; -8)$ et $D(9; 9)$.

- 1 Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
- 2 Les points A , B et C sont-ils alignés ? (justifier)
- 3 Le triangle ABD est-il rectangle en B ? (justifier)

20 Parallélogramme et triangle



10 min

Corrigé
p. 249

Lycée Montesquieu, Le Mans

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points $A(-1; -1)$, $B(1; 3)$ et $C(4; -1)$.

- 1 Déterminer les coordonnées du point D de manière à ce que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 2 Déterminer les coordonnées du centre de $ABCD$.
- 3 Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

21 Récapitulatif



15 min

Corrigé
p. 250

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J) .

On considère les points $A(1; 5)$, $B(-2; -1)$, $C(7; -1)$ et $H(1; 2)$.

- 1 Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 2 Soit $E(4; -7)$. Montrer que $ABEC$ est un parallélogramme.
- 3 Montrer que le triangle HCE est rectangle en C .

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

22 Alignement de points



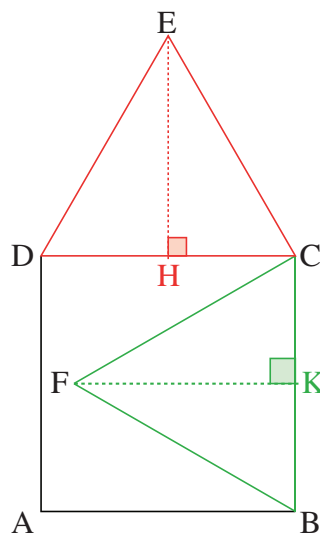
20 min

Corrigé
p. 251

Lycée Fénélon, Paris

Soit $ABCD$ un carré. Les triangles DCE et BCF sont équilatéraux de hauteurs HE et KF .

On considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.



- 1 Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, C, D, H et K .
- 2 Calculer les hauteurs HE et KF .
- 3 En déduire les coordonnées des points E et F .
- 4 Montrer que E, F et A sont alignés.

23 En s'aidant des vecteurs



20 min

Corrigé
p. 252

Lycée Fénélon, Paris

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points $A(3; 5)$, $B(-6; 2)$ et $C(-4; -4)$.

- 1 Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 2 (a) Calculer AC et BD .
(b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
- 3 (a) Calculer les coordonnées du point M milieu de $[AB]$.
(b) Les droites (BC) et (OM) sont-elles parallèles?
- 4 Soit N un point sur l'axe des abscisses. Déterminer l'abscisse de N pour que les droites (AO) et (MN) soient parallèles.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

24 Triangles et droites parallèles



30 min

Corrigé
p. 253

Lycée Saint-Aspais, Fontainebleau

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on considère les points : $A(3 ; 3)$, $B(5 ; 2)$, $C(1 ; -1)$, $E(11 ; 2)$, $F(7 ; 4)$.

- 1 Faire une figure.
- 2 Montrer que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.
- 3 Montrer que le triangle ABC est rectangle.
- 4 Soit $G(7 ; -6)$
 - (a) Calculer FG , EF et EG .
 - (b) Montrer que les triangles ABC et EFG ont leurs côtés proportionnels.

25 Un peu de recherche



30 min

Corrigé
p. 254

Lycée Victor Louis, Talence

Dans un repère orthonormé, on considère les points $M(-1 ; 1)$, $N(1 ; -5)$ et $P(-4 ; 0)$.

- 1 Démontrer que le triangle MNP est rectangle.
- 2 Les points R , S , T et U ont pour coordonnées $R(7 ; -3)$, $S(5 ; 3)$, $T(-2 ; 4)$ et $U(-5 ; 3)$. Démontrer que $MNRS$ est un parallélogramme.
- 3 Soit L le milieu de $[ST]$. Déterminer les coordonnées du point V , symétrique de M par rapport à L .
- 4 Le point H a pour coordonnées $(-3 ; -1)$. Démontrer que les points M , V , H d'une part et N , P et H d'autre part, sont alignés. Que peut-on en conclure ?
- 5 Démontrer que (MV) est perpendiculaire à (NP) .
- 6 Démontrer l'égalité : $MH^2 = HN \times HP$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 QCM Relation de Chasles

Énoncé
p. 229

- 1 Réponse **b** : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.
- 2 Réponse **c** : $\vec{BA} - \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{CB} = \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$.
- 3 Réponse **a** : $\vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CA} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$.

2 QCM Test de connaissances générales

Énoncé
p. 229

- 1 Réponse **b** : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Les autres égalités sont fausses.
- 2 Réponses **c** et **d**. Pour les coordonnées de $\vec{BC}$, il suffit de diviser par deux celles de $2\vec{BC}$ et ensuite, pour les coordonnées de $\vec{CB}$, on multiplie par -1 .
- 3 Réponses **b**, **c** et **d**. En effet,

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$

(c'est une diagonale du parallélogramme).

De plus,

$$\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{DA} = \vec{DB}$$

d'après la relation de Chasles.

Enfin, $\vec{AB} = \vec{DC}$ (c'est une caractéristique des parallélogrammes).

3 V/F Coordonnées des vecteurs

Énoncé
p. 230

- a** Faux. Il faut calculer la *différence* des coordonnées (celles de B moins celles de A). Les coordonnées de $\vec{AB}$ sont : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- b** Vrai. En effet, $\vec{AB} \begin{pmatrix} 5-3 \\ 1-2 \end{pmatrix}$, soit $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- c** Faux : $AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.
- d** Vrai. Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

4 Construction d'un point

Énoncé
p. 230

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Pour construire facilement, le point I , il est préférable de simplifier l'égalité qui le définit.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

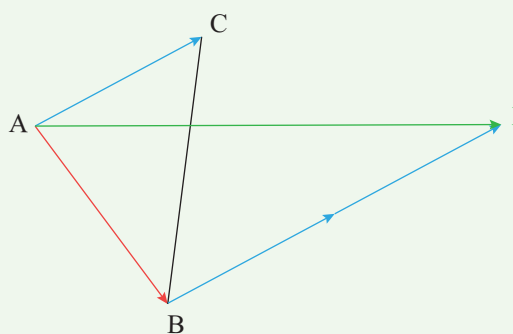
COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}\vec{AI} &= 2\vec{BC} - 3\vec{BA} \\ &= 2\vec{BC} + 3\vec{AB} \\ &= \vec{AB} + 2\vec{AB} + 2\vec{BC} \\ &= \vec{AB} + 2(\vec{AB} + \vec{BC}) \\ &= \vec{AB} + 2\vec{AC}.\end{aligned}$$

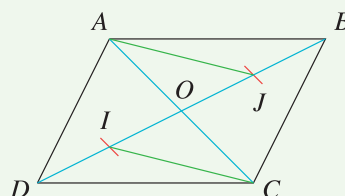
Ainsi, pour construire le point I , on part du point A , on se déplace jusqu'à B , puis on effectue deux fois de suite le même déplacement que pour passer du point A au point C .



5 Transformations

Lycée Colbert, Paris

Énoncé
p. 230



J est le milieu de $[OB]$ donc $\vec{OJ} = \frac{1}{2}\vec{OB}$. On en déduit :

$$\vec{AJ} = \vec{AO} + \vec{OJ} = \vec{AO} + \frac{1}{2}\vec{OB}.$$

De même, on montre $\vec{IC} = \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{DO}$.

Or, O est le milieu de $[AC]$ et $[BD]$, donc $\vec{DO} = \vec{OB}$ et $\vec{AO} = \vec{OC}$. On en déduit $\vec{AJ} = \vec{IC}$, et donc $AJ = IC$.

6 Que de vecteurs !

Énoncé
p. 230

Lycée Fénelon, Paris

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{DE} &= 3\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{EJ} &= \overrightarrow{HE}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NK} - \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CH} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{JB} - \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{LC}\end{aligned}$$

7 Somme de vecteurs

Énoncé
p. 231

Lycée Maurice Genevoix, Montrouge

- De l'origine à l'extrémité de $\vec{u}$, on effectue un déplacement de 1 unité vers la gauche (donc -1 en abscisse) et un déplacement de 1 unité vers le haut (donc $+1$ en ordonnée). On en déduit les coordonnées $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
De même, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- On en déduit les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, et les coordonnées de $A(3 ; 1)$.

8 Calcul vectoriel

Énoncé
p. 231

Lycée Eugène Delacroix, Maisons-Alfort

Comme les points sont équidistants, on peut exprimer chaque vecteur en fonction, par exemple, de $\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de les comparer facilement.

- $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$).
- $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$ car $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{FC} = -3\overrightarrow{DE}$ car $\overrightarrow{FC} = -\overrightarrow{CF} = -3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ car $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.
- $\frac{1}{2}\overrightarrow{BF} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BD}$ car :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF} &= 4\overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{AE} &= 4\overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

et

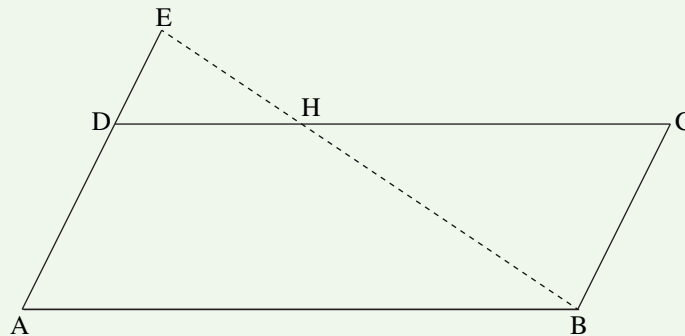
$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}.$$

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

9 Relation de Chasles

Énoncé
p. 231

Lycée Fénelon, Paris



1 $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE}$ et $\vec{BH} = \vec{BC} + \vec{CH}$.

2 • $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE}$
 $= -\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AD}$.

• $\vec{BH} = \vec{BC} + \vec{CH}$
 $= \vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{CD}$
 $= \vec{AD} - \frac{2}{3}\vec{AB}$.

(car $ABCD$ est un parallélogramme)

3 Nous avons exprimé $\vec{BE}$ et $\vec{BH}$ en fonction des mêmes vecteurs ; de plus, on voit le coefficient $-\frac{2}{3}$ devant $\vec{AB}$ dans l'expression de $\vec{BH}$, ce qui nous pousse à calculer $\frac{2}{3}\vec{BE}$:

$$\frac{2}{3}\vec{BE} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\vec{AD} = \vec{BH}.$$

Ainsi, $\vec{BE}$ et $\vec{BH}$ sont colinéaires. Ils ont un point en commun donc les points B , H et E sont alignés.

10 Alignement de points

Énoncé
p. 232

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1 *Rappel* : le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection de ses médianes. La figure est alors celle représentée page suivante.

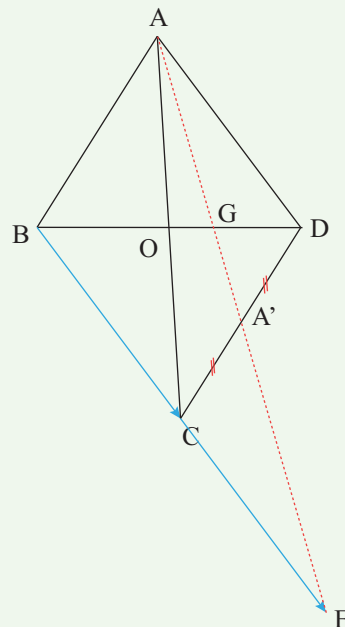
2 $\vec{BE} = 2\vec{BC} \iff \vec{BA} + \vec{AE} = 2\vec{BC}$
 $\iff \vec{AE} = \vec{AB} + 2\vec{BC}.$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}
 \vec{AG} &= \frac{2}{3} \vec{AA'} \\
 &= \frac{2}{3} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA'}) \\
 &= \frac{2}{3} \left(\vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{BA} \right) \\
 &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{BC} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{BC}.
 \end{aligned}$$



4 D'après les question précédentes,
 $\vec{AG} = \frac{1}{3} \vec{AE}$. Par conséquent, les
 vecteurs $\vec{AG}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires.
 Ils ont de plus un point commun : A.
 Les points A, G et E sont donc ali-
 gnés.

11 Alignement de points

Lycée Fénelon, Paris

Énoncé
p. 232

MÉTHODE

Pour démontrer que les points B, C et D sont alignés, il suffit de démontrer que deux vecteurs quelconques formés par ces trois points sont colinéaires.

$$\begin{aligned}
 \vec{BD} &= \vec{BA} + \vec{AD} \\
 &= -\vec{AB} + 3\vec{AB} - 2\vec{AC} \\
 &= 2\vec{AB} - 2\vec{AC} \\
 &= 2(\vec{AB} - \vec{AC}) \\
 &= 2(\vec{AB} + \vec{CA}) \\
 &= 2\vec{CB}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\vec{BD}$ et $\vec{CB}$ sont colinéaires ; or, ils ont un point en commun donc les points B, C et D sont alignés.

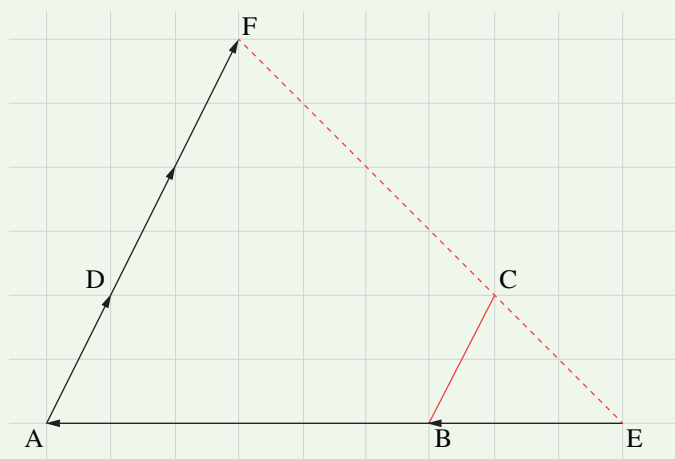
VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

12 Alignement de points

Énoncé
p. 232

Lycée Jacques Decour, Paris

1 La figure est la suivante :



2 Exprimons en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EF}$ par exemple.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

On constate alors que $3\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF}$, donc $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, ce qui prouve que E , C et F sont alignés.

13 Parallélisme

Énoncé
p. 233

Lycée Jacques Decour, Paris

Même si cela n'est pas demandé, nous pouvons appuyer notre raisonnement sur une figure (que nous vous proposons page suivante).

Pour démontrer que les droites (OP) et (IB) sont parallèles, nous allons montrer que $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont colinéaires.

Plaçons-nous dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

$$\begin{aligned}\bullet \quad \overrightarrow{IB} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

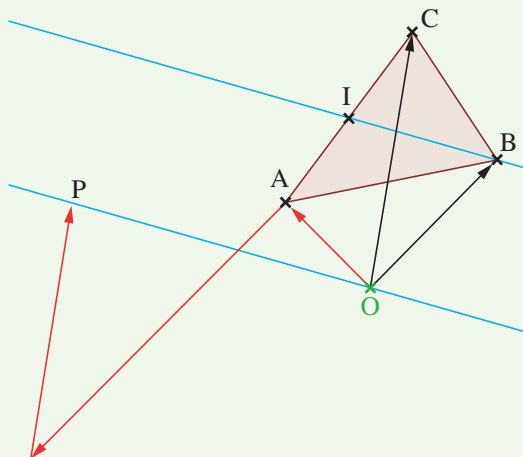
$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \vec{OP} &= \vec{OA} - 2\vec{OB} + \vec{OC} \\
 &= \vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OB} + \vec{OC} \\
 &= \vec{OA} + \vec{BO} + \vec{BO} + \vec{OC} \\
 &= \vec{BA} + \vec{BC} \\
 &= -\vec{AB} + \vec{BA} + \vec{AC} \\
 &= -2\vec{AB} + \vec{AC}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $-2\vec{IB} = \vec{AC} - 2\vec{AB} = \vec{OP}$, donc $\vec{OP}$ et $\vec{IB}$ sont colinéaires, ce qui signifie que (OP) et (IB) sont parallèles.

Remarque : on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}
 \vec{OP} &= \vec{OA} + 2\vec{BO} + \vec{OC} \\
 &= \vec{OI} + \vec{IA} + 2\vec{BI} + 2\vec{IO} + \vec{OI} + \vec{IC} \\
 &= \vec{IA} + \vec{IC} + 2\vec{BI} \\
 &= 2\vec{BI}
 \end{aligned}$$

pour démontrer que $\vec{OP}$ et $\vec{BI}$ sont colinéaires.



14 Exercice de recherche

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Énoncé
p. 233

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \vec{AM} &= x\vec{AC} \\
 &= x(\vec{AB} + \vec{AD}) \\
 &= x\vec{AB} + x\vec{AD}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \vec{AN} &= \vec{AD} + \vec{DN} \\
 &= \vec{AD} - x^2\vec{AB} + 2x\vec{AD} \\
 &= -x^2\vec{AB} + (1 + 2x)\vec{AD}.
 \end{aligned}$$

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

M et N sont confondus si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \iff x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} = -x^2\overrightarrow{AB} + (1+2x)\overrightarrow{AD}$$

$$\iff \begin{cases} x = -x^2 \\ x = 1 + 2x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x^2 - x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

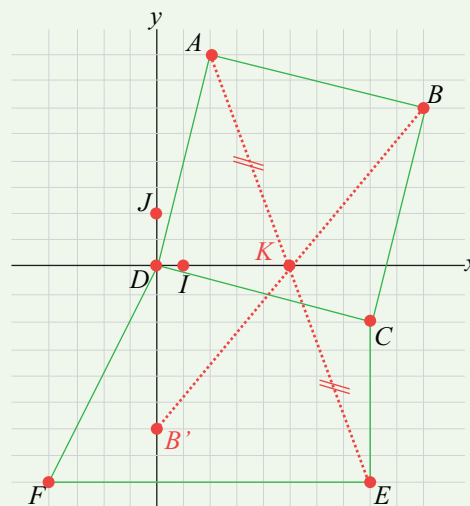
$x = -1$ est solution de la première équation car $-(-1)^2 - (-1) = -1 + 1 = 0$.

Il existe donc bien une valeur de x pour laquelle les deux points sont confondus.

15 Avec une symétrie

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Énoncé
p. 233



- 1 Attention : l'unité en abscisses (1 carreau) n'est pas la même qu'en ordonnées (2 carreaux).

On a alors : $A(2 ; 4)$, $B(10 ; 3)$, $C(8 ; -1)$, $D(0 ; 0)$, $E(8 ; -4)$ et $F(-4 ; -4)$.

- 2 $K\left(\frac{x_A + x_E}{2} ; \frac{y_A + y_E}{2}\right)$ soit $K(5 ; 0)$.

- 3 Notons $B'(x ; y)$ le symétrique de B par rapport à K . Alors, K est le milieu de $[BB']$ et donc :

$$\begin{cases} 5 = \frac{10+x}{2} \\ 0 = \frac{3+y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 10 = 10+x \\ 0 = 3+y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Ainsi, $B'(0 ; -3)$.

COURS

INTERROS

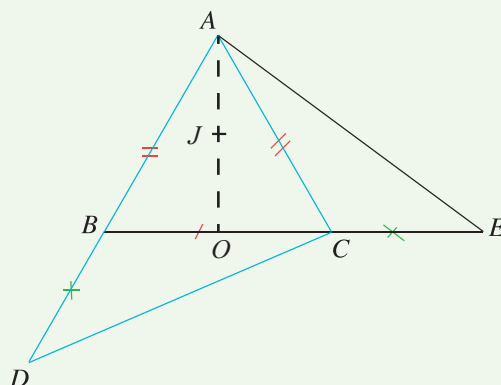
CORRIGÉS

16 Calculs de longueurs

Énoncé
p. 234

Lycée Claude Debussy, Saint-Germain-en-Laye

Notons sur la figure les longueurs égales :



- 1 Plaçons le point O . Le triangle OAC est rectangle en O . On sait que $AC = 2$ et $OC = 1$ (car dans un triangle équilatéral, le pied de la hauteur est le milieu de la base). On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OAC , il vient :

$$AC^2 = AO^2 + OC^2,$$

donc $OA^2 = AC^2 - OC^2 = 4 - 1 = 3$ et $OA = \sqrt{3}$.

- 2 Dans ce repère, on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

- 3 On constate $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$ (relation de Chasles). On en déduit :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + k\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}.$$

De même, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{BC}$.

On en déduit les coordonnées de $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -k-2 \\ -k\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et donc :

$$CD^2 = (-k-2)^2 + 3k^2 = 4k^2 + 4k + 4.$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 1+2k \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ donnent :

$$AE^2 = (1+2k)^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 4.$$

On constate : $AE = CD$.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

17 Nature d'un triangle et cercle

Énoncé
p. 234

Lycée Jacques Decour, Paris

1 MÉTHODE

Quand on nous demande la nature d'un triangle, il faut penser à : « rectangle », « isocèle » et « équilatéral. » Connaître la mesure des trois côtés, ou leurs carrés, est donc suffisant.

$$\begin{aligned} \bullet AB^2 &= (3 - (-1))^2 + (-2 - 0)^2 \\ &= 4^2 + (-2)^2 \\ &= 20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet AC^2 &= (1 - (-1))^2 + (4 - 0)^2 \\ &= 2^2 + 4^2 \\ &= 20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet BC^2 &= (1 - 3)^2 + (4 - (-2))^2 \\ &= (-2)^2 + 6^2 \\ &= 40. \end{aligned}$$

On constate donc que :

- $AB^2 = AC^2$, donc $AB = AC$;
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Ainsi, ABC est un triangle rectangle isocèle en A .

- 2 Nous savons que le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse. Ainsi, K est le milieu de $[BC]$; donc :

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1.$$

Donc $K(2 ; 1)$.

Le rayon de $\mathcal{C}$ est la moitié de BC donc :

$$r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2}.$$

Remarque : on peut aller plus loin dans la simplification de cette dernière fraction en remarquant que $40 = 2^2 \times 10$ et donc que :

$$\sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{4} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}.$$

Ainsi, $r = \sqrt{10}$.

- 3 Afin de voir si D appartient à $\mathcal{C}$, nous pouvons calculer par exemple DK et vérifier si le résultat est égal à r , ou bien (ce qui est plus simple), vérifier que $DK^2 = r^2 = 10$.

$$DK^2 = (2 - 3)^2 + (1 - 4)^2 = (-1)^2 + (-3)^2 = 10.$$

D appartient donc à $\mathcal{C}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

18 Avec un cercle

Énoncé
p. 235

Lycée Champollion, Grenoble

- 1 Nous allons calculer les longueurs des trois côtés de ABC . Utilisons la formule de calcul de la distance :

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

$$AC = \sqrt{(7-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5^2 + 1} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}.$$

$$BC = \sqrt{(7-5)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Il devient clair que ABC est isocèle en B . De plus, on a :

$$AB^2 + BC^2 = 13 + 13 = 26 = AC^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B .

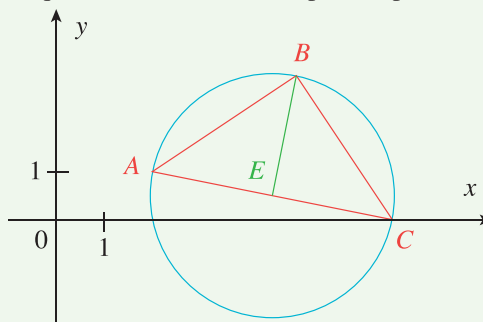
- 2 (a) En s'y prenant par le bon bout, on évite quelques calculs. En effet, il n'est pas difficile de constater que E est bien le milieu de $[AC]$ car $\frac{9}{2} = \frac{2+7}{2}$ et $\frac{1}{2} = \frac{1+0}{2}$.

Or, le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est aussi le centre de son cercle circonscrit, donc $EA = EB = EC$. Puisque $AC = \sqrt{26}$, on a :

$$AE = EC = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Finalement, A , B et C sont des points de $\mathcal{C}$.

- (b) $\mathcal{C}$ n'est autre que le cercle de centre E passant par A :



- 3 Comme ABC est isocèle et rectangle en B , on a nécessairement $\widehat{ACB} = 45^\circ$.

19 Alignement de points

Énoncé
p. 235

Lycée Buffon, Paris

- 1 On applique les formules :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1+5 \\ 1-6 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

De même :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2 Si A , B et C étaient alignés, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ seraient colinéaires (ils dirigeraient la droite passant par A , B et C). Or, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas proportionnelles, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, et donc A , B et C ne sont pas alignés.

3 On calcule les carrés des côtés :

$$AB^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41.$$

$$BD^2 = 10^2 + 8^2 = 100 + 64 = 164.$$

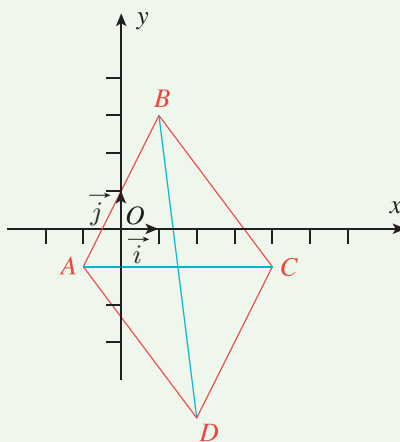
$$AD^2 = 14^2 + 3^2 = 196 + 9 = 205.$$

On constate $AD^2 = AB^2 + BD^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en B .

20 Parallélogramme et triangle

Lycée Montesquieu, Le Mans

Énoncé
p. 235



1 Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ et $C(4 ; -1)$, les coordonnées de D sont $4 - 2$ et $-1 - 4$, donc $D(2 ; -5)$.

2 Le centre du parallélogramme est le milieu des diagonales. En considérant la diagonale $[AC]$, le centre a pour coordonnées :

$$\left(\frac{-1+4}{2} ; \frac{-1-1}{2} \right) \text{ donc } \left(\frac{3}{2} ; -1 \right).$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 Calculons les longueurs des côtés de ABC :

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20,$$

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25,$$

$$AC^2 = 5^2 + 0 = 25.$$

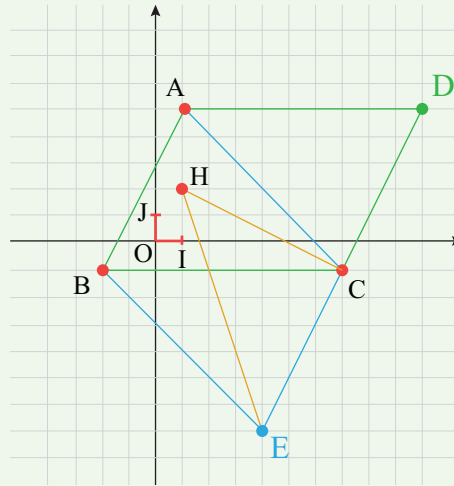
$BC = AC$ donc ABC est isocèle en C . Il n'est pas rectangle.

21 Récapitulatif

Énoncé
p. 235

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Avant tout, même si ce n'est pas demandé, faisons une figure complète :



- 1 On souhaite que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Dans ce cas, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - 7 \\ y_D - (-1) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3 = x_D - 7 \\ 6 = y_D + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_D = 3 + 7 = 10 \\ y_D = 6 - 1 = 5 \end{cases}$$

Ainsi, $D(10; 5)$.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

2 $E(4; -7)$ donc $\vec{EC} \begin{pmatrix} 7-4 \\ -1-(-7) \end{pmatrix}$, soit $\vec{EC} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{EC} = \vec{BA}$; $ABEC$ est donc un parallélogramme.

3 MÉTHODE

Pour déterminer la nature d'un triangle en géométrie analytique, il est très souvent recommandé de calculer le carré de la longueur des côtés.

Calculons donc :

- $HC^2 = (x_C - x_H)^2 + (y_C - y_H)^2 = (7-1)^2 + (-1-2)^2 = 36+9 = 45$.
- $CE^2 = (4-7)^2 + (-7-(-1))^2 = 9+36 = 45$.
- $HE^2 = (4-1)^2 + (-7-2)^2 = 9+81 = 90$.

On peut alors remarquer que :

- $HC^2 = CE^2$, donc $HC = CE$, ce qui signifie que HCE est isocèle en C ;
- $HE^2 = HC^2 + CE^2$, ce qui signifie que HCE est rectangle en C (d'après la réciproque du théorème de Pythagore).

Ainsi, HCE est rectangle isocèle en C .

22 Alignement de points

Énoncé
p. 236

Lycée Fénelon, Paris

1 $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 1)$, $H\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ et $K\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

2 Dans le triangle équilatéral DCE , (EH) est une hauteur donc le triangle EHC est rectangle en H .

Ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} EC^2 &= HC^2 + HE^2 \\ 1^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + HE^2 & \text{donc } EH^2 &= 1 - \frac{1}{4} \\ \text{car } EC &= DC = 1 & EH &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ 1 &= \frac{1}{4} + HE^2 & EH &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Les triangles BCF et DCE étant identiques, $KF = HE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 3 On déduit de la question précédente que :

$$F \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad E \left(\frac{1}{2} ; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

4 $\overrightarrow{AF} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} \right)$ et $\overrightarrow{AE} \left(\frac{1}{2} ; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Or,

$$\underbrace{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}_{\text{identité remarquable : } (a-b)(a+b)} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, ce qui signifie que les points A , F et E sont alignés.

23 En s'aidant des vecteurs

Énoncé
p. 236

Lycée Fénélon, Paris

- 1 Notons $D(x ; y)$. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} &\iff \begin{pmatrix} -6-3 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-x \\ -4-y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -9 = -4-x \\ -3 = -4-y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -4+9 = 5 \\ y = -4+3 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $D(5 ; -1)$.

2 (a) $AC^2 = (-4-3)^2 + (-4-5)^2 ; BD^2 = (5+6)^2 + (-1-2)^2$
 $= 49 + 81 \qquad \qquad \qquad = 121 + 9$
 $AC = \sqrt{130}. \qquad \qquad \qquad BD = \sqrt{130}.$

- (b) On constate alors que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ ont la même longueur, donc $ABCD$ est un rectangle.

De plus, d'après les calculs précédents, $AB = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$, qui est différent de AD , côté du carré, donc ce n'est pas un carré.

3 (a) $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{3}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7}{2}$.
 Donc $M \left(-\frac{3}{2} ; \frac{7}{2} \right)$.

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7

(b) $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$. Regardons s'ils sont colinéaires :

$$2 \times \frac{7}{2} - (-6) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 7 - 9 = -2 \neq 0.$$

Donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OM}$ ne sont pas colinéaires, ce qui montre que les droites (BC) et (OM) ne sont pas parallèles.

4 Notons $N(x ; 0)$ (car N est sur l'axe des abscisses, donc son ordonnée est nulle). (AO) et (MN) sont parallèles si et seulement si :

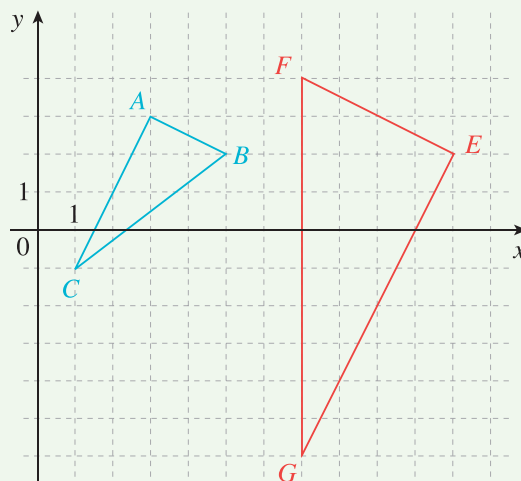
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x + \frac{3}{2} \\ 0 - \frac{7}{2} \end{pmatrix} \text{ colinéaires} &\iff 3 \left(0 - \frac{7}{2}\right) - 5 \left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \\ &\iff -\frac{21}{2} - 5x - \frac{15}{2} = 0 \\ &\iff -\frac{36}{2} - 5x = 0 \\ &\iff x = -\frac{18}{5}. \end{aligned}$$

24 Triangles et droites parallèles

Lycée Saint-Aspais, Fontainebleau

Énoncé
p. 237

1



2 Méthode 1 : On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Ces coordonnées sont proportionnelles donc les deux vecteurs sont *colinéaires* : les droites (AB) et (EF) sont donc parallèles.

Méthode 2 : On calcule le coefficient directeur des droites (AB) et (EF) .
Pour (AB) , on a :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 3}{5 - 3} = \frac{-1}{2}.$$

On obtient le même coefficient directeur pour la droite (EF) , donc $(AB) \parallel (EF)$.

- 3** On calcule les longueurs AB , AC et BC , par la formule habituelle :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

De même, $AC = 2\sqrt{5}$ et $BC = 5$.

On applique alors la réciproque du théorème de Pythagore :

$$AB^2 + AC^2 = 5 + 20 = 25 = BC^2$$

donc le triangle ABC est rectangle en A .

- 4** (a) On obtient : $FG = 10$, $EF = 2\sqrt{5}$ et $EG = 4\sqrt{5}$.
(b) On constate :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AC}{EG} = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BC}{FG} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Les côtés des triangles ABC et EGF sont donc proportionnels.

25 Un peu de recherche

Énoncé
p. 237

Lycée Victor Louis, Talence

Dans cet exercice, on utilise à plusieurs reprises la formule permettant de calculer la distance entre deux points A et B dans un repère orthonormé :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

On commence par une figure, où l'on place les points au fur et à mesure (voir page ci-contre).

- 1** Nous allons appliquer la réciproque du théorème de Pythagore. On calcule les carrés des côtés :

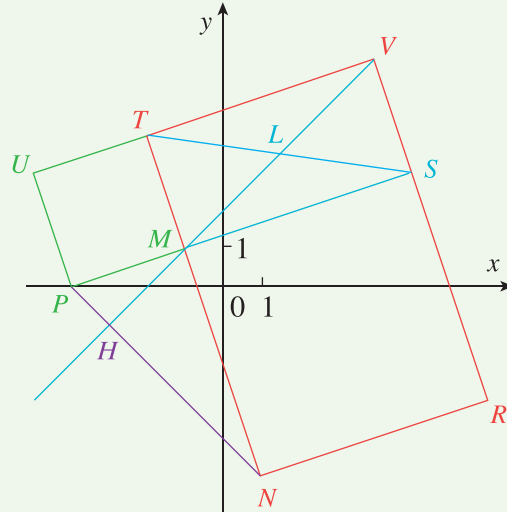
$$MN^2 = (1 - (-1))^2 + (-5 - 1)^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40.$$

$$MP^2 = (-4 - (-1))^2 + (-1)^2 = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10.$$

$$PN^2 = (1 - (-4))^2 + (0 - (-5))^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50.$$

On constate : $MN^2 + MP^2 = PN^2$ donc le triangle MNP est rectangle en M .

VECTEURS ET COORDONNÉES DANS LE PLAN • CHAP. 7



- 2** Pour montrer que $MNRS$ est un parallélogramme, on a deux méthodes possibles utilisant les coordonnées :

- Avec les vecteurs. On calcule les coordonnées de :

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{SR} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

On constate $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SR}$ donc $MNRS$ est un parallélogramme.

- Avec les milieux. Le milieu de $[MR]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{-1+7}{2}; \frac{1-3}{2}\right)$, donc $(3; -1)$. Le milieu de $[SN]$ a les mêmes coordonnées. $[MR]$ et $[SN]$ ont même milieu, on en déduit que $MNRS$ est un parallélogramme.

- 3** Là encore, deux méthodes possibles :

- Avec les vecteurs. L est le milieu de $[ST]$ et de $[MV]$ donc $MTVS$ est un parallélogramme, et $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{TV}$. On calcule :

$$\overrightarrow{MS} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Notons $V(x, y)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{TV}$ sont :

$$\overrightarrow{TV} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} x+2=6 \\ y-4=2 \end{cases}$$

D'où $x=4$ et $y=6$. Il vient : $V(4, 6)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- Avec les milieux. On calcule les coordonnées de L , milieu de $[ST]$:

$$L \left(\frac{5-2}{2} ; \frac{3+4}{2} \right).$$

donc $L \left(\frac{3}{2} ; \frac{7}{2} \right)$.

Notons $V(x, y)$; L étant le milieu de $[MV]$, ses coordonnées s'écrivent également :

$$L \left(\frac{x-1}{2} ; \frac{y+1}{2} \right).$$

On identifie, on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

On obtient $x = 4$ et $y = 6$, et donc $V(4 ; 6)$.

- 4** On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MV} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MH} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. On

constate que $\overrightarrow{MV}$ et $\overrightarrow{MH}$ sont colinéaires (coordonnées proportionnelles), donc M , V et H sont alignés.

De même :

$$\overrightarrow{NP} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NH} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{NH}$ sont colinéaires, donc N , P et H sont alignés.

On en conclut que les droites (MV) et (NP) se coupent en H .

- 5** Montrer que (MV) est perpendiculaire à (NP) revient à montrer que MHP est un triangle rectangle. On calcule comme à la première question :

$$MH^2 = 8,$$

$$PH^2 = 2,$$

$$MP^2 = 10.$$

$MP^2 = MH^2 + PH^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, MPH est un triangle rectangle en H . Donc (MV) est perpendiculaire à (NP) .

- 6** On calcule encore $HN^2 = 32$. L'égalité demandée ne concerne que des nombres positifs, on obtient une égalité équivalente en élevant au carré. Montrons donc que :

$$MH^4 = HN^2 \times HP^2.$$

On a $HN^2 = 32$, $HP^2 = 2$ et $MH^2 = 8$ donc $MH^4 = 64$. On a bien $64 = 32 \times 2$, donc l'égalité $MH^4 = HN^2 \times HP^2$ est vraie, et donc :

$$MH^2 = HN \times HP.$$

Équations de droites. Systèmes linéaires

Plan du chapitre

1. Équations de droites
2. Système d'équations linéaires

1 Équations de droites

Exercice type 1

Lycée Paul Valéry, Sète

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient trois points $A(-1 ; -1)$, $B(-3 ; 0)$ et $C(3 ; 2)$.

Donner une équation de (AB) , puis de la parallèle à (AB) passant par C .

Voir corrigé page 263

1.1 Qu'est-ce qu'une équation de droite ?

Au collège, vous avez rencontré des fonctions affines, de la forme $f(x) = mx + p$. Si on se donne un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on peut la représenter graphiquement par une droite D , qui contient tous les points de coordonnées $(x; y)$ où $y = mx + p$.

Prenons l'exemple de $f(x) = -3x + 2$. On calcule :

$$f(1) = -1, f(-3) = 11, f(2) = -4,$$

donc la droite D contient, entre autres, les points de coordonnées :

$$(1; -1), (-3; 11), (2; -4).$$

Inversement, si $A(-1; 5)$, alors $A \in D$ car $f(-1) = 5$; si $B(2; 5)$, alors $B \notin D$ car $f(2) \neq 5$.

Pour tout point M de coordonnées $(x; y)$:

- si $y = -3x + 2$, alors M est un point de D ;
- si $y \neq -3x + 2$, alors M n'est pas un point de D .

Autrement dit, les coordonnées des points de D sont les solutions de l'équation à deux inconnues $y = -3x + 2$.

On dit donc que $y = -3x + 2$ est une *équation réduite de la droite D*.

Pourquoi « réduite » ? Parce que sous sa forme la plus générale (appelée « équation cartésienne »), une équation de droite s'écrit $ax + by + c = 0$.

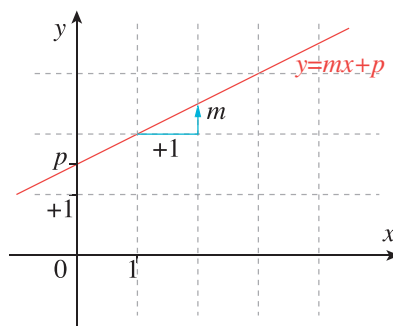
Si $b \neq 0$, cette équation se ramène à la forme réduite : $y = mx + p$, avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

Si $b = 0$ et $a \neq 0$, l'équation se ramène à $x = -\frac{c}{a}$. La droite D ne représente plus une fonction affine, mais contient tous les points qui ont l'abscisse $-\frac{c}{a}$: il s'agit donc d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (dite droite « verticale »).

Si A et B sont deux points distincts sur la droite D , la *direction* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ne dépend pas des points A et B . On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur *directeur* de D . La droite D possède une infinité de vecteurs directeurs, non nuls, tous colinéaires, qui caractérisent la *direction* de D : deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont les mêmes vecteurs directeurs.

1.2 Équation réduite $y = mx + p$

On considère une droite D qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) . Elle admet une équation réduite $y = mx + p$.



p s'appelle l'*ordonnée à l'origine*, car le point de coordonnées $(0 ; p)$ appartient à la droite D . p est l'ordonnée du point de D situé à la verticale de l'origine O (d'où son nom).

m s'appelle la *pente de la droite*. Ce coefficient caractérise l'inclinaison de D par rapport à (Ox) , et deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente. Si $m = 0$, la droite D est parallèle à (Ox) . Si $m > 0$, la fonction affine $x \mapsto mx + p$ est croissante, c'est-à-dire que les ordonnées augmentent quand les abscisses augmentent. Si $m < 0$, c'est l'inverse. Plus la valeur absolue $|m|$ est grande, plus la direction de la droite D se rapproche de la verticale.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

Pour mieux le comprendre, considérons deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sur D . Comme $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$, on a par soustraction : $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$.

Si on choisit :

$$x_B = x_A + 1,$$

on obtient un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

C'est ce qu'on appelle la méthode « des petits pas », ou de « l'escalier » : à partir d'un point A de D , on ajoute $+1$ à l'abscisse, il faut ajouter $+m$ à l'ordonnée pour obtenir un autre point de la droite. On constate que, plus m est grand, plus le vecteur directeur est proche de la direction de (Oy) .

1.3 Équation cartésienne d'une droite $ax + by + c = 0$

Supposons que l'équation de la droite D soit donnée sous la forme générale $ax + by + c = 0$. Pour trouver des points sur D , on fixe arbitrairement x ou y et on résout l'équation à une inconnue obtenue.

Par exemple, si D a pour équation $2x - 3y - 4 = 0$. Pour $y = 0$, on a : $2x - 4 = 0$, donc $x = 2$. Pour $x = 3$, on a : $-3y + 2 = 0$, donc $y = \frac{2}{3}$. La droite D passe donc par les points de coordonnées $(2; 0)$ et $\left(3; \frac{2}{3}\right)$.

Si on prend deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sur D , on a :

$$ax_A + by_A + c = 0$$

et

$$ax_B + by_B + c = 0,$$

donc par soustraction :

$$a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0.$$

Ainsi, si $x_B - x_A = -b$, on constate que $y_B - y_A = a$ convient.

Conclusion : on obtient un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Remarque : dans une équation cartésienne de droite, les coefficients a et b ne peuvent pas être tous les deux égaux à zéro (sinon, il n'y a plus d'inconnue dans l'équation !), donc il est certain que ce vecteur n'est pas nul.

Par exemple, si

$$D : 2x - 3y - 4 = 0,$$

le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On retrouve ce qui a été dit au début : si $b \neq 0$, on est ramené à une équation réduite $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b}$, et on connaît le vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

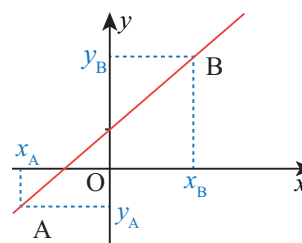
Remarque : $\vec{u} = a\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de D , de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

1.4 Pente d'une droite non verticale

1.4.1 - On connaît deux points

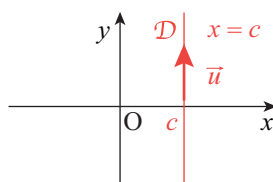
On peut calculer la pente à partir de deux points de la droite $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$



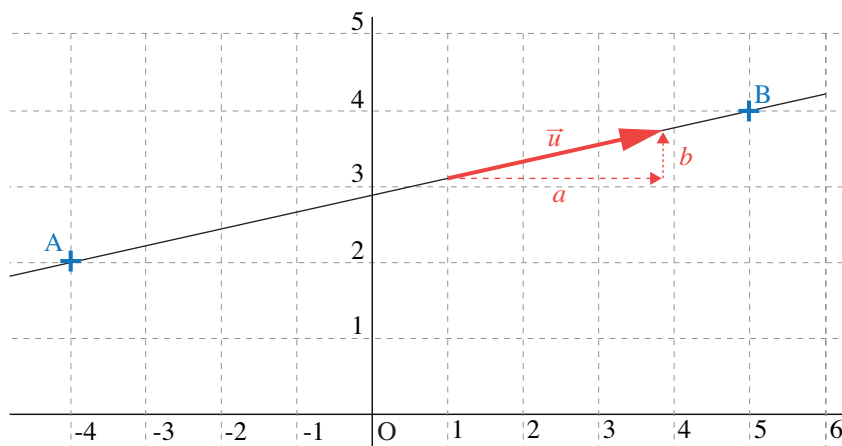
1.4.2 - On connaît un vecteur directeur

- Si le vecteur directeur est de la forme $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$, alors la droite est verticale et n'a donc pas de pente (parfois, on dit qu'elle a une pente « infinie »).



- Si le vecteur directeur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$, alors on remarque que le vecteur $\frac{1}{a}\vec{u}$, qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}$, est aussi un vecteur directeur de la droite, dont les coordonnées sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, donc $m = \frac{b}{a}$.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8



1.5 Comment déterminer l'équation d'une droite ?

1.5.1 - Méthode par identification

Pour plus de clarté, nous allons traiter quelques exemples.

1.5.1.1 - Cas d'une droite passant par un point donné et dirigée par un vecteur non nul

Soit $A(2; 3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet une équation $ax + by + c = 0$, avec $-b = 1$, $a = 2$.

Comme A est sur la droite, on a $2a + 3b + c = 0$. Ces renseignements permettent de calculer $a = 2$, $b = -1$ et $c = -1$, d'où l'équation $2x - y - 1 = 0$.

1.5.1.2 - Cas d'une droite passant par deux points distincts donnés

Soient $A(1; 1)$ et $B(-2; 3)$.

Les deux points n'ont pas la même abscisse, la droite (AB) n'est donc pas verticale et elle admet une équation réduite $y = mx + p$. Comme les coordonnées de A et B sont solutions, on obtient : $1 = m + p$ et $3 = -2m + p$. En soustrayant, il vient $-2 = 3m$, donc $m = -\frac{2}{3}$ et $p = \frac{5}{3}$.

La droite (AB) a pour équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. On peut multiplier par 3 pour obtenir une équation à coefficients entiers : $2x + 3y - 5 = 0$.

On note qu'une droite a une seule équation réduite, mais qu'elle a une infinité d'équations, toutes proportionnelles. En cherchant l'équation réduite, on obtient un problème plus simple avec seulement deux coefficients à trouver.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1.5.2 - Méthode du déterminant

1.5.2.1 - Cas d'une droite passant par un point donné et dirigée par un vecteur non nul

Soit $A(2; 3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On considère un point $M(x; y)$. Ce point est sur la droite D si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

On détermine les coordonnées de $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$.

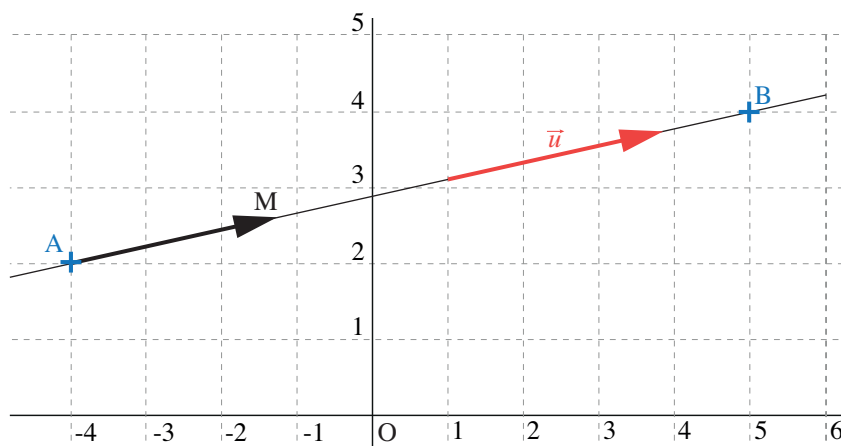
On sait que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est égal à zéro. On calcule donc le déterminant de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$:

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = (x-2) \times 2 - (y-3) \times 1.$$

On retrouve, après les simplifications, l'équation de D : $2x - y - 1 = 0$.

1.5.2.2 - Cas d'une droite passant par deux points distincts donnés

Soit $A(-4; 2)$ et $B(5; 4)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) .



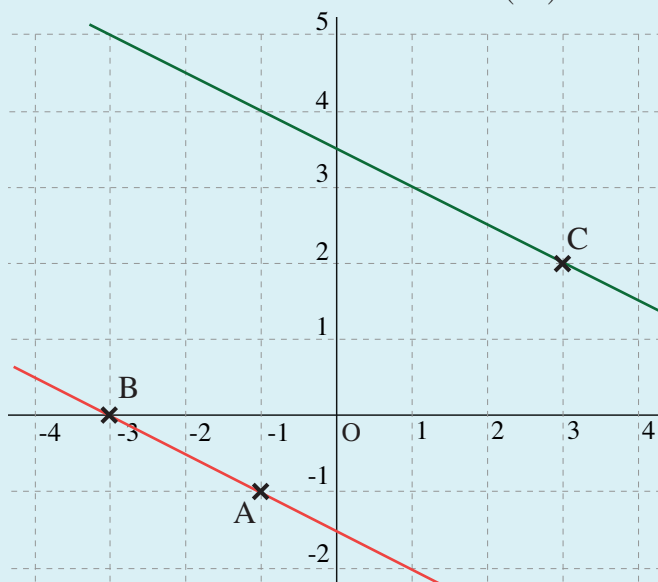
On est ramené au cas précédent. Si $M(x; y)$, alors M est un point de D si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$, c'est-à-dire : $2(x+4) - 9(y-2) = 0$, donc l'équation de D est : $2x - 9y + 26 = 0$.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

➔ Solution de l'exercice type 1

Lycée Paul Valéry, Sète

On a d'abord besoin des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Nous allons utiliser les deux méthodes, assez différentes dans l'esprit.

- 1** *Identification* : les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ donnent directement le coefficient directeur de (AB) : $-\frac{1}{2}$.

L'équation réduite de (AB) s'écrit $y = -\frac{1}{2}x + p$. Comme $A(-1 ; -1)$ est un point de (AB) , on a : $-1 = \frac{1}{2} + p$, d'où $p = -\frac{3}{2}$.

Conclusion : (AB) a pour équation réduite $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

- 2** *Vecteurs colinéaires* : notons D la droite parallèle à (AB) et passant par C . Elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. Le point $M(x ; y)$ appartient à D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On écrit leurs coordonnées :

$$\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En exprimant que les deux vecteurs sont colinéaires, on a :

$$(x-3) \times 1 - (y-2) \times (-2) = 0,$$

ce qui donne $x + 2y - 7 = 0$ et donc, en simplifiant :

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Voir énoncé page 257

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2 Système d'équations linéaires

Exercice type 2

Lycée Fustel-de-Coulanges, Massy

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x^2 - 3y^2 = -19 \end{cases}$$

Voir corrigé page 267

2.1 Cas d'équations sans carrés

On utilise deux méthodes de résolution : substitution ou combinaison.

2.1.1 - Substitution

Il s'agit de calculer l'une des inconnues en fonction des autres grâce à l'une des équations, et de remplacer, de substituer ce que l'on a trouvé dans les autres équations.

Concrètement, dans le système :

$$\begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y = 40 \end{cases} ,$$

on peut calculer grâce à la première équation ($x = y - 16$), et remplacer dans la seconde :

$$\begin{cases} x = y - 16 \\ 3(y - 16) + 5y = 40 \end{cases} .$$

Après simplifications, on a :

$$\begin{cases} x = y - 16 \\ 8y - 48 = 40 \end{cases} .$$

Pour que chaque système que vous écrivez soit équivalent au précédent (c'est-à-dire qu'il aie les mêmes solutions), il faut bien veiller à garder l'équation donnant la valeur de x . On la recopie dans chaque système, sans la modifier. Avec la dernière équation, on obtient : $8y = 88$, donc $y = 11$. On remplace y par 11 dans la première équation :

$$\begin{cases} x = 11 - 16 = -5 \\ y = 11 \end{cases} .$$

Il y a une (unique) solution : $(-5 ; 11)$. Attention si vous donnez l'ensemble des solutions : il ne contient qu'un seul élément.

On note :

$$S = \{(-5 ; 11)\} .$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

2.1.2 - Combinaison

Vous avez le droit, dans un système d'équations, de multiplier les équations par un réel non nul et d'ajouter une des équations à une autre, dans le but de supprimer une inconnue. On obtient alors un système équivalent. N'oubliez pas d'indiquer en marge de votre système les opérations que vous avez réalisées, ce qui permet au correcteur de mieux suivre votre raisonnement. Par exemple, pour le système

$$\begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y = 40 \end{cases}.$$

On peut se débarrasser de y dans la deuxième équation en multipliant la première ligne par 5, et en ajoutant le résultat à la deuxième ligne. Notez ceci :

$L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1$. On obtient :

$$L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \quad \begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y + 5(x - y) = 40 - 5 \times 16 \end{cases}.$$

On simplifie :

$$\begin{cases} y = x + 16 \\ 8x = -40 \end{cases}$$

et enfin :

$$\begin{cases} y = 11 \\ x = -5 \end{cases}.$$

On retrouve :

$$S = \{(-5; 11)\}.$$

2.2 Lien avec les équations de droites

2.2.1 - Interprétation géométrique

Examinons de nouveau le système :

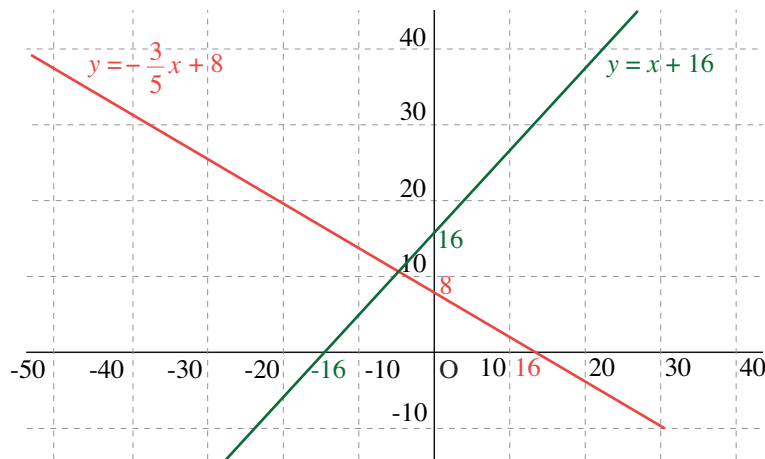
$$\begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y = 40 \end{cases}.$$

Le système ne contenant que des sommes et produits de constantes par x et y , on parle de système *linéaire*. Chaque ligne peut être interprétée comme une équation de droite. Notons D_1 la droite d'équation $x - y + 16 = 0$ et D_2 la droite d'équation $3x + 5y - 40 = 0$. Les points $M(x; y)$ dont les coordonnées sont solutions du système sont les points qui sont à la fois sur D_1 et D_2 . Si les droites ne sont pas parallèles, il n'y en a qu'un.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS



Comment vérifier si les droites sont parallèles ? On sait trouver un vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour D_1 , et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour D_2 . Or ces vecteurs ne sont pas colinéaires (parce que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, ou parce que leur déterminant n'est pas 0).

Dans cet exemple, il est donc certain qu'il existe une solution et une seule.

2.2.2 - Nombre de solutions en fonction du type de système

On considère un système sous la forme :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Sauf dans des cas très particuliers où l'une des lignes ne contient pas d'inconnue (par exemple si $a_1 = b_1 = 0$), les deux lignes sont, comme dans l'exemple précédent, les équations de deux droites D_1 et D_2 . On considère leurs vecteurs directeurs respectifs : $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, les deux vecteurs sont non colinéaires, donc les deux droites sont sécantes, et le système admet un unique couple solution.

Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, les droites D_1 et D_2 sont parallèles.

- Si les deux équations sont proportionnelles, D_1 et D_2 sont confondues et le système admet une infinité de solutions (les coordonnées des points de D_1);
- sinon, les droites D_1 et D_2 sont strictement parallèles, et le système n'admet aucune solution.

À RETENIR

Un système linéaire possède soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

➔ Solution de l'exercice type 2

Lycée Fustel-de-Coulanges, Massy

Pour se ramener à un système linéaire, on pose $X = x^2$ et $Y = y^2$.

On obtient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x^2 - 3y^2 = -19 \end{cases} &\iff \begin{cases} X + Y = 13 \\ 2X - 3Y = -19 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X + Y = 13 \\ 5X = 20 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ &\iff \begin{cases} X + Y = 13 \\ X = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} Y = 13 - 4 = 9 \\ X = 4 \end{cases} . \end{aligned}$$

On obtient enfin :

$$Y = 9 \text{ et } X = 4,$$

ce qui donne $x = 2$ ou $x = -2$, et $y = 3$ ou $y = -3$. En tenant compte de tous les cas, on obtient l'ensemble de solutions suivant :

$$S = \{(2 ; 3), (-2 ; 3), (2 ; -3), (-2 ; -3)\}.$$

Voir énoncé page 264

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Équations de droites

5 min

Corrigé
p. 276

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- 1 La droite D d'équation $y = 3x + 2$ passe par $A(1 ; 2)$.
- 2 Si $A(2 ; 1)$ et $B(-1 ; 2)$, alors (AB) a pour coefficient directeur -3 .
- 3 Les droites $D : y = -2x - 3$ et $D' : y = 5x - 3$ sont parallèles.
- 4 $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $D : y = -3x + 6$.

2 QCM Systèmes d'équations

10 min

Corrigé
p. 276

Quels sont, parmi les systèmes suivants, ceux qui admettent au moins une solution ?

a $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - y = 0 \end{cases}$

b $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 3 \end{cases}$

d $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 4x - 10y = 8 \end{cases}$

Équations de droites

3 Équations de droites

★

5 min

Corrigé
p. 276

Lycée François I^{er}, Le Havre

Soit D la droite d'équation : $y = -3x + 1$. On munit le plan d'un repère (O, I, J) . Soient $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, et t la translation de vecteur $\vec{u}$. Trouver une équation de l'image de D par t .

4 Équations de droites

★

15 min

Corrigé
p. 276

Lycée Carnot, Dijon

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On donne les points $A(1 ; 0)$ et $B(4 ; 2)$. Écrire une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

5 Équations de droites



15 min

Corrigé
p. 277

Lycée Lacordaire, Marseille

- 1 Dans un repère (O, I, J) , déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de coefficient directeur -1 avec $A(2 ; 3)$.
- 2 Donner une équation de Δ , la droite passant par $B(0 ; 2)$ et parallèle à $\mathcal{D}$.
- 3 Construire $\mathcal{D}$ et Δ .

6 Équations de droites



15 min

Corrigé
p. 278

Lycée Voltaire, Paris

On se place dans un repère orthonormé et on donne : $A(1 ; -1)$, $B(3 ; 3)$ et $C(1 ; 6)$.

- 1 Déterminer une équation de la droite (AB) .
- 2 Déterminer une équation de la droite (d) qui passe par le point C et qui est parallèle à la droite (AB) .

7 Équations de droites



20 min

Corrigé
p. 278

Lycée Chaptal, Paris

Le plan étant rapporté à un repère (O, I, J) , on considère les points $A(4 ; -1)$ et $B(3 ; -8)$.

- 1 Montrer que la droite (AB) a pour équation $y = 7x - 29$.
- 2 Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par $C(0 ; -1)$ et parallèle à (AB) .
- 3 Soient $E(3 ; -2)$ et $F(2 ; 2)$. Déterminer une équation de la droite (EF) .
- 4 Les droites $\mathcal{D}$ et (EF) sont-elles sécantes ? Justifier. Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection G .

8 Équations de droites



15 min

Corrigé
p. 279

Lycée du Parc, Lyon

Dans les deux cas suivants, déterminer une équation de la droite Δ , parallèle à (D) et passant par A .

- 1 $A(2 ; 1)$. (D) a comme équation $y = -x + 2$.
- 2 $A(2 ; -3)$. $(D) = (BC)$, avec $B(-1 ; 0)$ et $C(-1 ; 3)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

9 Coordonnées

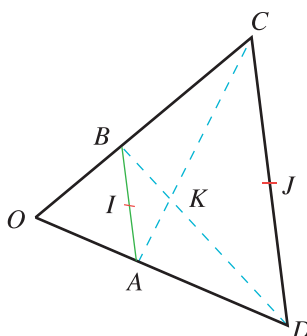


20 min

Corrigé
p. 280

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Soit un trapèze $ABCD$, de bases $[AB]$ et $[CD]$. On suppose que les droites (AD) et (BC) se coupent en O . On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ et K le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) .



Soit k le réel tel que $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA}$. On se place dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

- 1 Quelles sont les coordonnées de O , A , B et D dans ce repère ?
- 2 Quelle est l'équation réduite de la droite (CD) dans ce repère ? En déduire que $C(0 ; k)$.
- 3 Calculer les coordonnées de I , J , et K .
- 4 Montrer que les points O , I , J , et K sont alignés.

10 Équations de droites



20 min

Corrigé
p. 281

Lycée Fénélon, Paris

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

- 1 Déterminer une équation cartésienne de l'image de la droite $\mathcal{D}_1$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.
On donne $\mathcal{D}_1 : y = x - 2$ et $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.
- 2 Déterminer une équation cartésienne de l'image de la droite $\mathcal{D}_2$ par la symétrie centrale de centre Ω .
On donne $\mathcal{D}_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $\overrightarrow{O\Omega} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

11 Équations de droites



30 min

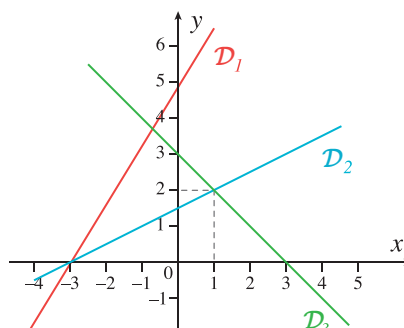
Corrigé
p. 283

Lycée Hoche, Versailles

Retrouver, parmi les équations page ci-contre, celles qui correspondent aux droites du dessin (lorsque cela est possible !).

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

- 1 $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
- 2 $y = \frac{1}{2}x - 2$
- 3 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
- 4 $y = 3x - 3$
- 5 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
- 6 $y = \frac{5}{3}x + 5$



12 Équations de droites

Lycée Condorcet, Paris



25 min

Corrigé
p. 284

À tout réel $m \neq 3$ on associe la droite D_m d'équation :

$$y = \frac{2m-1}{m-3}x + \frac{-7m+6}{m-3}.$$

- 1 Déterminer m et donner une équation de D_m pour que :
 - (a) D_m passe par $A(1; 1)$.
 - (b) D_m passe par O .
 - (c) D_m soit parallèle à l'axe des abscisses.
- 2 Peut-on trouver m tel que :
 - (a) D_m soit parallèle à l'axe des ordonnées ?
 - (b) D_m soit parallèle à Δ d'équation $y = 3x - 6$?
 - (c) D_m admette (-2) comme coefficient directeur ?
- 3 Montrer qu'il existe un point K qui appartient à toutes les droites D_m .

Systèmes d'équations

13 Mise en équations d'un problème

Lycée Fragonard, L'Isle-Adam



10 min

Corrigé
p. 286

On considère une classe de seconde dans laquelle il y a, au départ, deux fois plus de garçons que de filles. Six garçons quittent la salle et six filles arrivent. Il y a alors deux fois plus de filles que de garçons. Combien de garçons et de filles y avait-il au début ?

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

14 Systèmes d'équations



10 min

Corrigé
p. 286

Lycée Jean Monnet, Franconville

Une salle de théâtre compte 150 places, les unes à 21 €, les autres à 26 €. Quand elle est pleine, la recette totale est de 3 300 €. Combien y a-t-il de places de chaque sorte ?

15 Systèmes d'équations



10 min

Corrigé
p. 286

Lycée Notre-Dame, Saint-Nazaire

Si deux capitaux sont placés, le premier (C_1) à 10 % annuels, le second (C_2) à 8 % annuels, alors C_1 rapporte 200 € de plus que C_2 .

Si C_1 était placé à 8 % annuels et C_2 à 10 % annuels, alors C_1 rapporterait 70 € de plus que C_2 .

Déterminer les deux capitaux.

16 Systèmes d'équations



10 min

Corrigé
p. 287

Lycée Auguste Renoir, Asnières-sur-Seine

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + 2y = -1 \\ -2x + 2\sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

17 Systèmes d'équations



15 min

Corrigé
p. 287

Lycée Voltaire, Paris

Résoudre les systèmes suivants :

$$1 \quad \begin{cases} \frac{2x+3y}{6} - \frac{4x-3y}{6} = 1 \\ \frac{3x-2y}{2} - \frac{5x-3y}{2} = 3 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \\ 3x - y = 24 \end{cases}$$

18 À la terrasse d'un café



10 min

Corrigé
p. 288

Lycée Louis Vincent, Metz

À la terrasse d'un café, Sandra et ses amis commandent trois chocolats chauds et deux jus d'orange pour 10,80 €.

Cinq autres de leurs camarades arrivent. Le groupe annule la commande précédente et commande alors six jus d'orange et quatre chocolats chauds pour 23,40 €.

Calculer le prix d'un chocolat chaud et celui d'un jus d'orange.

On notera x le prix d'un chocolat chaud et y le prix d'un jus d'orange.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

19 Droites concourantes



15 min

Corrigé
p. 289

Lycée St Thomas d'Aquin, Paris

On considère le système (S) :

$$\begin{cases} -5x + y = 13 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

- 1 Indiquer, sans le résoudre, le nombre de solutions de (S).
- 2 Résoudre (S).
- 3 Les droites D_1 , D_2 , D_3 , d'équations respectives $y = 5x + 13$,
 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$, $y = -x + 1$, sont-elles concourantes ?

20 Mise en équations d'un problème



20 min

Corrigé
p. 290

Lycée Molière, Paris

Un canot automobile met cinq heures pour aller, par voie fluviale, de la ville A à la ville B. En conservant la même vitesse propre, il met sept heures et trente minutes pour le trajet inverse.

- 1 Combien de temps un radeau se déplaçant à la vitesse du courant mettrait-il pour relier les deux villes ?
- 2 Si la vitesse propre du canot augmentait de 1,6 km/h, il mettrait 45 minutes de moins pour revenir de B vers A. Calculer la vitesse propre du canot et celle du courant.

21 Systèmes d'équations



20 min

Corrigé
p. 291

Lycée Carnot, Dijon

Soit le système :

$$(S) \quad \begin{cases} 5x + y = 4 \\ -3x + 12y = -12 \end{cases}$$

- 1 Sans résoudre, justifier l'existence d'une (ou de plusieurs) solution(s).
- 2 Résoudre le système (S).
- 3 Dédire des questions précédentes la résolution du système :

$$(S') \quad \begin{cases} \frac{5}{x+1} + \frac{1}{y-2} = 4 \\ \frac{-3}{x+1} + \frac{12}{y-2} = -12 \end{cases}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

22 Systèmes d'équations



20 min

Corrigé
p. 291

Lycée David d'Angers, Angers

1 Résoudre le système :

$$\begin{cases} 7x - 4y = 29 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

2 Soit le système :

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \frac{10}{3}x - \frac{5}{3}y - 15 = 0 \end{cases}$$

- (a) Le couple $(0 ; -9)$ est-il solution du système ? Même question avec $(1 ; 6)$ et $(1 ; -7)$. Que peut-on en déduire ?
(b) Donner l'ensemble des solutions du système.

23 Le problème du marché



20 min

Corrigé
p. 292

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

Un fermier et son épouse vont au marché échanger leurs poulets pour du bétail au taux de 85 poulets pour un cheval et une vache, 5 chevaux valant exactement autant que 12 vaches.

« John, dit la femme, prenons encore une fois autant de chevaux que nous en avons déjà pris. Nous n'aurons ainsi que 17 chevaux et vaches à nourrir cet hiver. »

« Je crois que nous devrions avoir plus de vaches que cela, dit John. D'ailleurs, si nous avions 2 fois plus de vaches que jusqu'à maintenant, cela nous ferait 19 vaches et chevaux en tout et nous aurions juste assez de poulets à donner en échange. »

Combien les paysans ont-ils apporté de poulets au marché ?

Pour aller plus loin avec les systèmes...

24 Systèmes d'équations



15 min

Corrigé
p. 293

Lycée Lamartine, Paris

Soit (S) le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ (x + y)^2 = 9 \end{cases}$$

- 1 Quelles sont les valeurs possibles de la somme $x + y$?
2 En déduire les solutions du système (S) .

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

25 Système d'équations avec fractions ★★ 20 min Corrigé p. 294

Lycée Jacques Monod, Clamart

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x^2 - \frac{9}{y+1} = 15 \\ 3x^2 - \frac{24}{y+1} = 19 \end{cases}$$

On posera $X = x^2$ et $Y = \dots$

26 Système non linéaire ★★ 20 min Corrigé p. 294

Lycée Arago, Paris

En posant $X = \frac{1}{x}$ et $Y = y^2$, résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - 5y^2 = 2 \\ \frac{7}{x} + 3y^2 = 12 \end{cases}$$

27 Avec fractions ★★ 15 min Corrigé p. 295

Lycée Hoche, Versailles

Résoudre le système suivant en indiquant la méthode utilisée.

$$\begin{cases} 2u - 3v = 4 \\ 10u + 2v = 3 \end{cases}$$

En déduire la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{2}{x-3} - \frac{3}{y+5} = 4 \\ \frac{5}{x-3} + \frac{1}{y+5} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

28 Avec fractions et carrés ★★ 10 min Corrigé p. 296

Lycée Hoche, Versailles

Résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{3}{(2x+1)^2} - \frac{4}{3y-5} = 32 \\ \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{5}{3y-5} = 12 \end{cases}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Équations de droites

Énoncé
p. 268

- 1 Faux. Si $x = 1$, $3x + 2 = 5$.
- 2 Faux. Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.
- 3 Faux. Elles n'ont pas le même coefficient directeur.
- 4 Vrai. En effet, si $D : mx + p$ alors $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ m \end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur directeur de D .

2 QCM Systèmes d'équations

Énoncé
p. 268

- a Une solution unique. Les deux premières équations représentent des droites de coefficients directeurs $-\frac{2}{3}$ et 5. Elles ne sont donc pas parallèles.
- b Une solution unique. Les deux équations représentent des droites de coefficients directeurs 2 et -1 , donc sécantes.
- c Aucune solution, car si $2x - 3y = 1$, alors $4x - 6y = 2 \neq 3$.
- d Une infinité de solutions, car les deux équations sont proportionnelles et représentent donc la même droite.

3 Équations de droites

Énoncé
p. 268

Lycée François I^{er}, Le Havre

L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle, donc une équation de l'image de D est de la forme :

$$y = -3x + c.$$

Prenons au hasard un point de D , par exemple le point de coordonnées $(1 ; -2)$, que nous noterons M . L'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, est le point de coordonnées $(1 + 2 ; -2 + 1)$, donc $(3 ; -1)$.

L'image de D passe nécessairement par ce point, donc $-1 = -3 \times 3 + c$, ce qui donne : $c = 8$.

Une équation de l'image de la droite D par la translation t est donc :

$$y = -3x + 8.$$

4 Équations de droites

Énoncé
p. 268

Lycée Carnot, Dijon

La difficulté de cet exercice est de trouver la propriété des médiatrices qu'il faut utiliser. On sait que tout point M de coordonnées $(x ; y)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement s'il est équidistant de A et B , c'est-à-dire : $AM = BM$.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

En élevant au carré et en tenant compte de $A(1 ; 0)$ et $B(4 ; 2)$, il vient :

$$\begin{aligned} AM^2 = BM^2 &\iff (x-1)^2 + y^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 \\ &\iff -2x + 1 = -8x - 4y + 20 \\ &\iff 4y = -6x + 19 \\ &\iff y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{4} \text{ (car } \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{)}. \end{aligned}$$

Une équation de la médiatrice est donc :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{4}.$$

5 Équations de droites

Énoncé
p. 269

Lycée Lacordaire, Marseille

- 1 $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur : -1 . Notons $y = -x + c$ son équation.
 $\mathcal{D}$ passe par $A(2 ; 3)$, donc $3 = -2 + c$. On en déduit $c = 5$ et une équation de $\mathcal{D}$ est :

$$y = -x + 5.$$

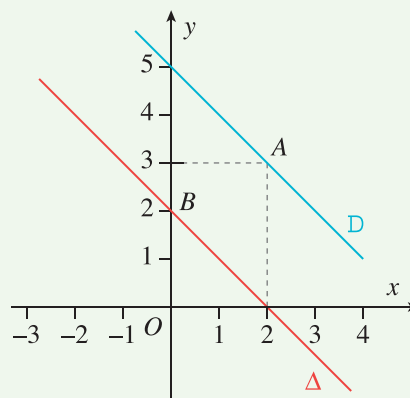
- 2 Puisque Δ est parallèle à $\mathcal{D}$, elle a le même coefficient directeur, donc son équation réduite est du type :

$$y = -x + c.$$

Δ passe par $B(0 ; 2)$, donc $2 = -0 + c$ et $c = 2$. Une équation est donc :

$$y = -x + 2.$$

3



COURS

INTERROS

CORRIGÉS

6 Équations de droites

Énoncé
p. 269

Lycée Voltaire, Paris

- 1 A et B n'ont pas la même abscisse, donc (AB) n'est pas verticale. On en déduit qu'elle admet une équation de la forme : $y = ax + b$. En substituant les coordonnées de A et B à x et y dans l'équation, on obtient le système d'inconnues a et b :

$$\begin{cases} -1 = a + b \\ 3 = 3a + b \end{cases}$$

On tire de la première équation $a = -1 - b$. En substituant cette valeur dans la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned} 3 &= 3(-1 - b) + b \iff 3 = -3 - 3b + b \\ &\iff 6 = -2b \\ &\iff -3 = b \end{aligned}$$

et donc $a = -1 - b = 2$.

Autre méthode : on calcule directement le coefficient directeur a .

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 + 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

L'équation réduite de (AB) est donc du type $y = 2x + b$. On substitue les coordonnées de A (par exemple) dans l'équation : $-1 = 2.1 + b$ et on retrouve $b = -3$.

Une équation de (AB) est donc :

$$y = 2x - 3.$$

- 2 (d) étant parallèle à (AB) , son équation réduite est de la forme :

$$y = 2x + c.$$

Pour calculer c , on utilise les coordonnées de C . $C \in (d)$ donc :

$$6 = 2 \times 1 + c$$

et donc $c = 4$. Une équation de (d) est donc $y = 2x + 4$.

7 Équations de droites

Énoncé
p. 269

Lycée Chaptal, Paris

- 1 Puisqu'on vous donne l'équation, ce n'est pas la peine de vous fatiguer. Vous savez que $y = 7x - 29$ est l'équation d'une droite. Il suffit de vérifier qu'elle passe par A et B . Remplaçons donc x et y par les coordonnées de A : $7 \times 4 - 29 = -1$. Cette égalité est vraie, donc A est bien un point de la droite. De même, $7 \times 3 - 29 = -8$ donc B est bien un point de la droite. Deux points suffisent à déterminer une droite, donc $y = 7x - 29$ est bien une équation de la droite (AB) .

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2** Une parallèle à (AB) a même coefficient directeur, la droite cherchée aura donc une équation du type :

$$y = 7x + b.$$

Comme elle passe par $C(0 ; -1)$, l'ordonnée à l'origine (b) vaut -1 . D'où l'équation $\mathcal{D} : y = 7x - 1$.

- 3** E et F n'ont pas la même abscisse, donc la droite (EF) n'est pas parallèle à (Oy) . Elle admet donc une équation du type $y = ax + b$. Comme elle passe par $E(3 ; -2)$ et $F(2 ; 2)$, on obtient les équations :

$$\begin{cases} -2 = 3a + b \\ 2 = 2a + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = a \text{ (en soustrayant)} \\ b = 2 - 2a = 2 + 8 = 10 \text{ (en substituant la valeur de } a) \end{cases}$$

D'où l'équation de $(EF) : y = -4x + 10$.

- 4** Les droites $\mathcal{D}$ et (EF) sont sécantes car elles n'ont pas le même coefficient directeur.

On calcule leur intersection en résolvant le système :

$$\begin{cases} y = 7x - 1 \text{ (équation de } \mathcal{D}) \\ y = -4x + 10 \text{ (équation de } (EF)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -11x + 11 \text{ (en soustrayant)} \\ y = 7x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

Le point d'intersection a donc pour coordonnées $G(1 ; 6)$.

8 Équations de droites

Énoncé
p. 269

Lycée du Parc, Lyon

- 1** On veut une droite parallèle à (D) , donc les coefficients directeurs de D et Δ sont égaux. Écrivons provisoirement l'équation réduite de Δ :

$$y = -x + b$$

et calculons b en exprimant que Δ passe par $A(2 ; 1)$:

$$1 = -2 + b \Leftrightarrow 3 = b$$

L'équation réduite de Δ est :

$$y = -x + 3.$$

- 2** Là, il y a une légère astuce. En effet, B et C ont la même abscisse, donc la droite (BC) est verticale. La droite Δ est donc également verticale, donc elle admet une équation du type $x = c$. Comme Δ passe par le point A d'abscisse 2, son équation est :

$$x = 2.$$

9 Coordonnées

Énoncé
p. 270

Lycée Montesquieu, Bordeaux

1 Dans le repère (O, A, B) , on a : $O(0 ; 0)$, $A(1 ; 0)$, $B(0 ; 1)$ et $D(k ; 0)$ (car $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA}$).

2 (CD) est parallèle à (AB) . Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1.$$

L'équation réduite de (CD) est donc de la forme : $y = -x + c$. (CD) passe par $D(k ; 0)$, donc $0 = -k + c$, d'où l'équation réduite de (CD) :

$$y = -x + k.$$

C est sur l'axe des ordonnées (car O , B et C sont alignés) donc son ordonnée est l'ordonnée à l'origine de (CD) . On en déduit $C(0 ; k)$.

3 I est le milieu de $[AB]$. Or $A(1 ; 0)$ et $B(0 ; 1)$, d'où :

$$I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

J est le milieu de $[CD]$; or $C(0 ; k)$ et $D(k ; 0)$ d'où :

$$J\left(\frac{k}{2}; \frac{k}{2}\right).$$

Pour calculer les coordonnées de K , intersection des droites (AC) et (BD) , on écrit les équations de ces deux droites.

Le coefficient directeur de (AC) est :

$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{k}{-1} = -k.$$

Comme (AC) passe par $C(0 ; k)$, son ordonnée à l'origine est k , d'où (AC) : $y = -kx + k$.

Le coefficient directeur de (BD) est :

$$\frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{-1}{k}.$$

Comme (BD) passe par $B(0 ; 1)$, son ordonnée à l'origine est 1, d'où (BD) : $y = \frac{-1}{k}x + 1$. On résout le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -kx + k \\ y = \frac{-1}{k}x + 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} -kx + k = \frac{-1}{k}x + 1 \\ y = -kx + k \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \left(\frac{1}{k} - k\right)x = 1 - k \\ y = -kx + k \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{1 - k^2}{k}x = 1 - k \\ y = -kx + k \end{cases} \end{aligned}$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

On sait que $1 - k^2 = (1 - k)(1 + k)$, on obtient donc :

$$x = \frac{k(1 - k)}{1 - k^2} = \frac{k(1 - k)}{(1 - k)(1 + k)} = \frac{k}{1 + k}$$

et donc

$$y = -kx + k = \frac{-k^2}{1 + k} + \frac{k + k^2}{1 + k} = \frac{k}{1 + k}.$$

On conclut :

$$K \left(\frac{k}{1 + k} ; \frac{k}{1 + k} \right).$$

Remarquons que les valeurs gênantes $k = 0$, $k = 1$ ou $k = -1$ sont impossibles :

- Si $k = 0$, alors $\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ donc $O = D$, mais alors C , B et D sont alignés, ce qui n'est pas possible car $ABCD$ est un trapèze.
- Si $k = 1$, alors $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}$ donc $D = A$, ce qui contredit également la définition de $ABCD$.
- Si $k = -1$, alors $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$ signifie que O est le milieu de $[AD]$. O serait également, d'après la question 2, le milieu de $[BC]$, et donc $ABDC$ serait un parallélogramme, ce qui n'est pas possible.

- 4 Pour les points O , I , J et K , l'ordonnée est égale à l'abscisse, donc ces quatre points sont sur la droite d'équation $y = x$.

10 Équations de droites

Énoncé
p. 270

Lycée Fénélon, Paris

- 1 L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle, donc l'image de $(\mathcal{D}_1)$ est une droite dont l'équation est de la forme : $y = x + c$. Pour calculer c , choisissons au hasard un point de $\mathcal{D}_1$.

Appelons M le point de coordonnées $(1 ; -1)$, qui est bien sur $(\mathcal{D}_1)$.

Son image par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1 - 1 ; -1 + 2)$, soit : $(0 ; 1)$.

On obtient donc $1 = 0 + c$, soit : $c = 1$. Une équation de l'image de $(\mathcal{D}_1)$ est donc :

$$y = x + 1.$$

- 2 De même, l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle. Une équation de l'image de $(\mathcal{D}_2)$ est donc de la forme :

$$y = \frac{1}{2}x + c.$$

Pour calculer c , on choisit au hasard un point de $\mathcal{D}_2$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Notons N le point de coordonnées $(1 ; 1)$, qui est sur $(\mathcal{D}_2)$. Pour calculer les coordonnées de son image $N'(x ; y)$ par la symétrie de centre Ω , écrivons que Ω est le milieu de $[NN']$:

$$\overrightarrow{NN'} = 2\overrightarrow{N\Omega}.$$

Les coordonnées des deux vecteurs sont : $\overrightarrow{NN'} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{N\Omega} \begin{pmatrix} 2(-1-1) \\ 2(2-1) \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. On obtient le système :

$$\begin{cases} x-1 = -4 \\ y-1 = 2 \end{cases}$$

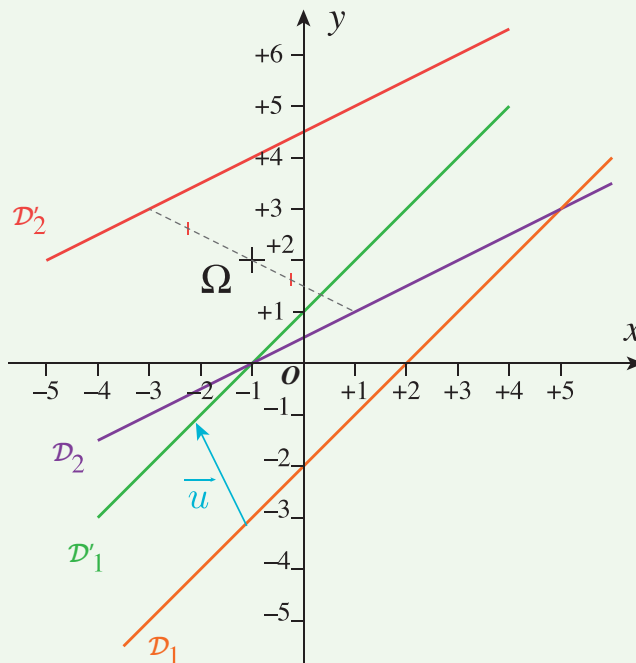
qui fournit les coordonnées $(-3 ; 3)$ de N' .

L'image de $(\mathcal{D}_2)$ passe par N' , donc :

$$3 = \frac{1}{2} \times (-3) + c ,$$

d'où $c = \frac{9}{2}$. On obtient une équation de l'image de $\mathcal{D}_2$:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}.$$



ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

11 Équations de droites

Énoncé
p. 270

Lycée Hoche, Versailles

Le mieux est de calculer directement les équations de $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.

- $\mathcal{D}_1$ a un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$: utilisez la méthode des « petits pas ». Lorsqu'on avance sur $\mathcal{D}_1$, entre le moment où l'on croise l'axe des abscisses et celui où l'on croise celui des ordonnées, on fait trois « pas » vers la droite et cinq « pas » vers le haut.

Son coefficient directeur est donc $\frac{5}{3}$.

On lit sur la figure l'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection de (Oy) et de $\mathcal{D}_1$) : $+5$.

D'où l'équation réduite de $\mathcal{D}_1$:

$$y = \frac{5}{3}x + 5.$$

Ce qui correspond à l'équation 6 de l'énoncé.

- $\mathcal{D}_2$ passe par les points de coordonnées $(-3 ; 0)$ et $(1 ; 2)$. Donc (appliquez la méthode des « petits pas »), elle admet un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, et comme coefficient directeur : $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

L'équation réduite de $\mathcal{D}_2$ est donc de la forme :

$$y = \frac{1}{2}x + c.$$

Comme elle passe par le point de coordonnées $(-3 ; 0)$, on peut déterminer c en remplaçant dans l'équation :

$$0 = -\frac{3}{2} + c \iff c = \frac{3}{2}.$$

Finalement $\mathcal{D}_2$ admet pour équation :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Il s'agit de l'équation 5.

- $\mathcal{D}_3$ admet un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc son coefficient directeur est -1 . L'ordonnée à l'origine vaut $+3$.

L'équation réduite de $\mathcal{D}_3$ est donc :

$$y = -x + 3.$$

$\mathcal{D}_3$ ne correspond donc à aucune des équations de l'énoncé.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

12 Équations de droites

Énoncé
p. 271

Lycée Condorcet, Paris

- 1 (a) Si D_m doit passer par A, on doit avoir :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2m-1}{m-3} \times 1 + \frac{-7m+6}{m-3} \iff 1 = \frac{2m-1-7m+6}{m-3} \\ &\iff 1 = \frac{-5m+5}{m-3} \\ &\iff m-3 = -5m+5 \\ &\iff 6m = 8 \\ &\iff m = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Donc :

$$D_m : y = -x + 2.$$

- (b) Par la même méthode, on remplace x et y par 0 dans l'équation, et on obtient $-7m+6=0$, donc $m = \frac{6}{7}$.

$$D_m : y = -\frac{1}{3}x.$$

- (c) D_m est parallèle à l'axe des abscisses quand son coefficient directeur est nul, donc quand $\frac{2m-1}{m-3} = 0$, d'où : $m = \frac{1}{2}$.

$$D_m : y = -1.$$

- 2 (a) L'équation réduite de D_m est du type $y = ax + b$ (et non $x = c$), il s'agit *toujours* d'une droite dite « oblique », c'est-à-dire qu'elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

- (b) D_m et Δ sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{2m-1}{m-3} &= 3 \\ \iff 2m-1 &= 3m-9 \\ \iff 8 &= m. \end{aligned}$$

- (c) D_m admet -2 comme coefficient directeur si $\frac{2m-1}{m-3} = -2$ et $m \neq 3$. On obtient :

$$\begin{aligned} (2m-1) &= -2 \times (m-3) \\ 2m-1 &= -2m+6 \\ 4m &= 7 \\ m &= \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

- 3 Une méthode simple (et qui marche !), consiste à chercher l'intersection de deux droites particulières, et à vérifier que le point ainsi trouvé est sur toutes les droites D_m .

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Nous vous proposons $m = 2$ et $m = 4$, ce qui permet d'avoir des dénominateurs $m - 3$ peu encombrants. Les équations pour ces droites sont :

- $D_2 : y = -3x + 8$
- $D_4 : y = 7x - 22$

Il n'y a plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -3x + 8 \\ y = 7x - 22 \end{cases} &\iff \begin{cases} -3x + 8 = 7x - 22 \\ y = -3x + 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 30 = 10x \\ y = -3x + 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les droites D_2 et D_4 se coupent au point $K(3 ; -1)$. Vérifions que ce point appartient bien à toutes les droites D_m . Autrement dit, on vérifie que les coordonnées $(3 ; -1)$ sont bien solutions de l'équation de la droite :

$$\frac{2m-1}{m-3} \times 3 + \frac{-7m+6}{m-3} = \frac{6m-3-7m+6}{m-3} = -1,$$

donc K appartient bien à D_m , quel que soit m .

On peut utiliser une méthode plus « originale » en réorganisant l'équation de la droite D_m , non plus comme une équation en x et en y , mais comme une équation en m , ce qui donne, au lieu de :

$$y = \frac{2m-1}{m-3}x + \frac{-7m+6}{m-3}$$

l'équation :

$$(2m-1)x + (3-m)y - 7m + 6 = 0.$$

On développe :

$$2mx - x + 3y - my - 7m + 6 = 0$$

et on regroupe les termes :

$$(2x - y - 7)m - x + 3y + 6 = 0.$$

Cette égalité doit être vraie *quel que soit le nombre* $m \neq 3$. On est en présence d'une fonction affine de m : $m \mapsto am + b$, qui est toujours nulle. Les coefficients a et b sont donc égaux à 0. On est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ -x + 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

Vous pouvez procéder par combinaison et résoudre ce système. On obtient encore les coordonnées de $K(3 ; -1)$.

13 Mise en équations d'un problème

Énoncé
p. 271

Lycée Fragonard, L'Isle-Adam

Notons x le nombre de filles et y celui de garçons qu'il y a au départ. Il y a à ce moment-là deux fois plus de garçons que de filles, donc $y = 2x$. Si 6 garçons partent, il en reste $y - 6$. Si 6 filles arrivent, il y en a alors $x + 6$. Alors, il y a deux fois plus de filles, c'est-à-dire que $x + 6 = 2(y - 6)$.

Il ne reste plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + 6 = 2(y - 6) \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ x + 6 = 2y - 12 \end{cases}$$

Par substitution :

$$\begin{cases} y = 2x \\ x = 2(2x) - 18 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ -3x = -18 \end{cases}$$

On obtient facilement $x = 6$ et $y = 12$. Comme il s'agit d'un problème « concret », ne donnez pas un ensemble de solutions ; écrivez plutôt : « Il y avait au départ 6 filles et 12 garçons. »

14 Systèmes d'équations

Énoncé
p. 272

Lycée Jean Monnet, Franconville

Appelons x le nombre de places à 21 € et y le nombre de places à 26 €. Des renseignements de l'énoncé, on tire le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 21x + 26y = 3\,300 \end{cases}$$

On peut procéder par substitution :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 150 - y \\ 21(150 - y) + 26y = 3\,300 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 150 - y \\ 3150 - 21y + 26y = 3\,300 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 150 - y \\ 5y = 150 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 30 \\ x = 120 \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc 30 places à 26 € et 120 places à 21 €.

15 Systèmes d'équations

Énoncé
p. 272

Lycée Notre-Dame, Saint-Nazaire

Notons x le premier capital, et y le second. A dix pour cent, x rapporte $\frac{10}{100}x$.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

De même, y rapporte $\frac{8}{100}y$. D'après les renseignements de l'énoncé, on obtient le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{10}{100}x - \frac{8}{100}y = 200 \\ \frac{8}{100}x - \frac{10}{100}y = 70 \end{cases} &\iff \begin{cases} 10x - 8y = 20\,000 \\ 8x - 10y = 7\,000 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 36y = 90\,000 \\ 8x - 10y = 7\,000 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow 8L_1 - 10L_2 \\ &\iff \begin{cases} y = 2\,500 \\ 8x = 32\,000 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2\,500 \\ x = 4\,000 \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux capitaux sont respectivement de 4 000 € et de 2 500 €.

16 Systèmes d'équations

Énoncé
p. 272

Lycée Auguste Renoir, Asnières-sur-Seine

On résout par combinaisons :

$$\begin{cases} 8y = 0 \\ -2x + 2\sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 + \sqrt{2}L_2 \iff \begin{cases} y = 0 \\ -2x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } S = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 \right) \right\}.$$

17 Systèmes d'équations

Énoncé
p. 272

Lycée Voltaire, Paris

- 1 Commençons par nous débarrasser des dénominateurs, en multipliant la première ligne par 6 et la deuxième par 2 :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4x + 3y = 6 \\ 3x - 2y - 5x + 3y = 6 \end{cases}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} -2x + 6y = 6 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$$

En ôtant la deuxième ligne à la première, on élimine x :

$$\begin{cases} 5y = 0 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Il vient $y = 0$ et $x = -3$. Conclusion :

$$S = \{(-3, 0)\}.$$

2 Effectuons d'abord les produits en croix dans la première ligne.

$$\begin{cases} 5x = 7y \\ 3x - y = 24 \end{cases}$$

On utilise la deuxième ligne, sous la forme : $y = 3x - 24$, pour procéder par substitution :

$$\begin{cases} 5x = 7(3x - 24) \\ y = 3x - 24 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} 5x - 21x = -7 \times 3 \times 8 \\ y = 3x - 24 \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{cases} x = \frac{21}{2} \\ y = \frac{63}{2} - \frac{48}{2} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\text{et } S = \left\{ \left(\frac{21}{2} ; \frac{15}{2} \right) \right\}.$$

18 À la terrasse d'un café

Lycée Louis Vincent, Metz

→ Énoncé
p. 272

On note x le prix d'un chocolat chaud et y le prix d'un jus d'orange

- « Sandra et ses amis commandent trois chocolats chauds et deux jus d'orange pour 10,80 €. » signifie :

$$3x + 2y = 10,8.$$

- « Cinq autres de leurs camarades arrivent. Le groupe annule la commande précédente et commande alors six jus d'orange et quatre chocolats chauds pour 23,40 € » signifie :

$$4x + 6y = 23,4.$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

Nous devons donc résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y = 10,8 & (E_1) \\ 4x + 6y = 23,4 & (E_2) \end{cases} &\iff \begin{cases} 9x + 6y = 32,4 & 3(E_1) \\ 4x + 6y = 23,4 & (E_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5x = 9 & (E_1) - (E_2) \\ 4x + 6y = 23,4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{9}{5} = 1,8 \\ 6y = 23,4 - 4 \times 1,8 = 16,2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 1,8 \\ y = 2,7 \end{cases} \end{aligned}$$

Un chocolat chaud vaut donc 1,8 € et un jus d'orange, 2,7 €.

19 Droites concourantes

Énoncé
p. 273

Lycée St Thomas d'Aquin, Paris

- 1 Ré-écrivons les équations sous la forme $y = ax + b$. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} y = 5x + 13 \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \text{ (tiens, tiens !)} \end{cases}$$

On obtient deux équations de droites non parallèles, puisque les coefficients directeurs sont différents ($5 \neq -\frac{2}{3}$). Les deux droites se coupent en un unique point, dont les coordonnées donnent l'unique solution du système.

- 2 On substitue $y = 5x + 13$ dans $2x + 3y = 5$, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} y = 5x + 13 \\ 2x + 15x + 39 = 5 \end{cases}$$

qui donne facilement :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

d'où l'ensemble des solutions : $\{(-2 ; 3)\}$.

- 3 Visiblement, D_1 , D_2 , et D_3 ne sont pas parallèles (les coefficients directeurs sont tous distincts). Elles sont concourantes si elles ont un point commun. Or, les calculs précédents ont montré que D_1 et D_2 n'admettaient qu'un seul point commun $M(-2 ; 3)$. Il suffit de vérifier si ce point appartient à D_3 . On remplace x par -2 et y par 3 dans $y = -x + 1$, on obtient une égalité vraie. On en déduit que les trois droites sont bien concourantes.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

20 Mise en équations d'un problème

Énoncé
p. 273

Lycée Molière, Paris

- 1 Il est clair d'après l'énoncé que l'aller s'est effectué vers l'aval, alors que le retour était vers l'amont. À l'aller, il faut ajouter la vitesse de la rivière à la vitesse propre du bateau alors qu'au retour, il faut la soustraire. Notons v la vitesse du canot et v_R la vitesse de la rivière. On note t_1 le temps à l'aller, t_2 le temps au retour, et t le temps mis par le radeau. Le radeau se déplace à la vitesse v_R .

La seule constante de l'exercice, c'est la distance entre A et B . On peut l'écrire de trois façons différentes : $(v + v_R)t_1$, $(v - v_R)t_2$ et $v_R t$. On en déduit :

$$v + v_R = \frac{v_R t}{t_1} \text{ et } v - v_R = \frac{v_R t}{t_2}.$$

Soustrayons ces deux égalités membre à membre pour éliminer v .

$$2v_R = \frac{v_R t}{t_1} - \frac{v_R t}{t_2}.$$

En simplifiant par v_R et en mettant t en facteur :

$$2 = t \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right).$$

On calcule simplement :

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7,5} = \frac{3}{15} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}.$$

On en déduit : $t = 30$. Le radeau met trente heures pour aller de A à B (remarque : il ne peut pas faire le trajet inverse, n'est-ce-pas ?)

- 2 En notant t_3 le nouveau temps mis au retour, on obtient :

$$(v + 1,6 - v_R)t_3 = v_R t \text{ donc } v - v_R + 1,6 = \frac{v_R t}{t_3}.$$

On sait que $v - v_R = \frac{v_R t}{t_2}$, on a donc :

$$\frac{v_R t}{t_2} + 1,6 = \frac{v_R t}{t_3}.$$

En factorisant :

$$1,6 = v_R t \left(\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_2} \right).$$

$t_3 = 7\text{h}30\text{min} - 45\text{min} = 7,5 - 0,75 = 6,75$. Calculons :

$$\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{6,75} - \frac{1}{7,5} = \frac{4}{27} - \frac{4}{30} = \frac{40}{270} - \frac{36}{270} = \frac{4}{270}.$$

Il vient :

$$v_R = \frac{1,6 \times 270}{4 \times 30} = 3,6 \text{ km/h}.$$

Pour trouver la vitesse du canot, on utilise

$$(v + v_R)t_1 = v_R t \iff 5v + 18 = 108 \iff 5v = 90 \iff v = 18.$$

Le canot se déplace à 18 km/h.

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

21 Systèmes d'équations

Énoncé
p. 273

Lycée Carnot, Dijon

- 1 La première équation équivaut à $y = -5x + 4$ et la seconde à $y = \frac{1}{4}x - 1$. La résolution du système équivaut à la recherche de l'intersection des deux droites d'équations $y = -5x + 4$ et $y = \frac{1}{4}x - 1$. Ces droites n'ayant pas le même coefficient directeur, elles sont sécantes : elles ont un unique point d'intersection, donc le système admet une solution unique.

- 2 Par substitution :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} y = 4 - 5x \\ -3x + 12(4 - 5x) = -12 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 4 - 5x \\ -63x + 48 = -12 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 4 - 5x \\ x = \frac{60}{63} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ce qui donne $x = \frac{20}{21}$ et $y = -\frac{16}{21}$. D'où l'ensemble $S = \left\{ \left(\frac{20}{21} ; -\frac{16}{21} \right) \right\}$.

- 3 Il suffit de poser $X = \frac{1}{x+1}$ et $Y = \frac{1}{y-2}$ pour se ramener au système précédent. On obtient :

$$\begin{aligned}
 x + 1 = \frac{21}{20} &\iff x = \frac{1}{20}, \\
 y - 2 = -\frac{21}{16} &\iff y = \frac{11}{16}.
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$S' = \left\{ \left(\frac{1}{20} ; \frac{11}{16} \right) \right\}.$$

22 Systèmes d'équations

Énoncé
p. 274

Lycée David d'Angers, Angers

- 1 Pour résoudre le système :

$$\begin{cases} 7x - 4y = 29 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

on peut procéder par substitution : la seconde équation donne $y = 2x - 1$, et on obtient le système équivalent :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 7x - 4(2x - 1) = 29 \\ y = 2x - 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} -x + 4 = 29 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -25 \\ y = -51 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La solution du système est donc $(-25 ; -51)$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2 (a) En remplaçant $(x ; y)$ par $(0 ; -9)$ dans le système, on obtient :

$$\begin{cases} 9 = 9 \\ 15 - 15 = 0 \end{cases}$$

ce qui est vrai, donc $(0 ; -9)$ est solution du système.

Essayons maintenant $(1 ; 6)$:

$$\begin{cases} 2 - 6 = 9 \\ \frac{10}{3} - 10 - 15 = 0 \end{cases}$$

ce qui est évidemment faux. $(1 ; 6)$ n'est pas solution.

Avec $(1 ; -7)$:

$$\begin{cases} 2 + 7 = 9 \\ \frac{10}{3} + \frac{35}{3} - 15 = 0 \end{cases}$$

Ces deux égalités sont vraies (penser à $15 = \frac{45}{3}$) donc $(1 ; -7)$ est solution du système.

On sait qu'un tel système se ramène au problème de l'intersection de deux droites données par leurs équations. Il y a au moins deux solutions, donc au moins deux points d'intersection. Cela signifie que les deux droites sont confondues, et qu'en fait les équations du système sont proportionnelles. On le vérifie facilement en multipliant la première équation par $\frac{5}{3}$. On obtient la seconde.

Le système est donc équivalent à la seule équation : $2x - y = 9$.

- (b) Écrite sous la forme $y = 2x - 9$, on reconnaît une équation de droite. Les solutions sont donc les coordonnées des points de cette droite. Ces coordonnées sont sous la forme $(x ; 2x - 9)$. On écrit :

$$S = \{(x ; 2x - 9), \quad x \in \mathbb{R}\}.$$

23 Le problème du marché

→ Énoncé
p. 274

Lycée Gustave Eiffel, Bordeaux

La première phrase nous dit que (le symbole « = » est ici abusif, mais cela simplifie les notations) :

$$85 \text{ poulets} = 1 \text{ cheval} + 1 \text{ vache} \quad \text{et} \quad 5 \text{ chevaux} = 12 \text{ vaches}.$$

On en déduit alors :

$$5 \times 85 \text{ poulets} = 5 \text{ chevaux} + 5 \text{ vaches}$$

soit :

$$425 \text{ poulets} = 17 \text{ vaches} \quad \text{soit} \quad 1 \text{ vache} = 25 \text{ poulets}.$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

Et donc,

$$5 \text{ chevaux} = 12 \text{ vaches} = 12 \times 25 \text{ poulets} = 300 \text{ poulets}$$

donc :

$$1 \text{ cheval} = 60 \text{ poulets.}$$

Notons maintenant :

- x le nombre de chevaux que le couple a déjà achetés ;
- y le nombre de vaches que le couple a déjà achetées.

Le dialogue entre le mari et la femme donne alors le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 17 & (L_1) \\ x + 2y = 19 & (L_2) \end{cases}$$

$$2(L_2) - (L_1) \text{ donne : } 3y = 38 - 17, \text{ soit } y = 7.$$

$$2(L_1) - (L_2) \text{ donne : } 3x = 34 - 19, \text{ soit } x = 5.$$

Le couple a donc déjà acheté 5 chevaux et 7 vaches.

Ainsi, s'il achète 7 vaches, il lui faut :

$$7 \times 25 \text{ poulets} = 175 \text{ poulets.}$$

Les paysans ont donc amené 175 poulets.

24 Systèmes d'équations

Lycée Lamartine, Paris

Énoncé
p. 274

- 1 Puisque le carré de $x + y$ vaut 9, on en déduit que $x + y = 3$ ou que $x + y = -3$. Le système proposé peut donc être séparé en deux « sous-systèmes » :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Les solutions du système de départ sont celles de l'un ou de l'autre de ces deux sous-systèmes.

- 2 Résolvons chaque système par substitution. Pour le premier, on écrit :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x + 2(-x - 3) = 7 \\ y = -x - 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2x - 6 = 7 \\ y = -x - 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 13 \\ y = -16 \end{cases} \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Pour le second système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x + 2(-x + 3) = 7 \\ y = -x + 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x - 2x + 6 = 7 \\ y = -x + 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$S = \{(13 ; -16), (1 ; 2)\}.$$

25 Système d'équations avec fractions

Énoncé
p. 275

Lycée Jacques Monod, Clamart

Posons $X = x^2$ et $Y = \frac{3}{y+1}$ (vous pouvez poser $Y = \frac{1}{y+1}$ mais $\frac{3}{y+1}$ permet d'obtenir des coefficients plus simples.) Le système devient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2X - 3Y = 15 \\ 3X - 8Y = 19 \end{cases} &\iff \begin{cases} 6X - 9Y = 45 & L_1 \leftarrow 3L_1 \\ 6X - 16Y = 38 & L_2 \leftarrow 2L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 7Y = 7 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 6X - 16Y = 38 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir $Y = 1$ et $X = 9$. $x^2 = 9$, donc x vaut 3 ou -3 .
 $\frac{3}{y+1} = 1$, donc $y + 1 = 3$ et $y = 2$. On obtient donc deux solutions :

$$S = \{(-3 ; 2), (3 ; 2)\}.$$

26 Système non linéaire

Énoncé
p. 275

Lycée Arago, Paris

Notons que la valeur $x = 0$ est exclue, on peut donc poser $X = \frac{1}{x}$ et $Y = y^2$ comme indiqué, et on obtient un système d'équations habituel :

$$\begin{cases} 3X - 5Y = 2 \\ 7X + 3Y = 12 \end{cases}$$

Procédons par substitution. On écrit X en fonction de Y à l'aide de la première équation, et on remplace dans la seconde :

$$\begin{cases} X = \frac{5}{3}Y + \frac{2}{3} \\ 7\left(\frac{5}{3}Y + \frac{2}{3}\right) + 3Y = 12 \end{cases}$$

ÉQUATIONS DE DROITES. SYSTÈMES LINÉAIRES • CHAP. 8

En simplifiant la seconde équation et en multipliant les deux membres par 3 pour se débarrasser des dénominateurs, il vient :

$$\begin{cases} X = \frac{5}{3}Y + \frac{2}{3} \\ 44Y = 22 \end{cases}$$

d'où enfin :

$$\begin{cases} X = \frac{3}{2} \\ Y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le problème de départ équivaut maintenant au système :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

que l'on résout facilement :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $S = \left\{ \left(\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{2}{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$.

27 Avec fractions

Lycée Hoche, Versailles

Énoncé
p. 275

Nous allons résoudre le système par combinaisons :

$$\begin{aligned} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \quad \begin{cases} 2u - 3v = 4 \\ 17v = -17 \end{cases} &\iff \begin{cases} v = -1 \\ 2u + 3 = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v = -1 \\ u = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où la solution : $\left(\frac{1}{2}, -1 \right)$. En posant $u = \frac{1}{x-3}$ et $v = \frac{1}{y+5}$, et en multipliant la deuxième ligne par 2, on transforme le deuxième système proposé en le premier. Les solutions vérifient donc $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{2}$, soit $x-3 = 2$ donc $x = 5$, et $\frac{1}{y+5} = -1$, soit $y+5 = -1$ et $y = -6$. L'ensemble des solutions s'écrit donc :

$$S = \{(5; -6)\}.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

28 Avec fractions et carrés

Lycée Hoche, Versailles

Énoncé
p. 275

Posons tout de suite : $X = \frac{1}{(2x+1)^2}$ et $Y = \frac{1}{3y-5}$. Le système devient :

$$\begin{cases} 3X - 4Y = 32 \\ 2X - 5Y = 12 \end{cases} \iff L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \quad \begin{cases} 7Y = 28 \\ 2X - 5Y = 12 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y = 4 \\ 2X = 32 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y = 4 \\ X = 16 \end{cases}$$

On obtient enfin : $\frac{1}{(2x+1)^2} = 16$ et $\frac{1}{3y-5} = 4$. Cherchons x .

$$(2x+1)^2 = \frac{1}{16} \text{ donc } 2x+1 = \frac{1}{4} \text{ ou } 2x+1 = -\frac{1}{4}.$$

Ainsi, $x = -\frac{3}{8}$ ou $x = -\frac{5}{8}$. Cherchons y .

$$3y-5 = \frac{1}{4} \text{ donc } y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + 5 \right) = \frac{7}{4}.$$

Conclusion :

$$S = \left\{ \left(-\frac{3}{8}; \frac{7}{4} \right), \left(-\frac{5}{8}; \frac{7}{4} \right) \right\}.$$

Chapitre

9

Informations chiffrées

Plan du chapitre

1. Pourcentages et évolutions
2. Statistiques

1 Pourcentages et évolutions

Exercice type 1

Lycée Chaptal, Paris

Les questions suivantes sont indépendantes.

- 1 Dans une composition florale, 35% des fleurs sont des roses.
Sachant qu'il y a 28 roses, de combien de fleurs le bouquet est-il composé ?
- 2 Jean a profité des soldes d'hiver et acheté son blouson avec une remise de 15%.
Sachant qu'il l'a payé 61,20 euros, quel était son prix initial ?
- 3 Un ticket de cinéma coûtait 7,50 euros avant deux augmentations successives de 3% et de 4,5%.
 - (a) Déterminer l'évolution globale.
 - (b) Quel est le prix du billet après ces deux augmentations ? (Arrondir au centime près).

Voir corrigé page 299

1.1 Proportions

À la rentrée 2020, on compte en 2de A : 20 filles et 15 garçons, soit 35 élèves en tout.

La *proportion* de filles dans la classe est $\frac{20}{35} \approx 0,571$.

Pour comparer plus aisément les proportions, on les exprime avec un dénominateur égal à 100 : $\frac{20}{35} \approx \frac{57,1}{100}$ (le numérateur n'est pas toujours entier).

On dit alors que la proportion est de 57,1%.

➔ À RETENIR

Si n_{total} est l'effectif total d'une population (ici, le nombre d'élèves de 2de A) et n_{partiel} celui d'une sous-population (le nombre de filles de 2de A), alors :

$$\text{proportion} = \frac{n_{\text{partiel}}}{n_{\text{total}}} = \frac{\text{pourcentage}}{100}.$$

En renversant l'égalité, on obtient :

$$\text{pourcentage} = 100 \times \frac{n_{\text{partiel}}}{n_{\text{total}}}.$$

On note qu'une proportion exprime un quotient entre des grandeurs de même nature exprimées dans la même unité. Une proportion n'a donc pas d'unité. Si on divise le nombre d'élèves du lycée par le nombre de classes, on obtient une grandeur utile, exprimée en « élèves par classe », mais *ce n'est pas une proportion*. Si un escargot a parcouru 15 cm sur une barre de 2 m, il faut exprimer ces deux longueurs *dans la même unité* pour calculer le pourcentage de la barre parcouru par l'escargot : $\frac{15}{200} = 0,075$, soit 7,5%.

1.2 Pourcentages de pourcentages

Parmi les 57,1% filles de la 2de A, 37% viennent au lycée à pied.

Pour savoir quelle proportion cela représente par rapport à la classe entière, on effectue le calcul :

$$\frac{37}{100} \times \frac{57,1}{100} \times 100 = 21,127 \approx 21,13\%.$$

La proportion de filles venant à pied au lycée est alors d'environ 21,13%.

1.3 Évolutions

En 2019, il y avait 36 élèves en 2de A. L'effectif total a donc diminué de 1.

La *variation absolue* de l'effectif est : -1 . La variation est ici absolue parce qu'elle n'exprime pas une proportion. On ne confondra pas avec la notion de valeur absolue, qui n'a rien à voir (distance entre un réel et 0).

La *variation relative* exprime quelle proportion de la population initiale représente la variation absolue. Il y avait 36 élèves en 2019, la baisse représente $\frac{1}{36} = 2,8\%$ de l'effectif.

➔ À RETENIR

$$\text{Variation relative} = \frac{\text{Variation absolue}}{\text{Valeur initiale}} = \frac{\text{Valeur finale} - \text{Valeur initiale}}{\text{Valeur initiale}}.$$

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

On prévoit pour 2021 une augmentation de l'effectif de 8,6%. La valeur de référence est l'effectif de 2020 ($n_{2020} = 35$) et l'effectif prévu est donc :

$$n_{2021} = n_{2020} + n_{2020} \times \frac{8,6}{100},$$

ou plus simplement : $n_{2021} = 1,086 \times n_{2020} \approx 38$.

On dit que 1,086 est le *coefficient multiplicateur*.

Pour 2022, on s'attend cette fois à une baisse de 10,5%. Attention, l'effectif de référence a changé : c'est maintenant celui de 2021, soit 38 élèves, puisqu'on parle d'une baisse entre 2021 et 2022.

On peut calculer l'effectif de 2022 de deux manières.

Premièrement, on peut appliquer la méthode précédente :

$$n_{2022} = n_{2021} \times (1 - 0,105) = 38 \times (1 - 0,105) \approx 34.$$

Une autre méthode est de *composer* les pourcentages. L'effectif de 2020 est multiplié par $1 + 0,086$ pour obtenir n_{2021} , qui lui-même est multiplié par $1 - 0,105$. On peut donc calculer directement :

$$n_{2022} = n_{2020} \times (1 + 0,086) \times (1 - 0,105) = n_{2020} \times 1,086 \times 0,895 \approx 34.$$

On dit que $1,086 \times 0,895 = 0,97197$ est le *coefficient multiplicateur global*.

➡ Solution de l'exercice type 1

Lycée Chaptal, Paris

- 1** Soit x le nombre de fleurs dans le bouquet. 35% de x est égal à 28 roses, donc :

$$\frac{35}{100} \times x = 28 \iff x = 28 \times \frac{100}{35} = 80.$$

Il y a donc 80 fleurs dans le bouquet.

- 2** Posons x le prix initial du blouson avant réduction de 15%. Alors :

$$\left(1 - \frac{15}{100}\right)x = 61,20 \iff x = \frac{61,20}{0,85} = 72.$$

Le prix initial du blouson est donc 72 €.

- 3** (a) Posons $CM_1 = 1 + \frac{3}{100} = 1,03$ et $CM_2 = 1 + \frac{4,5}{100} = 1,045$ les

deux coefficients multiplicateurs correspondant aux deux augmentations successives.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type 1 (suite)

Lycée Chaptal, Paris

Le coefficient multiplicateur global est alors :

$$CM = CM_1 \times CM_2 = 1,07635,$$

c'est-à-dire $1 + 0,07635$, ou encore $1 + \frac{7,635}{100}$.

L'évolution globale est donc une augmentation de 7,635%.

(b) Le prix du billet après les deux augmentations est :

$$7,50 \times 1,07635 \approx 8,07 \text{ €}.$$

Voir énoncé page 297

2 Statistiques

Exercice type 2

Lycée Saint Aspais, Melun



 Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Dans une classe de 30 élèves, il y a 12 filles et 18 garçons. Au contrôle de mathématiques, les filles ont obtenu :

7, 8, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 14, 17, 18

et les garçons :

5, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 14, 16.

- 1 Calculer la moyenne des notes pour les deux groupes (on arrondira les résultats au dixième près).
- 2 À partir de ces résultats, calculer la moyenne de la classe.
- 3 Par mesure de clémence, le professeur ajoute 1 point à toutes les notes. Quelle est la nouvelle moyenne ?
- 4 Le dernier garçon n'avait en fait pas 5, mais 8. Quelle est, finalement, la moyenne de la classe ?

Voir corrigé page 304

2.1 Comment comparer des séries quantitatives ?

Un professeur compare les notes de deux élèves :

Paul	19	6	18	5
Pierre	10	10	12	12

On observe deux suites de quatre valeurs, appelées *séries statistiques*.

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

La moyenne de Paul est plus élevée que celle de Pierre.

La moyenne de Paul est :

$$\frac{19 + 6 + 18 + 5}{4} = 12.$$

La moyenne de Pierre est :

$$\frac{10 + 10 + 12 + 12}{4} = 11.$$

La moyenne reflète la *position* de la série statistique. On parle également d'indicateur de *tendance centrale*, ce qui signifie simplement qu'elle indique le « centre » de la série statistique. Dans notre exemple, les notes de Paul sont *globalement* meilleures.

La médiane, qui sépare les valeurs de la série (une fois ordonnée) en deux moitiés, est un autre indicateur de tendance centrale.

Cependant, Pierre est plus régulier que Paul. Paul a complètement raté deux devoirs. Les notes de Pierre sont moins *dispersées*.

Pour comparer deux séries statistiques, on doit tenir compte de ces deux caractéristiques : position et dispersion.

L'*étendue* $e = \max x_i - \min x_i$ est l'écart entre la plus grande valeur ($\max x_i$) et la plus petite ($\min x_i$). C'est un indicateur de dispersion : une faible étendue montre que la série est resserrée autour de sa moyenne. Il est rudimentaire car il ne dépend que des deux valeurs extrêmes de la série.

2.2 Qu'est-ce qu'une moyenne pondérée ?

On considère une série statistique de n valeurs réelles.

Nous utilisons les notations suivantes :

- $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont les valeurs observées ;
- $n_1, n_2, \dots, n_k$ les effectifs correspondants, ce qui signifie que la valeur x_i apparaît n_i fois dans la série ;
- $f_1, f_2, \dots, f_k$ les fréquences : $f_i = \frac{n_i}{n}$ est la *proportion* (donc, entre 0 et 1) du nombre des valeurs égales à x_i par rapport à l'effectif total n .

La moyenne de la série statistique est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_1 + x_2 \dots x_2 + \dots + x_k + \dots x_k}{n}$$

où chaque x_i est compté n_i fois.

On peut simplifier la formule :

- *Calcul à partir des effectifs* : $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$.
- *Calcul à partir des fréquences* : $\bar{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Pour calculer la moyenne des valeurs x_i , on ne s'est pas contenté de la moyenne simple $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$. On a donné à chaque valeur x_i un *poids* correspondant à son effectif. On dit qu'on a calculé une moyenne des valeurs x_i , pondérée par les effectifs n_i ou les fréquences f_i (*poids* et *pondéré* sont des mots qui viennent du latin *pondus*, *ponderis* : le poids).

On peut décider d'accorder un poids qui n'est pas relatif à la fréquence. Par exemple, si on a eu 14 au devoir commun (coefficient 2), 12 au contrôle (coefficient 1) et 18 à l'interrogation surprise (coefficient 0,5), la moyenne pondérée est :

$$m = \frac{2 \times 14 + 1 \times 12 + 0,5 \times 18}{2 + 1 + 0,5} = 14.$$

Les coefficients sont choisis pour que la note du devoir commun ait plus d'importance que celle de l'interrogation surprise.

2.3 La linéarité de la moyenne, qu'est-ce que c'est ?

Nous étudions une série statistique donnée comme ci-dessus par les valeurs x_i , leurs effectifs respectifs n_i .

Si on applique une fonction affine aux valeurs x_i , c'est-à-dire que l'on calcule, pour chaque i , la valeur $y_i = mx_i + p$ (où m et p sont deux constantes).

Alors :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{n_1 y_1 + n_2 y_2 + \dots + n_k y_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\ &= \frac{n_1 (mx_1 + p) + n_2 (mx_2 + p) + \dots + n_k (mx_k + p)}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\ &= \frac{n_1 mx_1 + n_2 mx_2 + \dots + n_k mx_k + n_1 p + n_2 p + \dots + n_k p}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\ &= \frac{m(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k) + p(n_1 + n_2 + \dots + n_k)}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\ &= m \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} + p \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \\ &= m\bar{x} + p. \end{aligned}$$

On peut donc retrouver la moyenne $\bar{y}$ de la nouvelle série en appliquant la même fonction affine à la moyenne $\bar{x}$ de l'ancienne.

On utilise la linéarité de la moyenne sans même y penser lorsque l'on change d'unité. Par exemple, si dans un concours de saut en hauteur, la moyenne des sauts (en mètres) a été de 1,81, il est évident que la moyenne des sauts (en centimètres) a été de 181. Les valeurs x_i étaient exprimées en mètres, on obtient les valeurs y_i en centimètres en calculant $y_i = 100x_i$, et donc $\bar{y} = 100\bar{x}$.

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

Remarque : par linéarité, la précision des données se retrouve sur la moyenne. Lorsqu'on calcule une moyenne, on doit donc fournir un résultat raisonnable compte tenu de la précision des données. Donner une moyenne au cm près des distances parcourue en km par des avions n'a pas de sens. En revanche, parler d'une moyenne de 1,96 enfants par femme a un sens car le nombre d'enfants, dans chaque cas, est un entier, donc connu avec une précision infinie. On pourrait donc donner encore plus de chiffres. Cependant, on s'arrête en général à 3 chiffres significatifs car cela suffit pour les comparaisons et interprétations courantes.

2.4 L'écart inter-quartile

On compare deux séries de vingt notes rangées par ordre croissant. La série 1 :

6	6	7	8	8	10	10	10	11	11
12	12	12	14	15	17	17	18	18	20

et la série 2 :

6	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	20

Ces deux séries ont la même moyenne (12,1) et la même étendue $20 - 6 = 14$. Or elles sont très différentes.

Pour mieux caractériser leur dispersion, on parcourt les valeurs dans l'ordre croissant. On atteint un *quartile* lorsque 25%, 50%, puis 75% des valeurs sont dépassées. Observons que les quartiles sont toujours des valeurs de la série.

La série 1 contient 20 notes. Lorsqu'on atteint la 5^{ème} note, c'est-à-dire 8, on peut affirmer qu'un quart des notes sont inférieures ou égales à 8 : 8 est le *premier quartile* q_1 de la série 1.

Le second quartile q_2 correspond à la 10^{ème} note, 11 (la moitié des notes sont inférieures ou égales à 11). Il est très proche de la *médiane* de la série (ici, 10 notes sont inférieures à 11, 10 notes supérieures à 12, la médiane est donc 11,5).

Le troisième quartile q_3 correspond à la 15^{ème} note, 15.

Par définition, l'écart inter-quartile est $q_3 - q_1$. Plus il est petit, plus la série est resserrée.

Il est moins sensible aux valeurs extrêmes de la série, puisqu'on ne tient compte ni du quart supérieur, ni du quart inférieur de la série.

Dans la série 2, on a : $q_1 = q_3 = 12$, donc l'écart inter-quartile est nul. La série est quasiment constante (les deux valeurs extrêmes 6 et 20 sont *aberrantes*).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

2.5 Écart-type

L'étendue ou l'écart inter-quartile ont l'inconvénient de ne reposer, finalement, que sur deux valeurs particulières de la série.

Pour fabriquer un indicateur qui rende compte de tous les écarts $|x_i - \bar{x}|$, on pourrait calculer la moyenne de ces écarts.

Pour éviter les calculs avec les valeurs absolues, on préfère faire la moyenne des carrés : $(x_i - \bar{x})^2$. Une moyenne de carrés est homogène au carré des valeurs de la série. On obtient une grandeur comparable à celles de la série en revenant à la racine carrée, d'où la formule de l'écart type :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{n_1 + \dots + n_p}}.$$

Lorsque σ est petit, tous les carrés $(x_i - \bar{x})^2$ et donc, comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, tous les écarts $|x_i - \bar{x}|$ sont petits, et la série est resserrée autour de sa moyenne.

Dans une série « normale », on observe habituellement 66% des données dans $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ et 95% des données dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$.

➡ Solution de l'exercice type 2

Lycée Saint Aspais, Melun



- 1 La calculatrice permet de calculer la moyenne des filles : environ 11,9, et la moyenne des garçons : environ 9,8.
- 2 On a calculé la moyenne de deux sous-groupes, on peut donc calculer celle de la classe :

$$\bar{x} \approx \frac{12 \times 11,9 + 18 \times 9,8}{12 + 18} \approx 10,6.$$

- 3 On avait des notes x_i , on ajoute 1 point à chacune, on obtient de nouvelles notes $y_i = x_i + 1$. Par linéarité de la moyenne :

$$\bar{y} = \bar{x} + 1 \approx 11,6.$$

- 4 On ajoute 3 points au garçon, donc 3 points au total des notes. Dans le calcul de la moyenne, ce total est divisé par 30 (effectif de la classe). Finalement, on a ajouté $\frac{3}{30} = 0,1$ à la moyenne, qui devient : 11,7.

Voir énoncé page 300

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

1 V/F Variation d'une série statistique

3 min

Corrigé
p. 313

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Si un commerçant augmente tous ses prix de 1 € :

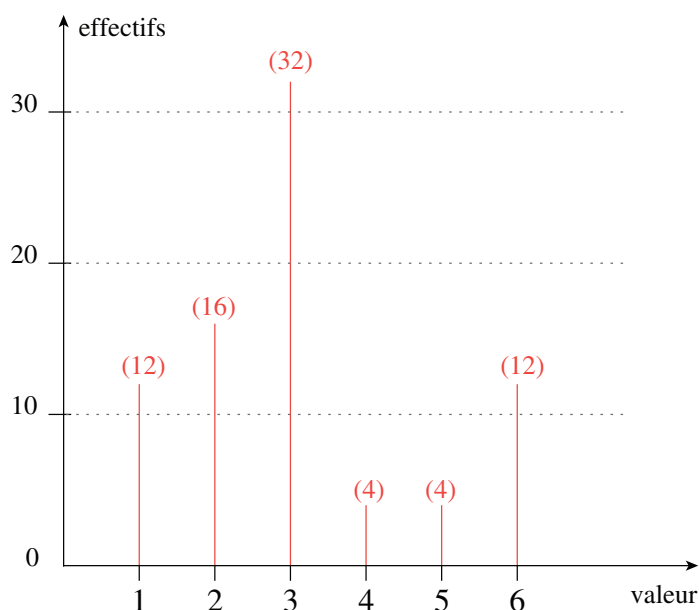
- ☐ a La moyenne des prix ne change pas.
- ☐ b L'étendue des prix ne change pas.
- ☐ c Le prix médian augmente de 1 €.
- ☐ d L'écart inter-quartile augmente de 1 €.

2 V/F Jets de dé

5 min

Corrigé
p. 313

On représente les résultats obtenus en jetant 80 fois un dé à 6 faces.



Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont correctes ?

- ☐ a Ce graphique est un histogramme.
- ☐ b La moyenne est 3,1.
- ☐ c L'écart inter-quartile est 3
- ☐ d Le mode est 3.
- ☐ e Le maximum est 3.
- ☐ f La fréquence de 5 est $\frac{4}{80}$.
- ☐ g Le dé est probablement pipé (truqué).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Pourcentages

3 Trouver la seconde évolution



5 min

Corrigé
p. 313

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Le prix d'un objet subit une augmentation de 50%.

Quel doit être le pourcentage d'une deuxième augmentation pour que le prix double par rapport au prix initial ?

4 Problèmes indépendants



10 min

Corrigé
p. 314

Lycée Loquidy, Nantes

Les problèmes suivants sont indépendants.

- 1 *Problème 1* : parmi les 5 600 abonnés à une médiathèque, 4 410 sont des enfants.

Calculer le pourcentage d'enfants parmi les abonnées à cette médiathèque.

- 2 *Problème 2* : lors d'un sondage pour une élection, 96% des personnes interrogées ont indiqué leur intention de vote. Parmi celles-ci, 52% ont donné leur préférence au candidat sortant.

Quel est le pourcentage d'intentions de vote pour le candidat sortant parmi l'ensemble des personnes interrogées ?

- 3 *Problème 3* : pour fêter le 11/11/11, un commerçant a décidé de baisser tous les prix de 11 €. Un jouet se vend alors 111 €.

Calculer le pourcentage d'évolution, arrondi à 0,1% près, entre le prix initial et le prix final du jouet.

- 4 *Problème 4* : suite à deux épisodes de grippe aviaire, le prix du foie gras augmente de 10%, puis de 20%.

Calculer le taux d'évolution global du prix.

- 5 *Problème 5* : un commerçant décide de baisser ses prix de 7% à l'occasion d'un événement. Au lendemain, il augmente ses prix de 7%.

Calculer le taux d'évolution global du prix.

5 Pourcentages de pourcentages



10 min

Corrigé
p. 315

Lycée Chaptal, Paris

Dans le lycée de Jules, il y a 40% de filles.

De plus, on sait que 20% des filles et 35% des garçons mangent à la cantine.

Déterminer la proportion (en pourcentage) d'élèves qui mangent à la cantine.

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

6 Jeunes et tri sélectif



10 min

Corrigé
p. 315

Lycée Pierre Caraminot, Egletons

Dans une ville, 80% des jeunes font le tri sélectif des déchets, et parmi ces jeunes 15% ont déjà participé à un nettoyage de rivière dans cette ville.

- 1 Déterminer le pourcentage que représentent les jeunes qui font le tri sélectif et ayant participé à un nettoyage de rivière par rapport à l'ensemble des jeunes de cette ville.
- 2 Cette ville est constituée de 2 520 jeunes. Calculer le nombre de jeunes ne faisant pas le tri sélectif des déchets.

7 Soldes sur les trottinettes



10 min

Corrigé
p. 315

Lycée Loquidy, Nantes

- 1 Une trottinette électrique soldée à -30% est vendue à 357 €. Déterminer en justifiant, le prix initial de cette trottinette.
- 2 En octobre 2021 un abonnement d'entrée de gamme sur Flixnet coûtait 7,99 € mensuel, et en novembre 2021, ce même abonnement coûtait 8,99 € par mois.
Déterminer le pourcentage d'évolution du prix de cet abonnement Flixnet entre ces deux dates.

8 Tableau à compléter



15 min

Corrigé
p. 316

Lycée Chaptal, Paris

Compléter le tableau suivant :

Valeur initiale	Évolution	Coefficient multiplicateur	Valeur finale
415	Baisse de 6%		
	Hausse de 3,6%		3 626
44		0,925	
		3,2	537,6

9 Coefficients multiplicateurs



15 min

Corrigé
p. 316

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Durant la première semaine des soldes, un magasin propose 40% de remise sur tous les articles. Lors de la seconde semaine, le magasin propose 20% de remise supplémentaire sur tous les articles non vendus.

- 1 Déterminer les coefficients multiplicateurs associés à chacune de ces remises.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- 2 En déduire le coefficient multiplicateur global associé aux deux remises, puis le taux d'évolution global des prix au cours de ces deux semaines.
- 3 En déduire de quel pourcentage (arrondi à 0,1% près), il faudrait augmenter les prix lors de la troisième semaine pour revenir aux prix initiaux.

10 Cinq évolutions successives



10 min

Corrigé
p. 316

Lycée Alain, Le Vésinet

Au journal télévisé le présentateur dit que le montant de la facture d'électricité va augmenter de 6% par an pendant 5 ans, et ajoute : « soit une hausse de 30% au bout de 5 ans ».

Démontrer que le journaliste dit faux.

Statistiques

11 Temps de trajet



10 min

Corrigé
p. 317

Lycée Brizeux, Quimper

La répartition des 200 salariés d'une entreprise d'après la durée du trajet aller qu'ils effectuent pour se rendre à leur lieu de travail est relevée dans un tableau.

- 1 Compléter ce tableau :

Durée en minutes	n_i (effectifs)	f_i (fréquences) en %	Effectifs cumulés croissants
[5 ; 10[		5	
[10 ; 15[	30		
[15 ; 20[			110
[20 ; 25[		30	
[25 ; 30[			

- 2 On identifie chaque classe à son centre (ce qui revient, par exemple, à considérer qu'un temps de trajet entre 5 et 10 min. est égal à 7,5 min.) Déterminer la moyenne du temps de trajet. Expliquer pourquoi on peut arrondir à la minute près.
- 3 Calculer l'écart-type σ du temps de trajet. Pour combien de valeurs, approximativement, l'écart à la moyenne est-il inférieur à σ ?

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

12 Lait en poudre



10 min

Corrigé
p. 317

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

Les quantités de lait en poudre consommées dans une journée par les 45 bébés d'une crèche sont fournies, en grammes, dans le tableau ci-dessous.

Consommation	Effectifs
40	2
45	3
50	5
55	9
60	7
65	8
70	5
75	4
80	2

- Déterminer la consommation journalière moyenne des bébés.
- Déterminer les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants.
- En déduire les quartiles et l'écart inter-quartile.
- Quel pourcentage de bébés consomment dans une journée au moins 60 g de lait en poudre ?
- Quel pourcentage consomment moins de 70 g de lait en poudre ?

13 Âge des élèves



15 min

Corrigé
p. 318

Lycée Jacques Monod, Clamart

L'âge des élèves d'un lycée, à leur entrée en Seconde, se répartit comme suit :

Âge (ans)	13	14	15	16	17
Répartition (%)	4	12	52	24	8

- Calculer l'âge moyen à l'entrée en Seconde dans le lycée.
- Déterminer l'écart inter-quartile et l'écart-type. Que peut-on en dire ?

14 Notes à un contrôle



15 min

Corrigé
p. 318

Lycée Montesquieu, Bordeaux

On relève les notes obtenues au même contrôle par les élèves d'une même classe (voir page suivante).

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

Calculer la moyenne et l'écart inter-quartile de cette série.

11	12	9	15	1	18	7
6	10	7	2	14	2	15
4	7	14	13	16	6	17
13	9	15	5	10	4	5
15	7	5	9	11	14	14

15 Lancers de dé



15 min

Corrigé
p. 319

Lycée Sacré-Cœur, Aix-en-Provence

On lance deux dés et on ajoute les numéros obtenus à chaque lancer. On remplit le tableau suivant :

Résultats	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs	302	497	904	1 086	1 408	1 640	1 341	1 122	813	575	312
Fréquences (en %)											

- Déterminer pour chaque colonne la fréquence (en %).
- Quelle est la moyenne et l'écart-type de cette série ?
- Quelle est la fréquence de l'événement : « la somme des deux dés est supérieure ou égale à 5 » ?

16 Prix de la baguette



15 min

Corrigé
p. 319

Lycée Descartes, Tours

Le prix d'une baguette a été relevé dans les boulangeries de Farineville :

Prix (en centimes)	75	80	85	90	95
Effectifs	2	5	8	4	1
Fréquences					

- Compléter le tableau.
- Déterminer la moyenne de cette série.
- Quel est son écart inter-quartile ?
- Une boulangerie supplémentaire ouvre et vend sa baguette à 70 centimes. Quel est l'effet sur la moyenne ?

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

17 Série de masses



20 min

Corrigé
p. 320

Lycée Henri IV, Béziers

Les masses en kilogrammes d'une série de personnes se répartissent ainsi :

Masses	62	66	70	74	78	82	86
Fréquences	7 %	12 %	36 %	15 %	16 %	10 %	4 %
Fréquences cumulées							

- 1 Calculer la moyenne des masses de ces personnes.
- 2 Compléter le tableau par les fréquences cumulées croissantes.
- 3 Déterminer l'écart inter-quartile.
- 4 Quel est le pourcentage des personnes pesant moins de 72 kg ?
- 5 Quel est le pourcentage des personnes pesant au moins 80 kg ?

18 Télévision



30 min

Corrigé
p. 320

Lycée Paul Lapie, Courbevoie

Dans une classe de cinquième et une classe de seconde, on a demandé aux élèves le nombre d'heures par semaine consacrées à regarder la télévision.

Classe de seconde (32 élèves) :

Temps (h)	2	6	7	8	9	10	11	14	15
Effectifs	1	2	1	1	2	5	1	1	4
Temps (h)	16	17	18	20	21	22	23	24	
Effectifs	1	1	4	3	1	1	2	1	

Classe de cinquième (27 élèves) :

Temps (h)	0	4	5	8	9	10	11	12	13	
Effectifs	1	1	1	1	2	3	2	2	1	
Temps (h)	15	16	20	28	30	31	32	40	54	56
Effectifs	3	1	1	1	1	1	1	2	1	1

- 1 Pour chaque série, calculer la moyenne, et l'écart inter-quartile.
- 2 Comparer et commenter les résultats des deux séries à l'aide des résultats de la question précédente.
- 3 Donner la distribution des fréquences en pourcentage de la classe de seconde. Quelle est la fréquence en pourcentage de l'événement : « temps inférieur à 14 h » ?
- 4 On regroupe les données des deux séries pour construire une nouvelle série. Calculer la moyenne de la nouvelle série en utilisant les moyennes des deux séries précédentes.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

19 Notes d'un élève



Lycée Camille Sée, Paris

Après 4 devoirs, la moyenne d'un élève est 9,5. Quelle doit être sa cinquième note pour que sa moyenne soit de 10 ?

20 Course à pied



Lycée Claude Bernard, Paris

Dans un groupe de 25 coureurs de 100 m (15 femmes et 10 hommes) :

- 1** La moyenne des temps des femmes est de 12,32 s ; celle des hommes est de 11,48 s. Quelle est la moyenne de l'ensemble des coureurs ?
- 2** Après un mois d'entraînement, la moyenne des temps des femmes a diminué de 0,21 s et celle des hommes a diminué de 0,13 s. De combien la moyenne de l'ensemble a-t-elle varié ?
- 3** L'entraîneur sélectionne alors 10 hommes et 10 femmes. Outre les 10 hommes, il choisit les 10 femmes les plus rapides, dont la moyenne des temps est de 11,97 s. Quelle est la moyenne des temps des femmes qui n'ont pas été sélectionnées ?

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

1 V/F Variation d'une série statistique

Énoncé
p. 305

- a** Faux. La moyenne augmente également de 1 €.
- b** Vrai. Le prix minimal et le prix maximal augmentent de 1 € donc leur différence ne change pas.
- c** Vrai. En effet, tous les prix ont augmenté de 1 €.
- d** Faux. En effet, tous les prix ont augmenté de la même façon, l'écart inter-quartile est inchangé.

2 V/F Jets de dé

Énoncé
p. 305

- a** Faux. C'est un diagramme en bâtons.
- b** Vrai. $\frac{1 \times 12 + 2 \times 16 + 3 \times 32 + 4 \times 4 + 5 \times 4 + 6 \times 12}{12 + 16 + 32 + 4 + 4 + 12} = 3,1$.
- c** Faux. Dans l'ordre croissant, la 20^e valeur vaut 2 et la 60^e valeur vaut 3, donc l'écart inter-quartile est 1.
- d** Vrai. L'effectif le plus grand est atteint pour la valeur 3.
- e** Faux. Le maximum est 6 (ne pas confondre avec le mode, qui concerne l'effectif maximal).
- f** Vrai.
- g** Vrai. On ne peut pas en être absolument certain, mais il est très improbable que la fréquence du 3 soit 8 fois celle du 4 ou du 5 avec un dé normal (on peut calculer qu'avec un dé normal, une telle répartition arrive dans 1 cas sur 1 800 milliards!).

3 Trouver la seconde évolution

Énoncé
p. 306

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Notons x le prix de l'objet avant la première augmentation.

Notons p le pourcentage de la deuxième augmentation.

Nous souhaitons que le prix final soit égal au double du prix initial, donc :

$$\begin{aligned}
 x \times \left(1 + \frac{50}{100}\right) \times \left(1 + \frac{p}{100}\right) &= 2x \iff 1,5 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 2 \\
 &\iff 1 + \frac{p}{100} = \frac{2}{1,5} \\
 &\iff \frac{p}{100} = \frac{4}{3} - 1 \\
 &\iff p = \frac{1}{3} \times 100 \\
 &\iff p \approx 33,33.
 \end{aligned}$$

La deuxième augmentation doit être d'environ 33,33% pour que le prix double.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 Problèmes indépendants

Énoncé
p. 306

Lycée Loquidy, Nantes

- 1 On effectue le calcul suivant :

$$\frac{4\,410}{5\,600} \times 100 = 78,75.$$

Ainsi, les enfants représentent 78,75% des abonnés à cette médiathèque.

- 2 On effectue le calcul suivant :

$$\frac{96}{100} \times \frac{52}{100} \times 100 = 49,92.$$

Ainsi, le pourcentage d'intentions de vote pour le candidat sortant est 49,92%.

- 3 Le prix initial du jouet est $111 + 11 = 122$ €.

$$\frac{11}{122} \times 100 \approx 9.$$

Le pourcentage d'évolution du prix du jouet est donc -9% .

- 4 Une hausse de 10% signifie que l'on multiplie par $1 + \frac{10}{100}$, soit par 1,1 (premier coefficient multiplicateur).

Une hausse de 20% signifie que l'on multiplie par 1,2 (second coefficient multiplicateur).

$$1,1 \times 1,2 = 1,32.$$

Ce dernier résultat est le coefficient multiplicateur global. Il est supérieur à 1 donc il s'agit d'une augmentation (c'était plutôt évident dès le début ici).

Le taux d'évolution global est donc égal à $+32\%$.

- 5 Une baisse de 7% signifie que l'on multiplie par $1 - \frac{7}{100}$, soit par 0,93 (premier coefficient multiplicateur).

Une hausse de 7% signifie que l'on multiplie par 1,07 (second coefficient multiplicateur).

$$0,93 \times 1,07 = 0,9951.$$

Ce dernier résultat est le coefficient multiplicateur global. Il est inférieur à 1 donc il s'agit d'une diminution.

$$(0,9951 - 1) \times 100 = -0,49.$$

Le taux d'évolution global est donc à peu près égal à $-0,5\%$ (arrondi à 0,1 près).

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

5 Pourcentages de pourcentages

Énoncé
p. 306

Lycée Chaptal, Paris

- 20% des filles (qui représentent 40% des élèves du collège) mangent à la cantine.

$$\underbrace{\frac{20}{100} \times \frac{40}{100}}_{20\% \text{ de } 40\%} \times 100 = 8.$$

Cela représente donc 8% des élèves du collège.

- De plus, il y a 60% de garçons dans le collège, dont 35% mangent à la cantine.

$$\frac{35}{100} \times \frac{60}{100} \times 100 = 21.$$

Cela représente donc 21% des élèves du collège.

$$8 + 21 = 29.$$

Finalement, 29% des élèves du collège mangent à la cantine.

6 Jeunes et tri sélectif

Énoncé
p. 307

Lycée Pierre Caraminot, Egletons

- On nous demande ici de calculer 15% de 80% :

$$\frac{15}{100} \times \frac{80}{100} \times 100 = 12\%.$$

Il y a donc 12% de jeunes qui ont participé à un nettoyage de rivière.

- Il y a $100 - 80 = 20\%$ de jeunes ne faisant pas le tri sélectif.

$$\frac{20}{100} \times 2\,520 = 504.$$

Il y a donc 504 jeunes ne faisant pas le tri sélectif.

7 Soldes sur les trottinettes

Énoncé
p. 307

Lycée Loquidy, Nantes

- Soit x le prix initial de la trottinette vendue 357 € après réduction de 30%. Alors :

$$\left(1 - \frac{30}{100}\right)x = 357 \iff x = \frac{357}{0,7} = 510.$$

Le prix initial était donc de 510 €.

- On a :

$$\frac{8,99 - 7,99}{7,99} \times 100 \approx 12,5\%.$$

L'augmentation de l'abonnement est donc d'environ 12,5%.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

8 Tableau à compléter

Énoncé
p. 307

Lycée Chaptal, Paris

Voici le tableau complété :

Valeur initiale	Évolution	Coefficient multiplicateur	Valeur finale
415	Baisse de 6%	0,94	390,1
3 500	Hausse de 3,6%	1,036	3 626
44	Baisse de 7,5%	0,925	40,7
168	Hausse de 220 %	3,2	537,6

9 Coefficients multiplicateurs

Énoncé
p. 307

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

- 1 Une remise de 40% correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{40}{100}$, soit 0,6.

20% de remise correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{20}{100}$, soit 0,8.

- 2 Le coefficient multiplicateur global associé aux deux remises est :
 $0,6 \times 0,8 = 0,48$.

Or, $0,48 = 1 - 0,52$; donc l'évolution globale est une réduction de 52%.

- 3 Le coefficient multiplicateur réciproque de 0,48 est :

$$\frac{1}{0,48} \approx 2,0833 = 1 + 1,0833 = 1 + \frac{108,33}{100}.$$

Les prix devraient alors augmenter d'environ 108,3% pour qu'ils reviennent aux prix initiaux.

10 Cinq évolutions successives

Énoncé
p. 308

Lycée Alain, Le Vésinet

Cinq augmentations de 6% chacune donne un coefficient multiplicateur global égal à :

$$\left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 \approx 1,3382.$$

Or, une augmentation de 30% correspond à un coefficient multiplicateur égal à :

$$1 + \frac{30}{100} = 1,3.$$

Les deux coefficients multiplicateurs ne sont pas égaux ; par conséquent, ils ne traduisent pas la même évolution.

Le premier coefficient étant plus grand que le second, les cinq augmentations de 6% augmentent davantage les prix qu'une seule augmentation de 30%

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

11 Temps de trajet

Énoncé
p. 308

Lycée Brizeux, Quimper

Durée en minutes	n_i (effectifs)	f_i (fréquences) en %	Effectifs cumulés croissants
[5 ; 10[	10	5	10
[10 ; 15[	30	15	40
[15 ; 20[	70	35	110
[20 ; 25[	60	30	170
[25 ; 30[	30	15	200

- 2 On calcule $\bar{x} = (10 \times 7,5 + \dots + \dots + 30 \times 27,5)/200 = 19,25$, soit 19 min et 15 s.

En assimilant chaque classe à son centre, on a pu faire une erreur de 2,5 min. sur chaque valeur, et donc également sur la moyenne (par linéarité de la moyenne). Une précision à la seconde près est donc un peu exagérée.

Cependant, on peut espérer que les erreurs se compensent dans une certaine mesure, donc il est pertinent d'arrondir à 19 min.

- 3 En utilisant la valeur 19 pour la moyenne, on obtient $\sigma \approx 5,3$. Ceci est cohérent avec la série, où on observe 130 valeurs entre 15 et 25 min. (environ deux tiers des valeurs).

12 Lait en poudre

Énoncé
p. 309

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

- 1 On obtient une moyenne d'environ 60,2 g. :

$$\frac{2 \times 40 + 3 \times 45 + 5 \times 50 + 9 \times 55 + 7 \times 60 + 8 \times 65 + 5 \times 70 + 4 \times 75 + 2 \times 80}{45} \approx 60,2.$$

Consommation	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
40	2	2	45
45	3	5	43
50	5	10	40
55	9	19	35
60	7	26	26
65	8	34	19
70	5	39	11
75	4	43	6
80	2	45	2

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 Comme il y a 45 bébés, on dépasse le premier quart au 12^e bébé et le troisième au 34^e bébé. D'après la colonne des effectifs croissants, $q_1 = 55$ g (consommation du 12^e bébé) et $q_3 = 65$ g, donc l'écart inter-quartile est de 10 g (la série est peu dispersée).

4 D'après les effectifs cumulés décroissants, 26 bébés consomment au moins 60 g de lait en poudre, soit :

$$\frac{26}{45} \times 100 \approx 58\%.$$

5 D'après les effectifs cumulés croissants, 34 bébés consomment moins de 70 g de lait en poudre soit :

$$\frac{34}{45} \times 100 \approx 76\%.$$

13 Âge des élèves

Énoncé
p. 309

Lycée Jacques Monod, Clamart

1 L'âge moyen est $\bar{x} = 15,2$ (donc 15 ans).

2 On dépasse 25% à partir de 15 ans et 75% à partir de 16 ans. L'écart inter-quartile est donc de 1 an.

La calculatrice donne un écart-type de 0,89.

Ces deux valeurs montrent que la série n'est pas très dispersée. Il fallait s'y attendre puisque la plupart des élèves ont des âges très proches dans une classe.

14 Notes à un contrôle

Énoncé
p. 309

Lycée Montesquieu, Bordeaux

On peut ranger les différentes notes dans un tableau d'effectifs (on a indiqué également les effectifs cumulés croissants) :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n_i	1	2	0	2	3	2	4	0	3	2	2	1	2	4	4	1	1	1	0
s_i	1	3	3	5	8	10	14	14	17	19	21	22	24	28	32	33	34	35	35

Les données étaient rangées dans un tableau de 7 colonnes et 5 lignes, donc l'effectif total est $n = 35$. On calcule la moyenne :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + \dots}{n} \approx 9,77.$$

Le premier quart est atteint à partir de la 9^e note, donc 6, et le troisième à partir de la 27^e, donc 14.

On a donc le premier quartile $q_1 = 6$, le troisième quartile $q_3 = 14$, et l'écart inter-quartile est 8.

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

15 Lancers de dé

Énoncé
p. 310

Lycée Sacré-Cœur, Aix-en-Provence

- 1 On calcule l'effectif total : $N = 10\,000$. Le calcul des fréquences se borne donc à « ajouter » une virgule :

Résultats	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs	302	497	904	1 086	1 408	1 640	1 341	1 122	813	575	312
Fréquences	3,02	4,97	9,04	10,86	14,08	16,40	13,41	11,22	8,13	5,75	3,12

- 2 Avec la calculatrice, on obtient une moyenne de 7,0 et un écart-type de 2,4
- 3 On peut se contenter d'ajouter les fréquences, pour les résultats allant de 5 à 12. Essayons une autre méthode. La somme des 2 dés est strictement inférieure à 5 avec la fréquence :

$$3,02 + 4,97 + 9,04 = 17,03 \%$$

Elle est donc supérieure ou égale à 5 avec la fréquence :

$$100 - 17,03 = 82,97 \%$$

16 Prix de la baguette

Énoncé
p. 310

Lycée Descartes, Tours

- 1 L'effectif total est $n = 20$. Complétons le tableau et ajoutons la ligne des effectifs cumulés croissants :

Prix (en centimes)	75	80	85	90	95
Effectifs	2	5	8	4	1
Fréquences	0,1	0,25	0,4	0,2	0,05
Fréquences cumulées	0,1	0,35	0,75	0,95	1,00

- 2 La moyenne est $\bar{x} = 84,25$ centimes. La précision des données est au centime près, on donne donc la moyenne au centime près également :

$$\bar{x} \approx 84 \text{ centimes.}$$

- 3 On dépasse 0,25 en fréquences cumulées à partir de 80 c, et 0,75 à partir de 85 c. L'écart inter-quartile est donc de 5 c.
- 4 Tout se passe comme si on avait dans notre nouvelle série deux sous-groupes. Le premier est le sous-groupe des 20 premières boulangeries, de moyenne 84 c. Le second est le sous-groupe constitué par la seule nouvelle boulangerie, de moyenne 70 centimes. La moyenne finale est donc :

$$\bar{X} = \frac{20 \times 84 + 1 \times 70}{21} \approx 83,3.$$

La moyenne a donc légèrement diminué.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

17 Série de massesÉnoncé
p. 311

Lycée Henri IV, Béziers

- 1 Pour calculer la moyenne $\bar{x}$, on utilise la formule :

$$\bar{x} = f_1 x_1 + \dots$$

où x_i sont les valeurs et f_i leur fréquence.

On a donc :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 62 \times 0,07 + 66 \times 0,12 + 70 \times 0,36 + 74 \times 0,15 \\ &\quad + 78 \times 0,16 + 82 \times 0,10 + 86 \times 0,04 \\ &\approx 72,7 \text{ kg}\end{aligned}$$

Comme les valeurs de la série sont visiblement à 2 kg près, donner la moyenne avec une précision beaucoup plus grande est illusoire. Donnons la moyenne au kg près : 73 kg.

- 2 Pour les fréquences cumulées, on ajoute les fréquences au fur et à mesure des valeurs. Pensez à contrôler que la dernière fréquence cumulée est de 100% ; si ce n'est pas le cas ... vérifiez vos calculs !

Masses	62	66	70	74	78	82	86
Fréquences	7%	12%	36%	15%	16%	10%	4%
Fréquences cumulées	7%	19%	55%	70%	86%	96%	100%

- 3 La première fréquence cumulée supérieure ou égale à 25 % correspond à 70 kg. Celle où l'on dépasse 75 % correspond à 78 kg. Ces deux valeurs sont donc respectivement les premiers et troisième quartiles de la série, et l'écart inter-quartile est de 8 kg.
- 4 Le pourcentage de personnes pesant moins de 72 kg est justement la fréquence cumulée croissante correspondant à 70 kg, soit 55 %.
- 5 Dans cette série, « au moins 80 kg » signifie 82 ou 86 kg, donc 14 % de la population totale.

18 TélévisionÉnoncé
p. 311

Lycée Paul Lapie, Courbevoie

- 1 Pour la classe de seconde : la moyenne est $\bar{x} \approx 14,4$.

Il y a 32 élèves en seconde. Les premiers et troisième quartiles correspondent donc à la 8^e valeur (10 h) et la 24^e (18 h). L'intervalle inter-quartile est donc de 8 h.

Pour la classe de cinquième, on trouve une moyenne de $\bar{y} \approx 19,1$.

Il y a 27 élèves en cinquième, on s'intéresse donc à la 7^e valeur (10 h) et la 21^e (30 h). On obtient donc un intervalle inter-quartile de 20 h.

INFORMATIONS CHIFFRÉES • CHAP. 9

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2** Si on regarde la seule moyenne, on voit que les élèves de cinquième regardent la télévision plus longtemps que leurs camarades de seconde.

Néanmoins, la comparaison de la dispersion montre que les situations des élèves du collège sont beaucoup plus diverses : un élève ne la regarde pas du tout la télévision, l'un d'entre eux la regarde... 8 heures par jour ! C'est ce petit nombre de « téléphages » qui tire la moyenne vers le haut.

- 3** Donnons le tableau des fréquences :

Temps (h)	2	6	7	8	9	10	11	14	15
Effectifs	1	2	1	1	2	5	1	1	4
Fréquences (%)	3,1	6,3	3,1	3,1	6,3	15,7	3,1	3,1	12,5

Temps (h)	16	17	18	20	21	22	23	24
Effectifs	1	1	4	3	1	1	2	1
Fréquences (%)	3,1	3,1	12,5	9,4	3,1	3,1	6,3	3,1

La somme des fréquences vaut 100 %. Si, pour des raisons d'arrondi, ce n'était pas le cas, l'habitude veut que l'on corrige les résultats en modifiant la fréquence maximale (ce que nous avons d'ailleurs fait).

La fréquence cherchée est d'environ 41 %.

- 4** On connaît les moyennes de deux-sous groupes, la moyenne générale est donnée par :

$$\bar{X} = \frac{32\bar{x} + 27\bar{y}}{32 + 27} \approx 16,6.$$

19 Notes d'un élève

➔ Énoncé
p. 312

Lycée Camille Sée, Paris

Pour avoir une moyenne de 10 sur 5 notes, il faut que le total des notes obtenu soit 50. Pour l'instant, l'élève a une moyenne de 9,5 sur 4 notes, soit un total de $4 \times 9,5 = 38$. Il lui faut donc obtenir $50 - 38 = 12$ au prochain devoir pour obtenir 10 de moyenne.

20 Course à pied

➔ Énoncé
p. 312

Lycée Claude Bernard, Paris

- 1** On calcule la moyenne pondérée :

$$m = \frac{15 \times 12,32 + 10 \times 11,48}{25} = 11,984.$$

11,984 est le résultat exact donné par la calculatrice. Pour formuler sa réponse, il faut également s'interroger sur la précision des mesures des temps de chaque coureur. Les moyennes sont données au centième près, il faut donc se contenter de ce niveau de précision. Une réponse plus raisonnable est donc : 11,98 s.

CORRIGÉS

- 2** Pour connaître la variation, on calcule la moyenne pondérée des variations :

$$\Delta = \frac{15 \times 0,21 + 10 \times 0,13}{25} = 0,178.$$

Au centième près, on calcule donc une amélioration de 0,18 s de l'ensemble des performances.

- 3** La moyenne de l'ensemble des femmes (on la note F) est donnée par l'énoncé, compte tenu de l'amélioration de leurs performances :

$$F = 12,32 - 0,21 = 12,11 \text{ s.}$$

$\bar{x}$ la moyenne des femmes sélectionnées et $\bar{y}$ celle des autres femmes.

La moyenne du groupe féminin est la moyenne pondérée de $\bar{x}$ et $\bar{y}$, d'où l'équation :

$$\begin{aligned} F &= \frac{10\bar{x} + 5\bar{y}}{15} \\ \iff 15 \times F &= 10\bar{x} + 5\bar{y} \\ \iff \frac{15 \times F - 10\bar{x}}{5} &= \bar{y}. \end{aligned}$$

Comme $\bar{x} = 11,97$ et $F = 12,11$, il vient : $\bar{y} = 12,39$.

Chapitre 10

Probabilités

Plan du chapitre

1. Expérience aléatoire
2. Loi de probabilité
3. Probabilité d'un événement

Exercice type

Lycée Montaigne, Paris

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
On suppose qu'il y a équiprobabilité.

- 1 Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?
- 2 La carte obtenue est un as. On le remet dans le paquet, on mélange et on tire de nouveau une carte. Quelle est la probabilité d'obtenir encore un as ?
- 3 On a encore obtenu un as ! On ne le remet pas dans le paquet et on tire une nouvelle carte. Quelle est la probabilité d'obtenir encore un as ?

Voir corrigé page 325

1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience (concrète ou abstraite), dont le résultat (appelé *issue*) n'est pas déterminé à l'avance. Par exemple, le jeu de pile ou face, un lancer de dé, la distribution de cartes à jouer sont des expériences aléatoires.

- $L'univers$ est l'ensemble des issues de l'expérience. On le note souvent Ω .
Par exemple, si on lance un dé à 6 faces, l'ensemble des issues est :
$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$
- Un *événement* regroupe une ou plusieurs issues de l'expérience. C'est un sous-ensemble de Ω . Il est décrit par une propriété, par ex. $A = \ll \text{le résultat est pair} \gg$, ou tout simplement par ses éléments : $A = \{2; 4; 6\}$.

On considère deux événements A et B .

- $A \cup B$ (lu : « A ou B ») est l'événement qui contient toutes les issues de l'événement A et toutes celles de B .

- $A \cap B$ (lu : « A et B ») est l'événement qui contient les issues communes à A et B. Deux événements sont *incompatibles* s'ils ne comportent aucune issue commune (par exemple : « le résultat est 2 » et « le résultat est impair »).
- $\bar{A}$ est l'événement contraire de A. Il contient exactement toutes les issues qui ne sont pas dans A. En particulier, A et $\bar{A}$ sont incompatibles.
- $\overline{A \cup B}$ est le contraire de « A ou B » ; c'est donc le contraire de A et le contraire de B :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

De même,

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

2 Loi de probabilité

Soit un univers $\Omega = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ contenant n issues.

Une *loi de probabilité* sur Ω est la donnée de n nombres p_i associés à chaque valeur x_i , pour $1 \leq i \leq n$, avec :

$$p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

On peut donner une loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

Valeurs x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
Probabilités p_i	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Dans le cas où $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, on dit que les issues sont *équiprobables* et dans ce cas, $p_i = \frac{1}{n}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Cette situation est souvent indiquée dans l'énoncé par des expressions comme « on choisit au hasard », « le dé n'est pas truqué », etc.

3 Probabilité d'un événement

Si $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ est un événement, la probabilité de l'événement A est, par définition : $P(A) = p_{i_1} + \dots + p_{i_k}$.

Dans le cas d'issues équiprobables, tous les p_i étant égaux à $\frac{1}{n}$, on a donc :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

Il existe deux cas particuliers :

- l'événement *certain* Ω regroupe tous les événements élémentaires.
On a donc :

$$P(\Omega) = 1.$$

PROBABILITÉS • CHAP. 10

- l'événement *impossible* $\emptyset$ ne contient aucun événement élémentaire.
On a donc :

$$P(\emptyset) = 0.$$

En faisant $P(A) + P(B)$, on compte deux fois la probabilité des événements élémentaires communs à A et B . On en déduit la formule :

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

En particulier :

- si A et B sont incompatibles, on a $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- comme $A \cup \bar{A} = \Omega$, on a : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

➔ Solution de l'exercice type

Lycée Montaigne, Paris

- 1 Il y a 32 cartes dans le jeu (32 issues possibles), dont 4 as (4 issues favorables). La probabilité d'obtenir un as est donc $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
- 2 Comme on remet la carte dans le paquet, le second tirage s'effectue dans les mêmes conditions que le précédent, et la probabilité d'obtenir un second as est encore de $\frac{1}{8}$.
- 3 Cette fois, au moment du second tirage, le paquet contient 31 cartes (31 issues possibles) et seulement 3 as (3 issues favorables) car on n'a pas remis la carte dans le paquet. La probabilité d'obtenir un as est cette fois : $\frac{3}{31}$.

Voir énoncé page 323

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Jeu de cartes

5 min

Corrigé
p. 332

Un jeu de 52 cartes contient 4 couleurs : pique, cœur, carreau, trèfle ; chaque couleur possède 13 cartes : as, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame et roi.

On tire au hasard une carte et on suppose qu'il y a équiprobabilité.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a** La probabilité de tirer l'as de pique est de $\frac{1}{52}$.
- b** La probabilité de tirer un as est de $\frac{1}{4}$.
- c** La probabilité de tirer un roi ou une reine est de $\frac{2}{13}$.

2 Cartes



10 min

Corrigé
p. 332

Lycée Marie Curie, Sceaux

On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire une carte au hasard. On suppose qu'il y a équiprobabilité. On note A l'événement « la carte est un as » et P l'événement « la carte est un pique ».

- 1 Quelle est la probabilité de A ? De P ?
- 2 Décrire l'événement $A \cap P$ et donner sa probabilité.
- 3 Décrire l'événement $A \cup P$ et donner sa probabilité.
- 4 Quelle est la probabilité que la carte obtenue ne soit pas un as ?

3 Jeu de dés



15 min

Corrigé
p. 333

Lycée Edgar Quinet, Paris

Les faces d'un dé sont numérotées de 1 à 6. On jette ce dé deux fois de suite et on forme un nombre à 2 chiffres, celui des dizaines étant le chiffre obtenu au premier jet, celui des unités étant celui obtenu au second jet.

- 1 Reproduire et compléter le tableau page ci-contre, afin d'écrire tous les résultats possibles.

Quelle est la probabilité de chaque résultat ?

- 2 Calculer : la probabilité p_1 que le résultat soit un multiple de 5, la probabilité p_2 qu'il soit pair, la probabilité p_3 qu'il soit supérieur à 30.

PROBABILITÉS • CHAP. 10

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13			
2	21					
3		32				
4						
5						
6						

4 Des urnes



15 min

Corrigé
p. 333

Lycée La Folie Saint James, Neuilly-sur-Seine

Une urne contient 100 boules numérotées 00, 01, 02,..., 99. On tire au hasard une boule et on lit le numéro obtenu. On considère les événements A : « Le numéro obtenu contient au moins un 0 » et B : « Le numéro obtenu contient au moins un 9 ».

- 1 Déterminer la probabilité des événements A et B .
- 2 Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
- 3 Déterminer la probabilité de l'événement $A \cup B$.

5 À la sortie du spectacle



15 min

Corrigé
p. 334

Lycée Chaptal, Paris

À la sortie d'un spectacle, on demande à une personne adulte, qui est une femme ou un homme, choisie au hasard si elle a aimé ou non le spectacle.

On considère les événements suivants :

- F : « La personne est une femme » ;
- O : « La personne répond oui ».

- 1 Énoncer par des phrases les événements suivants : $F \cap O$, $\overline{F}$, $\overline{F \cup O}$ et $\overline{F \cap O}$.
- 2 On donne :

$$p(F) = 0,65 \quad ; \quad p(O) = 0,9 \quad ; \quad p(F \cup O) = 0,94.$$

Calculer les probabilités des événements de la question précédente.

6 Groupes sanguins



10 min

Corrigé
p. 334

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

La répartition des groupes sanguins dans la population française est présentée dans le tableau suivant :

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

		Groupe sanguin				
		O	A	B	AB	Total
rhésus	Rh+	37%	39%	7%	2%	
	Rh-	6%	6%	2%	1%	
Total						100%

L'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard une personne dans cette population. On assimile les probabilités aux fréquences observées.

- 1 Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
- 2 Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
 - (a) A : « la personne est du groupe A »
 - (b) Rh+ : « la personne a un rhésus positif »
 - (c) AB- : « la personne est du groupe AB rhésus négatif »
- 3 La personne que l'on a choisie est rhésus négatif. Quelle est la probabilité qu'elle soit du groupe AB ?

7 La cible



10 min

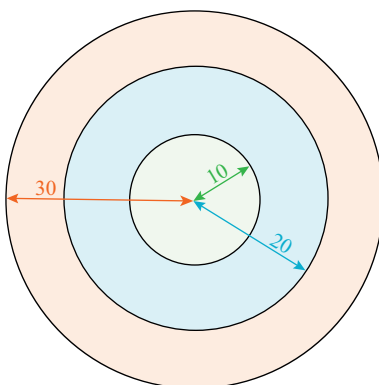
Corrigé
p. 335

Lycée Chaptal, Paris

Une cible est constituée de trois cercles concentriques de rayons respectifs 10 cm, 20 cm et 30 cm.

Un tireur à l'arc vise la cible avec des flèches et l'atteint à chaque fois !

La probabilité d'atteindre chaque zone est proportionnelle à l'aire de la zone.



Calculer la probabilité d'atteindre :

- 1 la zone au centre ;
- 2 la zone du milieu ;
- 3 la zone extérieure.

PROBABILITÉS • CHAP. 10

8 Feu tricolore



10 min

Corrigé
p. 335

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant un temps égal à rouge et orange (autrement dit, l'automobiliste a autant de chance de passer que de s'arrêter).

- 1 Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
- 2 Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
 - (a) les trois feux verts ?
 - (b) deux des trois feux verts ?

9 Probabilités et proportions



15 min

Corrigé
p. 336

Lycée Chaptal, Paris

Parmi les 120 adhérents que compte le club de sport de Quentin, 42 pratiquent le tennis, 67,5% jouent au foot et 24 personnes pratiquent les deux activités. On note :

- T : « l'adhérent joue au tennis. »
- F : « l'adhérent joue au foot. »

On donnera toutes les proportions en pourcentages.

- 1 Décrire par une phrase ce que représente $T \cup \overline{F}$.
- 2 Calculer le nombre de joueurs de foot.
- 3 Calculer $p(T)$, $p(\overline{T})$ et $p(T \cap F)$.
- 4 Calculer la proportion d'adhérents qui jouent au tennis ou au foot.
- 5 Calculer la proportion d'adhérents ne jouant ni au tennis, ni au foot.
- 6 Avec l'ouverture de nouvelles activités, le nombre d'adhérents au club augmente de 13% tous les ans.
Combien y aura-t-il d'adhérents dans 3 ans ? (arrondir à l'unité)

10 Le jeu de Luc



15 min

Corrigé
p. 337

Lycée Chaptal, Paris

Luc participe à un jeu de dés dont les règles sont les suivantes : on lance 2 dés cubiques non truqués et on additionne les numéros des faces supérieures.

- Si la somme obtenue est impaire, Luc gagne 1 €.
- Si la somme obtenue est un multiple de 3, Luc gagne 3 €.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

INTERROS

- Si la somme obtenue est supérieure ou égale à 10, Luc gagne 6 €.
- Si aucune des conditions précédentes n'est vérifiée, Luc perd 4 €.

Si plusieurs de ces conditions sont vérifiées, les gains se cumulent.

- 1 Construire un tableau à double entrée indiquant les gains ou les pertes de Luc.
- 2 Quelle est la probabilité que Luc remporte une somme supérieure ou égale à 4 €?

11 Jetons



15 min

Corrigé
p. 338

Lycée Charlemagne, Paris

Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On tire au hasard un jeton dans l'urne, on note son numéro, on le remet dans l'urne, on tire à nouveau au hasard un jeton dans l'urne et on note son numéro. On forme ainsi une suite (J_1, J_2) de 2 numéros. Attention, la suite $(2, 1)$, par exemple, est différente de la suite $(1, 2)$.

- 1 Justifier brièvement que la probabilité de chaque issue est égale à $\frac{1}{16}$.
- 2 Soit A l'événement : « $J_1 < J_2$ ». Soit B l'événement : « $J_1 + J_2 = 4$ ».
 (a) Écrire les événements A et B comme des ensembles.
 (b) Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap \bar{B})$.
 (c) En déduire $P(\bar{A})$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup \bar{B})$.
- 3 Soit E l'événement : « J_1 et J_2 sont impairs » et F l'événement : « $J_1 + J_2$ est impair ». Déterminer $P(E)$, $P(F)$, $P(E \cap F)$, $P(E \cup F)$.

12 Au supermarché



15 min

Corrigé
p. 339

Lycée Marie Curie, Versailles



Retrouvez le corrigé de cet exercice en vidéo.

Un supermarché de quartier est ouvert de 9h à 19h. Le gérant a mesuré que la première caisse est occupée 5 h par jour (événement A) et la seconde, 6 heures sur dix (événement B). Les deux sont occupées simultanément 3 h par jour.

- 1 Donner les probabilités des événements A , B et $A \cap B$.
- 2 Quelle est la probabilité que la seconde caisse soit libre ?
- 3 Quelle est la probabilité qu'au moins une des caisses soit libre ?
- 4 Quelle est la probabilité que les deux caisses soient libres ?

PROBABILITÉS • CHAP. 10

13 Tirages dans un jeu de cartes



20 min

Corrigé
p. 339

Lycée Charlemagne, Paris

Un jeu de 32 cartes contient les cartes 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As dans les quatre couleurs trèfle, carreau, cœur, pique. Les *figures* sont les Valets, Dames et Rois. On tire au hasard une carte en supposant qu'il y ait équiprobabilité. Soit C l'événement « tirer un cœur » et H l'événement « tirer une figure ».

- 1 Définir par une phrase les événements $\bar{C}$, $C \cap H$, $C \cup H$, $C \cap \bar{H}$.
- 2 Calculer la probabilité des événements C , $\bar{C}$, H , $\bar{H}$, $C \cap H$, $C \cup H$ et $C \cap \bar{H}$.
- 3 Écrire $C \cap \bar{H}$ sous la forme d'un ensemble.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

1 V/F Jeu de cartes

Énoncé
p. 326

- a** *Vrai.* Si le jeu n'est pas truqué, le tirage de chaque carte est équiprobable, or le jeu contient 52 cartes, donc la probabilité de tirer une carte particulière est $\frac{1}{52}$.
- b** *Faux.* Il y a 4 as. L'événement « tirer un as » contient les 4 événements élémentaires « tirer l'as de pique », « tirer l'as de cœur », « tirer l'as de trèfle », « tirer l'as de carreau ». La probabilité de tirer un as est donc $4 \times \frac{1}{52} = \frac{1}{13}$.
- c** *Vrai.* Comme dans la question précédente, la probabilité de tirer un roi est de $\frac{1}{13}$, celle de tirer une reine est de $\frac{1}{13}$. Comme ces deux événements sont disjoints (incompatibles), leur réunion a pour probabilité $\frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$.

2 Cartes

Énoncé
p. 326

Lycée Marie Curie, Sceaux

- 1** Il y a 4 as dans le jeu, donc 4 issues favorables. Le jeu contient 52 cartes, donc 52 issues possibles. L'événement A a donc pour probabilité la valeur suivante : $4 \times \frac{1}{52} = \frac{1}{13}$.
Chaque couleur ayant le même nombre de cartes, on peut considérer que le tirage de chaque couleur est équiprobable. Il y a 4 couleurs, donc la probabilité de tirer un pique est $\frac{1}{4}$.
- 2** L'événement $A \cap P$ est « la carte est l'as de pique ». Une seule issue favorables pour 52 possibles, donc la probabilité de cet événement est $\frac{1}{52}$.
- 3** $A \cup P$ signifie « la carte est un as ou un pique ». Il y a 13 piques, auxquels on ajoute les 3 autres as, donc 16 issues favorables, pour 52 possibles, donc : $P(A \cup P) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.
On peut également appliquer directement la formule du cours :
$$P(A \cup P) = P(A) + P(P) - P(A \cap P) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$
- 4** Il s'agit de l'événement contraire $\bar{A}$ dont la probabilité est :
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{12}{13}.$$

PROBABILITÉS • CHAP. 10

3 Jeu de dés

Énoncé
p. 326

Lycée Edgar Quinet, Paris

1 On complète le tableau :

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Si les dés ne sont pas pipés, les 6 valeurs sont équiprobables pour les deux chiffres, donc chaque résultat est équiprobable. On dénombre $6 \times 6 = 36$ résultats, qui ont donc tous une probabilité de $\frac{1}{36}$.

- 2
- Le résultat est un multiple de 5 si et seulement si le deuxième jet donne 5, ce qui arrive avec la probabilité $p_1 = \frac{1}{6}$.
 - Le résultat est pair si et seulement si le deuxième jet donne 2, 4, ou 6, ce qui est la moitié des cas possibles, donc $p_2 = \frac{1}{2}$.
 - Le résultat est supérieur à 30 si et seulement si le premier jet donne 3, 4, 5 ou 6, soit deux tiers des cas possibles, d'où $p_3 = \frac{2}{3}$.

4 Des urnes

Énoncé
p. 327

Lycée La Folie Saint James, Neuilly-sur-Seine

- 1 On dénombre 100 issues possibles (les 100 numéros). 10 numéros commencent par 0, 10 numéros se terminent par 0. Attention à ne pas compter deux fois 00, qui relève des deux cas. Il y a donc 19 cas favorables. La probabilité de A est donc $P(A) = 0,19$.
De même, 19 numéros contiennent au moins un 9, donc $P(B) = 0,19$.
- 2 On cherche les numéros qui contiennent au moins un 0 et au moins un 9. Comme les numéros ont deux chiffres, il y a donc deux issues favorables : 09 et 90. On en déduit : $P(A \cap B) = \frac{2}{100} = 0,02$.
- 3 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,36$.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

5 À la sortie du spectacle

Énoncé
p. 327

Lycée Chaptal, Paris

- 1 • $F \cap O$: « La personne est une femme qui répond oui ».
- $\overline{F}$: « La personne n'est pas une femme » donc : « La personne est un homme » (car ici, il n'y a que deux genres possibles d'après l'énoncé).
- $\overline{F \cup O}$: commençons par décrire $F \cup O$: « La personne est une femme ou répond oui ». Le contraire de cet événement est : « La personne n'est pas une femme et répond non. ».
- Ainsi, $\overline{F \cup O}$: « La personne est un homme qui dit non ».
- On cherche le contraire de « La personne est une femme qui répond oui ». Donc :
 $\overline{F \cap O}$: « La personne est un homme ou répond non ».
- 2 • $p(F \cap O) = p(F) + p(O) - p(F \cup O) = 0,65 + 0,9 - 0,94 = 0,61$.
- $p(\overline{F}) = 1 - p(F) = 1 - 0,65 = 0,35$.
- $p(\overline{F \cup O}) = 1 - p(F \cup O) = 1 - 0,94 = 0,06$.
- $p(\overline{F \cap O}) = 1 - p(F \cap O) = 1 - 0,61 = 0,39$.

6 Groupes sanguins

Énoncé
p. 327

Lycée Fernand Daguin, Mérignac

Complétons avant tout le tableau :

		Groupe sanguin				
		O	A	B	AB	Total
rhésus	Rh+	37%	39%	7%	2%	85%
	Rh-	6%	6%	2%	1%	15%
Total		43	45%	9%	3%	100%

- 1 L'univers de l'expérience est la population française.
- 2 (a) Il y a 45% de personnes qui ont un groupe sanguin A, donc $P(A) = 0,45$.
- (b) Il y a 85% de personnes ayant un rhésus positif, donc $P(Rh+) = 0,85$.
- (c) Il y a 1% de personnes ayant un groupe sanguin AB avec un rhésus négatif, donc $P(AB-) = 0,01$.
- 3 Ici, l'univers change : c'est désormais l'ensemble des personnes ayant un rhésus négatif. Il y a 1% de personnes du groupe AB sur les 15%, donc la probabilité demandée est égale à $\frac{1}{15}$.

PROBABILITÉS • CHAP. 10

7 La cible

Énoncé
p. 328

Lycée Chaptal, Paris

La probabilité d'atteindre n'importe quelle zone est proportionnelle à l'aire de la cible entière. Il nous faut donc avant tout déterminer cette dernière :

$$\mathcal{A}_{\text{cible}} = \pi \times 30^2 = 900\pi \text{ cm}^2.$$

- 1 L'aire de la zone centrale est :

$$\mathcal{A}_{\text{centre}} = \pi \times 10^2 = 100\pi \text{ cm}^2.$$

La probabilité d'atteindre la zone centrale est donc :

$$p_1 = \frac{100\pi}{900\pi} = \frac{1}{9}.$$

- 2 L'aire de la zone du milieu est :

$$\mathcal{A}_{\text{milieu}} = \pi \times 20^2 - \mathcal{A}_{\text{centre}} = 400\pi - 100\pi = 300\pi \text{ cm}^2.$$

La probabilité d'atteindre la zone du milieu est donc :

$$p_2 = \frac{300\pi}{900\pi} = \frac{1}{3}.$$

- 3 L'aire de la zone extérieure est :

$$\mathcal{A}_{\text{extérieure}} = \mathcal{A}_{\text{cible}} - (\mathcal{A}_{\text{milieu}} + \mathcal{A}_{\text{centre}}) = 900\pi - 400\pi = 500\pi.$$

La probabilité d'atteindre la zone extérieure est donc :

$$p_3 = \frac{500\pi}{900\pi} = \frac{5}{9}.$$

Remarques

- On vérifie que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{1}{9} + \frac{3}{9} + \frac{5}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

- Pour trouver p_3 , on aurait aussi pu faire :

$$p_3 = 1 - (p_1 + p_2).$$

8 Feu tricolore

Énoncé
p. 329

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

- 1 On note V l'événement « le feu est vert » et $\overline{V}$ son événement contraire. L'arbre représentant toutes les situations possibles est donné page ci-contre.

- 2 (a) Nous sommes en situation d'équiprobabilité donc la probabilité qu'il rencontre trois feux verts est $\frac{1}{8}$ car une seule issue sur 8 réalise cet événement.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

A tree diagram illustrating the evolution of a system over time. The root node splits into two branches: v and $\bar{v}$. Each of these branches further splits into v and $\bar{v}$, and this process repeats for three more levels, resulting in a total of 16 leaf nodes. To the right of each leaf node is a set of three variables in curly braces, representing the state of the system at that point. The states are: $\{V;V;V\}$, $\{V;V;\bar{V}\}$, $\{V;\bar{V};V\}$, $\{V;\bar{V};\bar{V}\}$, $\{\bar{V};V;V\}$, $\{\bar{V};V;\bar{V}\}$, $\{\bar{V};\bar{V};V\}$, and $\{\bar{V};\bar{V};\bar{V}\}$.

➔ Énoncé
p. 329

$$P(T \cap F) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

PROBABILITÉS • CHAP. 10

- 4 D'après la formule du cours,

$$\begin{aligned} P(T \cup F) &= P(T) + P(F) - P(T \cap F) \\ &= \frac{7}{20} + \frac{67,5}{100} - \frac{1}{5} \\ &= 0,825. \end{aligned}$$

Ainsi, la proportion d'adhérents qui jouent au tennis ou au foot est 82,5%, ou encore $\frac{33}{40}$.

- 5 Nous avons :

$$\begin{aligned} p(\overline{F} \cap \overline{T}) &= p(\overline{F}) + p(\overline{T}) - p(\overline{F} \cup \overline{T}) \\ &= [1 - p(F)] + [1 - p(T)] - p(\overline{F} \cup \overline{T}) \\ &= \left(1 - \frac{67,5}{100}\right) + \left(1 - \frac{7}{20}\right) - \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 0,175. \end{aligned}$$

Par conséquent, la proportion d'adhérents ne jouant ni au tennis, ni au foot est 17,5%, soit $\frac{7}{40}$.

- 6 Une augmentation de 13% se traduit par un coefficient multiplicateur de :

$$1 + \frac{13}{100} = 1,13.$$

Ainsi, après trois augmentations successives de 13%, le nombre d'adhérents sera :

$$120 \times 1,13^3 \approx 173.$$

10 Le jeu de Luc

Lycée Chaptal, Paris

Énoncé
p. 329

- 1 Pour construire le tableau à double entrée, il nous faut déterminer les entrées ! On lance deux dés cubiques, donc les entrées sont les faces des dés : les nombres entiers de 1 à 6. On a alors le tableau suivant :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	-4	4	-4	1	3	1
2	4	-4	1	3	1	-4
3	-4	1	3	1	-4	4
4	1	3	1	-4	4	10
5	3	1	-4	4	10	11
6	1	-4	4	10	11	13

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

MÉTHODE

Il est ici nécessaire d'être organisé dans sa façon de penser. On peut, dans un premier temps, construire la table d'addition des deux faces :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

et ensuite analyser les résultats un à un pour vérifier s'ils sont impairs, multiples de 3, supérieurs ou égaux à 10.

Par exemple, pour « 2 », il n'est ni impair, ni multiple de 3, ni supérieur ou égal à 10, donc le gain est -4 .

- 2** On compte combien d'événements correspondent au fait que le gain est supérieur ou égal à 4 € ; il y en a 12.

Ainsi, la probabilité que la somme soit supérieure ou égale à 4 € est $\frac{12}{36}$, soit $\frac{1}{3}$, car il y a en tout 36 issues (même si certaines sont identiques).

11 Jetons

Énoncé
p. 330

Lycée Charlemagne, Paris

- 1** Une issue est une suite (J_1, J_2) . Il y a donc 4 possibilités pour J_1 , et pour chaque valeur de J_1 , 4 possibilités pour J_2 , soit 16 issues possibles, l'expression « au hasard » signifiant, sauf mention contraire, que les valeurs possibles pour J_1 ou J_2 sont équiprobables, les issues (J_1, J_2) le sont également, donc la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{16}$.
- 2** (a) $A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$
et $B = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$.
- (b) L'événement A contient 6 issues favorables, donc nous avons $P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.
- L'événement B contient 3 issues favorables, donc $P(B) = \frac{3}{16}$.
- $(1,3)$ est la seule issue commune aux deux événements, donc nous avons $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$.

PROBABILITÉS • CHAP. 10

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$A \cap \bar{B}$ contient toutes les issues de A qui ne sont pas dans B , donc 5 issues favorables, d'où $P(A \cap \bar{B}) = \frac{5}{16}$.

$$(c) \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{8} \text{ (événement contraire), et nous avons}$$

$$P(A \cup B) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \text{ (8 issues favorables distinctes au total),}$$

$$P(A \cup \bar{B}) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

- 3 On peut expliciter $E = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}$ et $F = \{(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)\}$. On en déduit facilement : $P(E) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, nous avons aussi $P(E \cap F) = 0$ (la somme de deux nombres impairs est paire), et l'égalité suivante $P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{3}{4}$ (événements incompatibles).

12 Au supermarché

Énoncé
p. 330

Lycée Marie Curie, Versailles



- 1 Il s'agit d'une simple traduction de l'énoncé. On obtient $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,6$ et $P(A \cap B) = 0,3$ car $A \cap B$ est l'événement : « les deux caisses sont occupées ».
- 2 « La seconde caisse est libre » est $\bar{B}$, l'événement contraire de B . Or $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,4$.
- 3 « Au moins une des deux caisses est libre » est l'événement contraire de $A \cap B$. On calcule $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,7$.
- 4 Considérons l'événement contraire, c'est-à-dire : « au moins une caisse est occupée ». Il s'agit de $A \cup B$. On a :

$$P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)$$

donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. L'événement cherché, $\overline{A \cup B}$, a pour probabilité :

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B).$$

On en déduit que $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$, et donc $P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,5 - 0,6 + 0,3 = 0,2$.

13 Tirages dans un jeu de cartes

Énoncé
p. 331

Lycée Charlemagne, Paris

- 1 $\bar{C}$ est l'événement « tirer une autre couleur que cœur ».
- $C \cap H$ est l'événement « tirer une figure de cœur ».
- $C \cup H$ est l'événement « tirer une figure ou un cœur ».
- $C \cap \bar{H}$ est l'événement « tirer un cœur qui n'est pas une figure ».

CORRIGÉS

2 Il y a 32 cartes, donc 32 cas possibles. Il suffit de dénombrer pour chaque événement les cas favorables :

- $P(C) = \frac{1}{4}$ car un quart des cartes sont des cœurs.
- $P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (événement contraire)
- $P(H) = \frac{3}{8}$ car pour chaque couleur, on dénombre 3 figures sur 8 cartes.
- $P(\bar{H}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ (événement contraire)
- $P(C \cap H) = \frac{3}{32}$ (trois figures cœurs, donc 3 cas favorables sur 32 cartes possibles). Si vous avez répondu $\frac{3}{8}$, c'est que vous avez oublié que la carte prise au hasard n'a pas de raison d'être un cœur.
- $P(C \cup H) = \frac{8 + 3 \times 3}{32} = \frac{17}{32}$ (huit cœurs, et trois figures dans les trois autres couleurs, soit 17 cas favorables sur 32 cartes possibles).
- $P(C \cap \bar{H}) = \frac{5}{32}$ (5 cœurs ne sont pas des figures, soit 5 cas favorables sur 32 cartes possibles).

3 Il s'agit de recenser les cartes à cœur qui ne sont pas des figures, donc :
 $C \cap \bar{H} = \{7C, 8C, 9C, 10C, AC\}$ (xC désignant la carte x de cœur).

Annexe

Liste des vidéos

Chapitre	Titre	Page
Chapitre 2	Cours : $1/3$ n'est pas décimal	27
Chapitre 2	Cours : démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$	27
Chapitre 3	Exercice 15 : bien choisir son taxi	77
Chapitre 4	Exercice 19 : jouer au géomètre	138
Chapitre 5	Exercice 17 : trouver les variations	172
Chapitre 6	Exercice 18 : changement de repère	203
Chapitre 7	Exercice type : exercice type	221
Chapitre 9	Exercice type 2 : exercice type de statistiques	300
Chapitre 10	Exercice 12 : au supermarché	330

