Probabilités

$\Omega = \{e_1\,;e_2\,;\ldots\,;e_n\}$ est l'univers constitué de n éventualités, A et B sont deux événements.

- **Probabilité d'un événement**

  $p(\Omega)=1$ $\quad p(\varnothing)=0$ $\quad p(\bar{A})=1-p(A)$

  $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

  $A\cap B=\varnothing \Rightarrow A$ et B incompatibles $\Rightarrow p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

- **Loi de probabilité**

  À chaque éventualité e_i, on associe une probabilité p_i.

Éventualités	e_1	e_2	$\cdots$	e_n
Probabilités	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

  On doit avoir : $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

  S'il y a équiprobabilité : $p_i=\dfrac{1}{n}$.

- **Variable aléatoire**

  $X=\{x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n\}$ est une variable aléatoire. On note $p_i=p(X=x_i)$.

  Espérance : $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$

  Variance : $V(X)=\left(x_1-E(X)\right)^2p_1+\left(x_2-E(X)\right)^2p_2+\cdots+\left(x_n-E(X)\right)^2p_n$

  $=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$ (formule de König-Huygens)

  Écart-type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

  Écritures avec le symbole « sigma » :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i \quad ; \quad V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2p_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\right)^2$$

  Propriétés : pour $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, $E(aX+b)=aE(X)+b$

  $V(aX+b)=a^2V(X)$

  $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$.

  Jeu équitable : $E(G)=0$, où G est la variable aléatoire représentant les gains possibles du jeu.

- **Probabilités conditionnelles**

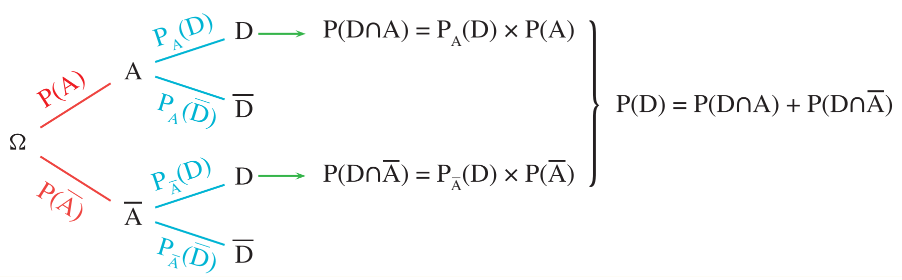
Probabilité de B sachant A : $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

A et B indépendants $\iff P_A(B)=P(B)$

$\iff P_B(A)=P(A)$

$\iff P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

- **Formule des probabilités totales**



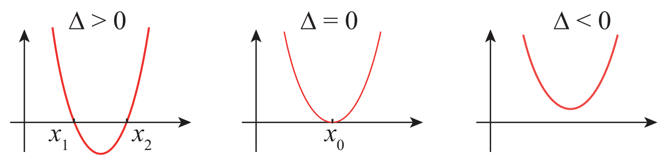
Le second degré

$f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$.

Discriminant : $\Delta=b^2-4ac$.

Forme canonique : $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}$.

- **Types de paraboles (pour $a>0$)**



- **Solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$**

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0=-\dfrac{b}{2a}$	Pas de solution

- **Factorisation de (ax^2+bx+c)**

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	Ne se factorise pas

- **Signe de $f(x)$**

$\Delta>0$:

$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

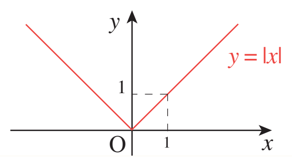
$\Delta=0$:

$-\infty$		x_0		$+\infty$
	signe de a	0	signe de a	

$\Delta<0$:

$-\infty$		$+\infty$
	signe de a	

La fonction valeur absolue

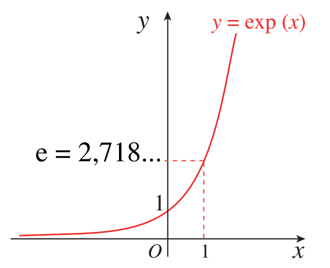


$|x|=x$ si $x>0$

$|x|=-x$ si $x<0$

$x\mapsto|x|$ n'est pas dérivable en 0.

La fonction exponentielle



$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x \quad ; \quad (\mathrm{e}^{kx})'=k\mathrm{e}^{kx}$

$x\mapsto \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\mathrm{e}^0=1\,;\mathrm{e}^1=\mathrm{e}\ (\approx 2,718)\,;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$

Pour $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$:	
$\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^y$	$\mathrm{e}^{nx}=\left(\mathrm{e}^x\right)^n$
$\mathrm{e}^{x-y}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$	$\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

$x>y \iff \mathrm{e}^x>\mathrm{e}^y\,;\ x=y\iff \mathrm{e}^x=\mathrm{e}^y$

Dérivation

Nombre dérivé

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

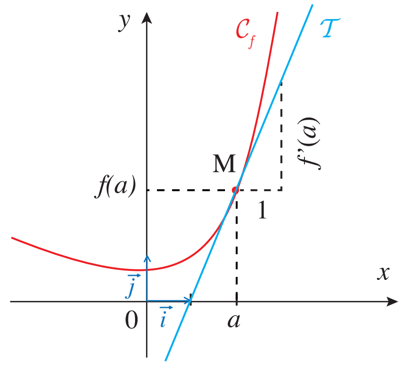
f est dérivable en $a \iff \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $\lambda \in \mathbb{R}$ quand h tend vers 0.

$\lambda = f'(a)$ est le *nombre dérivé* de f en a.

Équation de la tangente

$f'(a)$ est le *coefficient directeur* de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point $\mathrm{M}(a\,;\,f(a))$.

$\boxed{\text{Équation de } \mathcal{T} : y = f'(a)(x-a) + f(a)}$



Dérivées usuelles

$f(x)$	k réel	x	x^2	x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	$2x$	nx^{n-1}	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Domaine de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$]0\,;+\infty[$

Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle, et $k \in \mathbb{R}$.

Fonction	ku	$u+v$	uv	$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{u}{v}$	$f(ax+b)$
Fonction dérivée	ku'	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$a \times f'(ax+b)$

Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Pour tout $x \in I$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$
Sens de variation de f	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I	f est constante sur I

Extremum local

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, et f une fonction dérivable sur $]a\,;b[$.

f admet un *extremum local* en $x_0 \in\,]a\,;b[\iff \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'(x) \text{ change de signe en } x_0 \end{cases}$

Suites

Définition

Une suite est une fonction dont la variable est entière.
Notations possibles d'une suite : $\big(u(n)\big)$ ou (u_n).

Modes de génération

Mode	Notation	Exemple
Explicite	$u_n = f(n)$	$u_n = n^2$, avec $f(x) = x^2$
Relation de récurrence	$u_{n+1} = f(u_n)$	$u_{n+1} = u_n^2$, avec $f(x) = x^2$

Sens de variation d'une suite

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite est croissante.
$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite est décroissante.

Si la suite est définie de façon explicite sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, où f est une fonction monotone sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) a le même sens de variation que f.

Suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

$$u_n = u_p + (n-p)r,\ \forall p \in \mathbb{N}$$

$r > 0$	$r < 0$	$r = 0$
la suite est croissante	la suite est décroissante	la suite est constante

Somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somme des $n+1$ premiers termes :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

Pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = qu_n$

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

$$u_n = u_p \times q^{n-p},\ \forall p \in \mathbb{N}$$

Sens de variation lorsque $u_0 > 0$:

$q > 1$	$0 < q < 1$	$q = 1$
la suite est croissante	la suite est décroissante	la suite est constante

Somme des puissances positives d'un réel $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Somme des $n+1$ premiers termes ($q \neq 1$) :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Capital C_n placé à taux fixe t %

(C_n) est une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$ et :

$$C_n = C_0 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n.$$

Trigonométrie

$\mathcal{P}$ est un plan muni du repère orthonormé direct $\big(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\big)$.

Cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit M un point du cercle trigonométrique tel que $\big(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}\big) = x$.

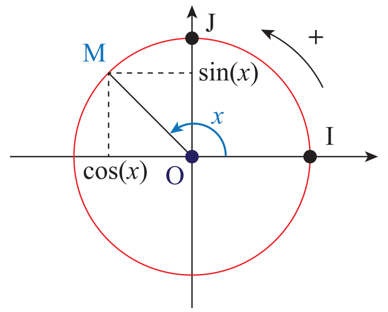
$\cos x$: abscisse de M ;

$\sin x$: ordonnée de M.

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$



1 radian : angle tel que $\widehat{\mathrm{IM}} = \mathrm{OI}$.

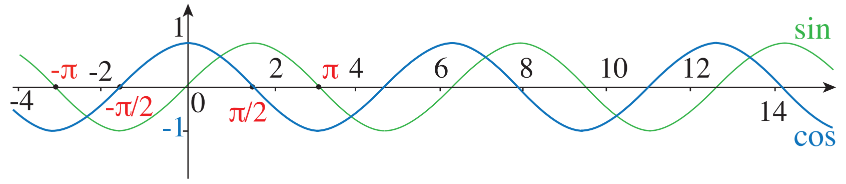
Valeurs remarquables :

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Propriétés de symétrie :

α	$-x$	$x+\pi$	$\pi - x$
$\cos\alpha$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\sin\alpha$	$-\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$

Fonctions trigonométriques



Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont 2π-périodiques :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos x \\ \sin(x + 2\pi) = \sin x \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire :

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire :

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

Dérivées : $\big(\sin x\big)' = \cos x$

$\big(\cos x\big)' = -\sin x.$

Produit scalaire

O, A et B sont trois points distincts du plan muni d'un repère orthonormé.
$\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, avec $\vec{u}(x\,;\,y)$; $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, avec $\vec{v}(x'\,;\,y')$.

Différentes expressions du produit scalaire

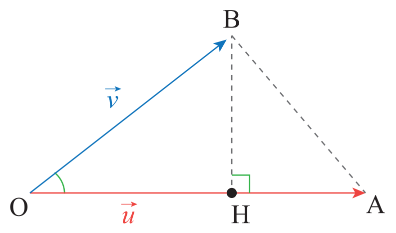
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\| \times \|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\| \times \cos\big(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\big)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\big(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\big)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{4}\big(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\big)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{4}\big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\big)$



Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} \mathrm{OA} \times \mathrm{OH} & \text{si } \overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{OH}} \text{ ont le même sens} \\ -\mathrm{OA} \times \mathrm{OH} & \text{si } \overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{OH}} \text{ ont des sens opposés} \end{cases}$

Propriétés

$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

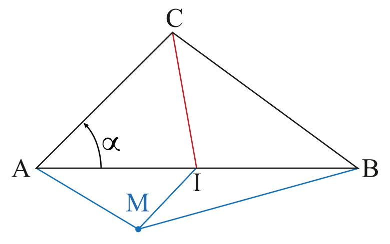
Équation du cercle de centre $\Omega(a\,;\,b)$ et de rayon R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Théorème de la médiane :

$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$

Théorème d'Al-Kashi :

$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC\cos\alpha}$



Pour tout point M du plan,

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

$MA^2 + MB^2 + MC^2$ minimal pour $M = G$ (centre de gravité de ABC).

Vecteur normal, vecteur directeur

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \text{colinéaires} \iff xy' - x'y = 0 \\ \text{orthogonaux} \iff xx' + yy' = 0 \end{cases}$

$\vec{u} \neq \vec{0}$ vecteur directeur de (AB) $\iff$ $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\vec{u} \neq \vec{0}$ vecteur normal à (AB) $\iff$ $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$

Soient a et b deux nombres réels non simultanément nuls et $\mathcal{D}$ une droite.

$\mathcal{D}$ a pour équation $ax + by + c = 0 \iff \begin{cases} \vec{u}\binom{-b}{a} \text{ est un vecteur directeur de } \mathcal{D} \\ \vec{n}\binom{a}{b} \text{ est un vecteur normal à } \mathcal{D} \end{cases}$