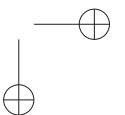
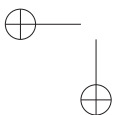
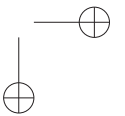
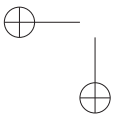
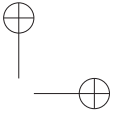
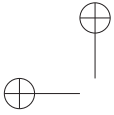


IL1MTC





Chapitre

4

Croissance exponentielle

Plan du chapitre

1. Introduction
2. Suites géométriques
3. Fonctions exponentielles
4. Racine n -ième
5. Taux d'évolution moyen

1 Introduction

Lorsque les modèles mathématiques génèrent des valeurs augmentant ou diminuant de façon proportionnelle à la valeur précédente, on parle de croissance exponentielle.

2 Suites géométriques

Exercice type

Lycée Genevoix, Montrouge

- 1 On considère la suite géométrique u de raison 4 et de terme initial $u_0 = 1$.
 - (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n .
 - (b) Calculer u_1 puis u_2 .
- 2 On considère la suite v définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2 \times 3^n$. La suite v est-elle géométrique ?
- 3 On considère la suite w de terme initial $w_0 = 3$ et définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_{n+1} = 5w_n$.
 - (a) Calculer w_1 et w_2 .
 - (b) Donner la nature de la suite w et préciser la raison.
 - (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de w_n en fonction de n .
 - (d) Calculer w_4 .

Voir corrigé page ??

Définition 1 : suite géométrique

Une suite u est *géométrique* lorsqu'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = q \times u_n$.
 q est appelé la *raison* de la suite.

Exemple : la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2,5u_n$$

est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 2,5.

Remarque : une suite est donc géométrique si tout terme se déduit du terme précédent en le multipliant par un même nombre réel q .

Théorème 1 : formule explicite

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Exemple : soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 2$ alors, pour tout entier n , $u_n = 5 \times 2^n$.

Propriété 1

- Comme pour les suites arithmétiques, les suites géométriques peuvent être définies à partir du rang 1, 2, ...
- Si u est une suite géométrique de raison q , alors pour tous entiers naturels n et p , on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Propriété 2 : représentation graphique et sens de variation

(u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme *positif*.

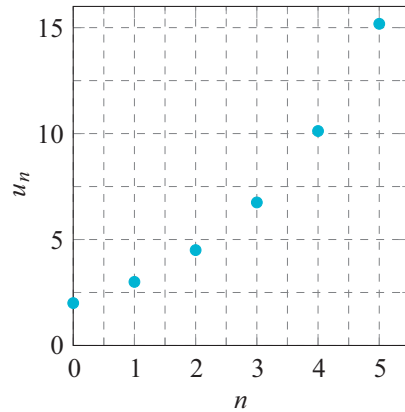
- Dans un repère orthogonal, une suite géométrique u se représente par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$ qui suivent une évolution exponentielle.
- Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est décroissante.
- Si $q > 1$ alors (u_n) est croissante.
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.

Remarque : les suites géométriques correspondent à des croissances dites « exponentielles ». Elles croissent de plus en plus vite si $q > 1$, et elles décroissent de plus en plus lentement si $0 < q < 1$.

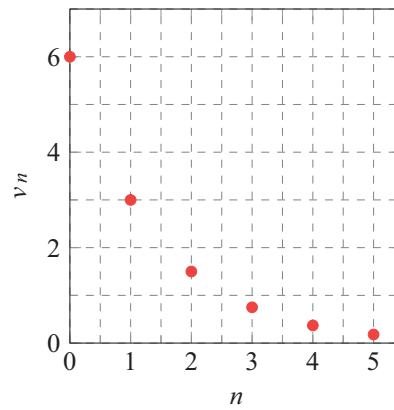
CROISSANCE EXPONENTIELLE • CHAP. 4

Exemples :

$$u_n = 2 \times 1,5^n$$



$$v_n = 6 \times 0,5^n$$



➡ Solution de l'exercice type

Lycée Genevoix, Montrouge

1 (a) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 4u_n.$$

- (b) • $u_1 = 4 \times u_0 = 4 \times 1 = 4$,
• $u_2 = 4 \times u_1 = 4 \times 4 = 16$.

2 v est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 3.

3 (a) • $w_1 = 5w_0 = 5 \times 3 = 15$,
• $w_2 = 5 \times w_1 = 5 \times 15 = 75$.

(b) w est une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $w_0 = 3$ puisqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant par 5.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = w_0 \times 5^n = 3 \times 5^n.$$

(d) $w_4 = 3 \times 5^4 = 1875$.

Voir énoncé page ??

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

3 Fonctions exponentielles

Exercice type

Lycée Genevoix, Montrouge

1 Simplifier les expressions suivantes :

$$(a) \quad A = \frac{1,1^3 \times 1,1^{7,1}}{2,2} \quad (b) \quad B = \frac{(2,3^5)^{0,1}}{2,3^4}$$

$$(c) \quad C = (3^x + 4)(3^x - 4)$$

2 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2^x$.

- (a) Indiquer le sens de variations de la fonction f .
(b) Compléter le tableau en arrondissant à 10^{-3} :

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$					

Voir corrigé page ??

Définition 2 : fonction exponentielle de base a

Soit $a > 0$. La fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base a* .

Exemple : la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1,5^x$ est la fonction exponentielle de base 1,5.

$$f(0) = 1,5^0 = 1 \quad \text{et} \quad f(1) = 1,5^1 = 1,5.$$

Pour calculer les valeurs de a^x , on utilise la touche **a^x** .

Remarques

- Lorsque x est un nombre entier, a^x correspond à une puissance de a .
- Cette fonction est le prolongement à tout réel x de la suite géométrique (u_n) où, pour tout entier naturel n , $u_n = a^n$.

Propriété 3 : propriétés algébriques

a et b désignent des nombres réels strictement positifs, x et y des nombres réels positifs.

- $a^0 = 1$
- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x \times b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

CROISSANCE EXPONENTIELLE • CHAP. 4

Exemples

$$\bullet 3^{1,3} \times 3^5 = 3^{6,3}; \quad \bullet \frac{3^{1,5}}{3^{0,8}} = 3^{0,7}; \quad \bullet (3^{3,2})^{1,5} = 3^{4,8}.$$

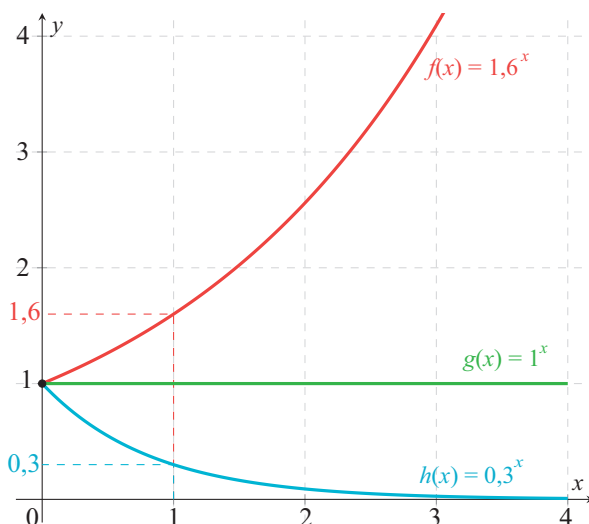
Propriété 4 : représentation graphique et sens de variation

Soit a un réel strictement positif.

Sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction exponentielle de base a est :

- croissante lorsque $a > 1$.
- constante lorsque $a = 1$.
- décroissante lorsque $0 < a < 1$.

Exemple : soient $f(x) = 1,6^x$, $g(x) = 1^x$ et $h(x) = 0,3^x$.



Remarque : les fonctions exponentielles permettent de modéliser des situations continues (variable réelle) à croissance (ou décroissance) exponentielle.

➔ Solution de l'exercice type

Lycée Genevoix, Montrouge

$$\begin{aligned} \text{1 (a)} \quad A &= \frac{1,1^3 \times 1,1^{7,1}}{2,2} \\ &= \frac{1,1^{3+7,1}}{2 \times 1,1} \\ &= \frac{1,1^{10,1-1}}{2} \\ &= \frac{1,1^{9,1}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad B &= \frac{(2,3^5)^{0,1}}{2,3^4} \\ &= (2,3)^{5 \times 0,1} \times 2,3^{-4} \\ &= (2,3)^{0,5-4} \\ &= (2,3)^{-3,5}. \end{aligned}$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

➔ Solution de l'exercice type (suite)

Lycée Genevoix, Montrouge

(c) $C = (3^x + 4)(3^x - 4)$

(on reconnaît l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$)
 $= (3^x)^2 - 4^2$
 $= 3^{2x} - 16.$

- 2 (a) $f(x)$ est de la forme a^x avec $a = 2$ ($a > 1$) donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b)

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	1	1,414	2	2,828	4

Voir énoncé page ??

4 Racine n-ième

Définition 3 : racine n-ième

Soit a un réel strictement positif.

L'équation $x^n = a$ d'inconnue x admet une *unique solution réelle positive* :

$$x = a^{\frac{1}{n}}.$$

$a^{\frac{1}{n}}$ s'appelle la *racine n-ième* de a , notée aussi $\sqrt[n]{a}$.

Exemple : la solution réelle positive de l'équation $x^3 = 7$ est $x = 7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}$.

Remarque : en particulier, la solution réelle positive de l'équation $x^2 = a$ est :

$$x = a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5} = \sqrt{a}.$$

5 Taux d'évolution moyen

Exercice type

Lycée Louis Vincent, Metz

En France, la proportion de déchets recyclés, exprimée en pourcentage des déchets d'emballages ménagers, est passée de 50% en 2004 à 71% en 2024.

- 1 Calculer, en pourcentage, le taux d'évolution de la proportion de déchets recyclés entre 2004 et 2024.
- 2 Calculer, en pourcentage, le taux d'évolution annuel moyen de la proportion de déchets recyclés entre 2004 et 2024. Arrondir au centième.

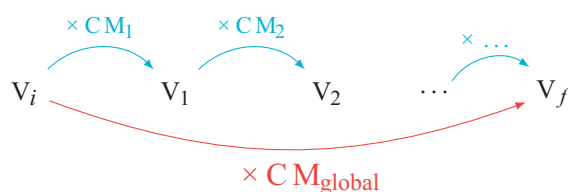
Voir corrigé page ??

CROISSANCE EXPONENTIELLE • CHAP. 4

5.1 Évolutions successives

Propriété 5

Une valeur initiale V_i subit plusieurs évolutions successives : $t_1\%$ (de coefficient multiplicateur CM_1), suivie de $t_2\%$, suivie de...



Le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs intermédiaires :

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \dots$$

Le taux d'évolution global est donc égal à :

$$t_{\text{global}} = CM_{\text{global}} - 1.$$

Exemple : le nombre d'abonnés d'un quotidien augmente de 10 % puis augmente de 20 %. Le taux d'évolution globale est de 32%.

En effet, augmenter de 10 % (resp. 20 %) revient à multiplier par 1,1 (resp. 1,2) :

$$CM_{\text{global}} = 1,1 \times 1,2 = 1,32.$$

Le taux d'évolution global est :

$$t_{\text{global}} = CM_{\text{global}} - 1 = 1,32 - 1 = 0,32.$$

Donc le nombre d'abonnés a augmenté de 32%.

5.2 Taux d'évolution moyen

Propriété 6

On suppose qu'au cours de n périodes, le taux d'évolution global d'une quantité est t_{global} .

Alors, le taux d'évolution moyen par période est :

$$t_{\text{moyen}} = (1 + t_{\text{global}})^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Remarque :

$$t_{\text{moyen}} = (CM_{\text{global}})^{\frac{1}{n}} - 1.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Exemple : un prix augmente de 69% en deux mois.
On cherche le taux d'évolution mensuel moyen.

Le taux d'évolution global est :

$$t_{\text{global}} = 0,69.$$

Il y a deux périodes considérées.

Le taux mensuel moyen est donc :

$$(1 + t_{\text{global}})^{\frac{1}{2}} - 1 = (1 + 0,69)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,3,$$

ce qui correspond à une hausse mensuelle de 30%.

➡ Solution de l'exercice type

Lycée Louis Vincent, Metz

MÉTHODE

Soit une quantité qui passe d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f .

- Le *coefficient multiplicateur global* est égal à :

$$CM_{\text{global}} = \frac{V_f}{V_i}.$$

- Le *taux d'évolution global* vérifie l'égalité :

$$1 + t_{\text{global}} = CM_{\text{global}}.$$

- Le *taux d'évolution moyen* est le taux qui appliqué n fois, donnerait la même évolution globale. Il vérifie l'égalité :

$$(1 + t_{\text{moyen}})^n = CM_{\text{global}}.$$

- 1 On calcule le coefficient multiplicateur global :

$$CM_{\text{global}} = \frac{0,71}{0,5} = 1,42.$$

- 2 Le taux d'évolution annuel moyen t_{moyen} de la proportion de déchets recyclés entre 2004 et 2024 vérifie :

$$\begin{aligned} (1 + t_{\text{moyen}})^{10} &= 1,42 \Rightarrow 1 + t_{\text{moyen}} = 1,42^{\frac{1}{10}} \\ &\Rightarrow t_{\text{moyen}} = 1,42^{\frac{1}{10}} - 1 \\ &\Rightarrow t \approx 0,0357. \end{aligned}$$

Le taux d'évolution annuel moyen est donc d'environ 3,57%.

Voir énoncé page ??

CROISSANCE EXPONENTIELLE • CHAP. 4

1 V/F Vérifiez vos connaissances

10 min Corrigé p. ??

Les affirmations suivantes sont-elles *vraies* ou *fausses*? Justifiez vos réponses.

- 1 On considère la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$. Le terme de rang 3 vaut 8.
- 2 La suite géométrique (v_n) telle que $v_6 = 50$ et $v_7 = 60$ a pour raison $\frac{5}{6}$.
- 3 L'expression de la fonction exponentielle f de base 4,5 est $f(x) = x^{4,5}$.
- 4 Le carré du nombre $a = 2^{1,5}$ est égal à 8.

2 QCM Suites géométriques

10 min Corrigé p. ??

Pour chaque question, trouver la ou les bonnes réponses.

- 1 Le troisième terme de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 5$ est :
☐ a $u_3 = 2 \times 5^3$ ☐ b $u_2 = 2 \times 5^2$ ☐ c 50
- 2 La suite géométrique telle que $u_0 = 5$, $u_1 = 30$ et $u_2 = 180$ a pour raison :
☐ a 25 ☐ b 6 ☐ c 7
- 3 Si (u_n) est une suite géométrique de raison 2 telle que $u_2 = 1$, alors $u_7 =$
☐ a 8 ☐ b 16 ☐ c 32
- 4 Si (u_n) est une suite géométrique de raison 6 et de premier terme $u_0 = 5$ alors $u_n =$
☐ a $5 + 6n$ ☐ b 6×5^n ☐ c 5×6^n

3 QCM Fonction exponentielle

10 min Corrigé p. ??

Pour chaque question, trouver la ou les bonnes réponses.

- 1 $a^{3,2} \times a^{2,5} =$
☐ a $a^{0,7}$ ☐ b $a^{5,7}$ ☐ c a^8
- 2 $\frac{(a^{4,9})^2 \times a^{5,2}}{a^{15}} =$
☐ a 1 ☐ b $a^{14,21}$ ☐ c $a^{109,852}$
- 3 $f(x) = 2,3^x$, $(f(2))^3 =$
☐ a $4,6^3$ ☐ b $2,3^5$ ☐ c $2,3^6$
- 4 $g(x) = 4,1^x$, $g(3) \times g(2,5) =$
☐ a $4,1^{5,5}$ ☐ b $5,5^{5,1}$ ☐ c $\approx 2345,9$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Suites géométriques

4 Sens de variation



10 min

Corrigé
p. ??

Lycée Corot, Morestel

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 960$ et de raison $\frac{1}{2}$.

- 1 Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4 .
- 2 Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n en fonction de n .
- 3 Étudier le sens de variation de (v_n) .

5 Modéliser



15 min

Corrigé
p. ??

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

Un influenceur vérifie régulièrement son nombre d'abonnés sur les réseaux sociaux. Il estime que sur TikTok, son nombre d'abonnés augmente en moyenne de 7% par mois. Il débute l'année 2025 avec 10 000 abonnés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre estimé d'abonnés de cet influenceur au n -ième mois.

- 1 Donner a_0 , puis calculer a_1 et a_2 .
- 2 Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} en fonction de a_n .
- 3 En déduire la nature de la suite a . Préciser sa raison.
- 4 Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de a_n en fonction de n .
- 5 Cet influenceur s'est fixé comme objectif d'atteindre les 25 000 abonnés d'ici à la fin de l'année 2025. Devrait-il atteindre son objectif?

6 Modéliser



20 min

Corrigé
p. ??

Lycée Gand, Amiens

En 2020, Baptiste a acheté une voiture. Son prix était alors de 10 500 €.

La valeur de cette voiture baisse de 14% par an. La valeur de cette voiture peut être modélisée par une suite. On note P_n la valeur de la voiture l'année $2020 + n$. On a donc $P_0 = 10 500$.

- 1 (a) Déterminer la nature de la suite (P_n) .
(b) Quelle était la valeur de cette voiture en 2024 ?
- 2 Baptiste aimerait savoir à partir de quelle année la valeur de sa voiture sera inférieure à 1 500 €. Pour le savoir, il réalise un programme Python.

CROISSANCE EXPONENTIELLE • CHAP. 4

- (a) Compléter le programme suivant pour qu'il réponde à la question posée.

```
def algo():
    P=10500
    n=2020
    while P..... :
        P=.....
        n=n+1
    return(n)
```

- (b) Quelle valeur renvoie ce programme ?

7 Comparaison de suites



30 min

Corrigé
p. ??

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

Camille a deux propositions pour son salaire lors de son arrivée dans une entreprise le 01/01/2025 :

- *Proposition 1* : elle commence avec un salaire de 2 000 € mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 115 €.
- *Proposition 2* : elle commence avec un salaire de 2 000 € mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 5%.

- On note u_n son salaire du mois de janvier de l'année 2025 + n avec la proposition 1.
 - Déterminer u_0 puis calculer u_1 .
 - Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
 - Exprimer u_n en fonction de n .
 - Déterminer à partir de quelle année son salaire mensuel sera supérieur à 2 800 € avec la proposition 1.
- On note v_n son salaire du mois de janvier de l'année 2025 + n avec la proposition 2.
 - Déterminer v_0 puis calculer v_1 .
 - Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
 - Exprimer v_n en fonction de n .
 - Déterminer à partir de quelle année son salaire mensuel sera supérieur à 2 800 € avec la proposition 2.
- Déterminer la proposition permettant d'avoir un salaire mensuel le plus élevé en 2035.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

Fonctions exponentielles

8 Sens de variations



10 min

Corrigé
p. ??

Lycée Vincent d'Indy, Privas

- 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 0,33^x$.
 - (a) Quel est le sens de variation de f ?
 - (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $0,33^x \leq 0,33^{1,8}$.
- 2 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = 4^x$.
 - (a) Quel est le sens de variation de g ?
 - (b) Calculer $g(3,5)$.
 - (c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4^x \geq 128$.

Racine n-ième

9 Résolution d'équations



10 min

Corrigé
p. ??

Lycée Jean Puy, Roanne

Résoudre sur $[0; +\infty[$ les équations suivantes :

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1 $x^2 = 0,5184$ | 3 $x^4 = 6,859$ |
| 2 $x^4 = 0,0081$ | 4 $x^5 = 7,59375$ |

Taux d'évolution moyen

10 Évolutions successives



10 min

Corrigé
p. ??

Lycée Ruffié, Limoux

La population d'une ville augmente de 1% entre 2023 et 2024, puis de 2% entre 2024 et 2025.

- 1 Déterminer le coefficient multiplicateur associé à chacune de ces évolutions.
- 2 Déterminer le coefficient multiplicateur global.
- 3 En déduire le taux d'évolution global entre 2023 et 2025.
- 4 La ville comptait 20 000 habitants en 2023.
Déterminer le nombre d'habitants en 2025.

CROISSANCE EXPONENTIELLE • CHAP. 4

11 Taux d'évolution moyen



10 min

Corrigé
p. ??

Lycée Montaigne, Bordeaux

La subvention accordée par une entreprise à son club sportif était de 3 000 € pour l'année 2021. Depuis 2018, l'évolution de la subvention en pourcentage d'une année à l'autre est celle décrite dans le tableau ci-dessous :

Année	2019	2020	2021	2022	2023
Évolution en pourcentage	+17%	+15%	+10%	+9%	+6%

Par exemple, le taux d'évolution de la subvention de 2020 à 2021 est de -10% .

- 1 Calculer, pour chacune des années, le montant de la subvention attribuée (à l'euro près).
- 2 Le responsable sportif se plaint d'une diminution continue des subventions depuis l'année 2019. Qu'en pensez-vous ?
- 3 Calculer le pourcentage de diminution ou d'augmentation de la subvention de 2018 à 2023.
- 4 Calculer le taux moyen annuel de 2018 à 2023.
- 5 Si, à partir de 2023 le taux reste à $+6\%$, quel sera le montant de la subvention en 2032 ?

Vers les maths complémentaires

12 Pour aller plus loin



30 min

Corrigé
p. ??

Lycée Boucher, Paris

En 2020, une grande entreprise s'est dotée d'un centre de visioconférences qui permet de réaliser de grandes économies dans le budget « déplacement des cadres ».

Lors d'un conseil d'administration de fin d'année, le responsable du centre de visioconférences fait le compte rendu suivant : on a observé un fort accroissement de l'utilisation de cette technologie, le nombre de visioconférences, qui était de 30 en 2020, a augmenté de 20% tous les ans.

- 1 On s'intéresse au nombre d'utilisations de la visioconférence lors de l'année $2020 + n$. On modélise la situation par une suite géométrique (u_n) où le terme u_n est une estimation de ce nombre d'utilisations lors de l'année $2020 + n$.
 - (a) Donner la raison q et le premier terme u_0 de cette suite.
 - (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n .
 - (c) Vérifier qu'en 2025, on a atteint 74 utilisations de la visioconférence.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- 2 On considère la fonction écrite en langage Python :

```
def seuil(A):
    u=30
    n=0
    while u<A:
        u=u+u*0.2
        n=n+1
    return(n)
```

- (a) On entre dans la console `seuil(100)`.

Recopier et compléter avec autant de colonnes que nécessaire le tableau suivant.

Les valeurs de U seront données approchées par défaut à l'entier près.

Test $U < A$		vrai	...
Valeur de U	30	36	...
Valeur de n	0	1	...

- (b) Quelle est la valeur affichée en sortie de ce programme ?

- (c) Interpréter cette valeur affichée dans le contexte de ce problème.

- 3 Le coût de l'installation des appareils de visioconférences sera amorti quand le nombre total d'utilisations aura dépassé 400.

À partir de quelle année cette installation sera-t-elle amortie ? Justifier la réponse.

CROISSANCE EXPONENTIELLE • CHAP. 4

1 V/F Vérifiez vos connaissances

Énoncé
p. ??

- 1 Vrai. Le terme de rang 3 de la suite est :

$$u_3 = u_0 \times 2^3 = 1 \times 2^3 = 8.$$

- 2 Faux. La raison de la suite est le nombre q tel que $v_7 = q \times v_6$ soit :

$$q = \frac{v_7}{v_6} = \frac{60}{50} = \frac{6}{5}.$$

- 3 Faux. L'expression de la fonction exponentielle f de base 4,5 est :

$$f(x) = 4,5^x.$$

- 4 Vrai. $a^2 = (2^{1,5})^2 = 2^{1,5 \times 2} = 2^3 = 8.$

2 QCM Suites géométriques

Énoncé
p. ??

- 1 Réponses **[b]** et **[c]**. Le troisième terme de la suite de premier terme u_0 est u_2 .

$$u_2 = u_0 \times q^2 = 2 \times 5^2 = 50.$$

- 2 Réponse **[b]**. $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{30}{5} = 6.$

- 3 Réponse **[c]**. $u_7 = u_2 \times q^{7-2} = 1 \times 2^5 = 32.$

- 4 Réponse **[c]**. $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 6^n.$

3 QCM Fonction exponentielle

Énoncé
p. ??

- 1 Réponses **[b]**. $a^{3,2} \times a^{2,5} = a^{3,2+2,5} = a^{5,7}.$

- 2 Réponse **[a]**. On a :

$$\frac{(a^{4,9})^2 \times a^{5,2}}{a^{15}} = \frac{a^{4,9 \times 2 + 5,2}}{a^{15}} = \frac{a^{15}}{a^{15}} = a^{15-15} = a^0 = 1.$$

- 3 Réponse **[c]**. $(f(2))^3 = (2,3^2)^3 = 2,3^{2 \times 3} = 2,3^6.$

- 4 Réponse **[a]** et **[c]**. On a :

$$g(3) \times g(2,5) = 4,1^3 \times 4,1^{2,5} = 4,1^{3+2,5} = 4,1^{5,5} \approx 2\,345,9.$$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

4 Sens de variation

Énoncé
p. ??

Lycée Corot, Morestel

À RETENIR

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme strictement positif.

- Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.
- Si $q > 1$ alors (u_n) est strictement croissante.

1 • $v_1 = v_0 \times \frac{1}{2} = 960 \times \frac{1}{2} = 480.$

• $v_2 = 480 \times \frac{1}{2} = 240.$

• $v_3 = 240 \times \frac{1}{2} = 120.$

• $v_4 = 120 \times \frac{1}{2} = 60.$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n.$

3 Puisque v est une suite géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N},$

$$v_n = v_0 \times q^n = 960 \times \frac{1}{2}^n.$$

4 v_0 est positif et $0 < q < 1$ donc (v_n) est strictement décroissante.

5 Modéliser

Énoncé
p. ??

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

À RETENIR

- Une suite (u_n) est géométrique de raison q si, pour tout $n \in \mathbb{N},$

$$u_{n+1} = qu_n.$$

- Si (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors, pour tout entier naturel $n, u_n = u_0 \times q^n.$

- Si (u_n) est géométrique de raison q alors pour tous entiers naturels n et $p,$ on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

1 L'influenceur débute l'année avec 10 000 abonnés donc $a_0 = 10\,000.$ Chaque mois, son nombre d'abonnés augmente de 7%, c'est-à-dire qu'il est multiplié par 1,07.

CROISSANCE EXPONENTIELLE • CHAP. 4

Donc,

$$a_1 = 10\,000 \times 1,07 = 10\,700$$

et

$$a_2 = 10\,700 \times 1,07 = 11\,449.$$

- 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1,07 \times a_n$.
- 3 a est donc une suite géométrique de raison $q = 1,07$ et de premier terme $a_0 = 10\,000$.
- 4 Puisque a est une suite géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = a_0 \times q^n = 10\,000 \times 1,07^n.$$

- 5 D'ici la fin de l'année, 12 mois se seront écoulés.

$$a_{12} = 10\,000 \times 1,07^{12} \approx 22\,522.$$

Il n'atteindra donc pas son objectif.

6 Modéliser

Énoncé
p. ??

Lycée Gand, Amiens

- 1 (a) Chaque année, la valeur de la voiture baisse de 14 %. Elle est donc multipliée par :

$$1 - \frac{14}{100} = 0,86.$$

(P_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,86$ et de premier terme $P_0 = 10\,500$.

- (b) La valeur de la voiture en 2024 = 2020 + 4 est donnée par P_4 . Or,

$$P_n = P_0 \times q^n = 10\,500 \times 0,86^n$$

donc

$$P_4 = 10\,500 \times 0,86^4 \approx 5\,744 \text{ €}.$$

- 2 Le programme complété est le suivant :

```
def algo():  
    P=10500  
    n=2020  
    while P>=1500 :  
        P=0.86*P  
        n=n+1  
    return(n)
```

- 3 La valeur renvoyée par le programme est 2033.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

7 Comparaison de suites

Énoncé
p. ??

Lycée Renoir, Cagnes-sur-Mer

- 1 (a) u_0 est le salaire mensuel pendant l'année 2025 donc :

$$u_0 = 2\,000 \text{ €}.$$

u_1 est le salaire mensuel pendant l'année 2026 donc :

$$u_1 = u_0 + 115 = 2\,115 \text{ €}.$$

- (b) Chaque année, on ajoute 115 euros au salaire mensuel donc :

$$u_{n+1} = u_n + 115.$$

(u_n) est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2\,000$ et raison $r = 115$ (de la forme $u_{n+1} = u_n + r$).

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + n \times r = 2\,000 + 115n.$$

- (d) On cherche n tel que $u_n > 2\,800$.

$$u_n > 2\,800 \iff 2\,000 + 115n > 2\,800$$

$$\iff 115n > 800$$

$$\iff n > \frac{800}{115}.$$

n est un entier donc $n \geq 7$.

Le salaire mensuel sera supérieur à 2800 euros à partir de l'année $2025 + 7 = 2032$.

- 2 (a) v_0 est le salaire mensuel pendant l'année 2025 donc :

$$v_0 = 2\,000 \text{ €}.$$

v_1 est le salaire mensuel pendant l'année 2026 donc :

$$v_1 = v_0 \times 1,05 = 2\,100 \text{ €}.$$

En effet, augmenter de 5% revient à multiplier par 1,05.

- (b) $v_{n+1} = 1,05v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $v_0 = 2\,000$ (de la forme $v_{n+1} = qv_n$).

- (c) $v_n = v_0 \times q^n = 2\,000 \times 1,05^n$.

- (d) On cherche n tel que $v_n > 2800$.

$$v_n > 2\,800 \iff 2\,000 \times 1,05^n > 2\,800$$

$$\iff 1,05^n > \frac{2\,800}{2\,000}$$

$$\iff 1,05^n > \frac{7}{5}$$

$$\iff 1,05^n > 1,4.$$

On utilise le menu table de la calculatrice en saisissant la fonction définie par $f(x) = 1,05^x$.

CROISSANCE EXPONENTIELLE • CHAP. 4

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

On obtient :

$$1,05^6 \approx 1,34 \text{ et } 1,05^7 \approx 1,407.$$

Le salaire mensuel sera donc supérieur à 2 800 € à partir de l'année $2025 + 7 = 2032$.

On peut aussi saisir la suite (v_n) dans le menu « Suites » de la calculatrice, soit avec sa forme explicite $v_n = 2\,000 \times 1,05^n$, soit avec sa forme de récurrence $v_{n+1} = 1,05v_n$ et $v_0 = 2\,000$.

- 3** On cherche quelle proposition permettra le salaire mensuel le plus élevé en 2035. $2035 = 2025 + 10$. Il faut donc calculer u_{10} et v_{10} .

- $u_{10} = 2\,000 + 115 \times 10 = 3\,150$ euros mensuels en 2035 avec la proposition 1.
- $v_{10} = 2\,000 \times 1,05^{10} \approx 3\,258$ euros mensuels environ avec la proposition 2.

La proposition 2 est celle qui permet donc d'avoir un salaire mensuel plus élevé.

8 Sens de variations

Énoncé
p. ??

Lycée Vincent d'Indy, Privas

- 1** (a) $0 < 0,33 < 1$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

- (b) Comme la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$0,33^x \leq 0,33^{1,8} \iff x \geq 1,8$$

donc l'ensemble solution à l'inéquation est :

$$S = [1,8; +\infty[.$$

- 2** (a) $4 > 1$ donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- (b) $g(3,5) = 4^{3,5} = 128$.

- (c) Comme la fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$4^x \geq 128 \iff 4^x \geq 4^{3,5}$$

$$\iff x \geq 3,5.$$

Donc l'ensemble solution à l'inéquation est :

$$S = [3,5; +\infty[.$$

9 Résolution d'équations

Énoncé
p. ??

Lycée Jean Puy, Roanne

À RETENIR

Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel non nul. L'équation $x^n = a$, d'inconnue x , a une unique solution positive : $x = a^{\frac{1}{n}}$

$$1 \quad x^2 = 0,5184 \iff x = 0,5184^{\frac{1}{2}} = 0,72.$$

$$2 \quad x^4 = 0,0081 \iff x = 0,0081^{\frac{1}{4}} = 0,3.$$

$$3 \quad x^4 = 6,859 \iff x = 6,859^{\frac{1}{4}} \approx 1,618.$$

$$4 \quad x^5 = 7,59375 \iff x = 7,59375^{\frac{1}{5}} = 1,5.$$

10 Évolutions successives

→ Énoncé
p. ??

Lycée Ruffié, Limoux

- 1 Augmenter de 1% (respectivement 2%) revient à multiplier par :

$$1 + \frac{1}{100} = 1,01 \text{ (respectivement } 1,02).$$

$$2 \quad c_{\text{global}} = 1,01 \times 1,02 = 1,0302.$$

$$\begin{aligned} 3 \quad t_{\text{global}} &= c_{\text{global}} - 1 \\ &= 1,0302 - 1 \\ &= 0,0302 \\ &= \frac{3,02}{100}. \end{aligned}$$

L'évolution globale est une hausse de 3,02%.

$$4 \quad 20\,000 \times 1,0302 = 20\,604.$$

La ville compte 20 604 habitants en 2025.

11 Taux d'évolution moyen

→ Énoncé
p. ??

Lycée Montaigne, Bordeaux

- 1 Puisque nous connaissons le montant de 2021 (3 000 €), nous allons calculer les années suivantes par multiplication et les années précédentes par division.

- En 2021 la subvention était de 3000 €.
- Entre 2021 et 2022, elle a augmenté de 9%, donc elle a été multipliée par 1,09 soit une subvention de :

$$3\,000 \times 1,09 = 3\,270 \text{ €}.$$

- Entre 2022 et 2023, elle a augmenté de 6%, donc elle a été multipliée par 1,06 soit une subvention de :

$$3\,270 \times 1,06 \approx 3\,466 \text{ €}.$$

- Entre 2020 et 2021, la subvention a été augmentée de 10%, soit un coefficient multiplicateur de 1,1. La subvention en 2020 est donc de :

$$\frac{3\,000}{1,1} \approx 2\,727 \text{ €}.$$

CROISSANCE EXPONENTIELLE • CHAP. 4

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

- Entre 2019 et 2021, la subvention a été augmentée de 15%, soit un coefficient multiplicateur de 1,15. La subvention en 2019 est donc de :

$$\frac{2\,727}{1,15} \approx 2\,371 \text{ €}.$$

- Entre 2018 et 2019, la subvention a été augmentée de 17%, soit un coefficient multiplicateur de 1,17. La subvention en 2019 est donc de :

$$\frac{2\,371}{1,17} \approx 2\,026 \text{ €}.$$

- 2** Le responsable confond la diminution du taux de croissance avec une diminution du montant. Le taux passe de +17% à +6%, donc la subvention augmente moins vite. Cependant, tant que le taux reste positif, le montant de la subvention continue de monter chaque année.

Le club reçoit donc plus d'argent chaque année, pas moins.

- 3** Pour trouver l'évolution globale, on multiplie les coefficients multiplicateurs entre eux :

$$CM_{\text{global}} = 1,17 \times 1,15 \times 1,10 \times 1,09 \times 1,06 \approx 1,71.$$

Le taux d'évolution global est donc :

$$CM_{\text{global}} - 1 \approx 0,71$$

soit une hausse d'environ 71% sur la période.

- 4** De 2018 à 2023 il y a 5 évolutions.

On cherche le taux t tel que $(1+t)^5 = 1,71$.

$$\begin{aligned}(1+t)^5 = 1,71 &\iff 1+t = 1,71^{\frac{1}{5}} \approx 1,1133 \\ &\iff t \approx 0,1133.\end{aligned}$$

Le taux moyen annuel est d'environ 11,33%.

- 5** Si le taux reste bloqué à +6% à partir de 2023, il faut calculer l'évolution sur 9 ans (de 2023 à 2032).

$$\text{Valeur}_{2032} = \text{Valeur}_{2023} \times 1,06^9 = 3\,466 \times 1,06^9 \approx 5\,856.$$

La subvention en 2032 serait d'environ 5 856 €.

12 Pour aller plus loin

➔ Énoncé
p. ??

Lycée Boucher, Paris

- 1** (a) Augmenter de 20%, c'est multiplier par 1,2 donc la raison de la suite (u_n) est $q = 1,2$.

Le nombre de visioconférences était de 30 en 2020 donc :

$$u_0 = 30.$$

CORRIGÉS

(b) D'après le cours, on sait que, pour tout n ,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc :

$$u_n = 30 \times 1,2^n.$$

(c) $2025 = 2020 + 5$ donc :

$$u_5 = 30 \times 1,2^5 \approx 74,65 > 74.$$

Donc en 2025, on a atteint 74 utilisations de la visioconférence.

2 (a) Le tableau complété est le suivant :

Test $U < A$		vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de U	30	36	43	52	62	74	89	107
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7

(b) La valeur affichée en sortie de cet algorithme est la dernière valeur de n , soit 7.

(c) $n = 7$ correspond à $2020 + 7 = 2027$, donc 2027 est l'année à partir de laquelle le nombre annuel de visioconférences dépassera 100.

3 Le coût de l'installation des appareils de visioconférences sera amorti quand le nombre total d'utilisations aura dépassé 400.

Le tableau ci-dessous donne le nombre total de vidéo-conférences :

Nombre annuel	30	36	43	52	62	74	89	107
Nombre total	30	66	109	161	223	297	386	493
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Année	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027

L'installation sera donc amortie à partir de l'année 2027.