

Spécialité mathématiques

Évaluation en fin de première

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

- (1) L'expression $\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{1}{4}$ est égale à :
a. $-\frac{3}{12}$ b. $\frac{3}{7}$ c. $\frac{1}{4}$ d. $\frac{1}{2}$
- (2) Un prix augmente de 25 %, puis baisse de 20 %. Globalement, le prix a :
a. augmenté de 5 % b. stagné c. baissé de 5 % d. augmenté de 45 %
- (3) Pour $a \neq 0$, l'expression $\frac{(a^3)^2}{a^{-4}}$ se simplifie en :
a. a^2 b. a^{10} c. a^{-2} d. a^{24}
- (4) La forme développée de $(3x - 2)^2$ est :
a. $3x^2 - 12x + 4$ b. $9x^2 - 4$ c. $3x^2 - 4$ d. $9x^2 - 12x + 4$
- (5) L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x - 1 > 5x + 3$ est :
a. $] -\infty ; -2[$ b. $] -2 ; +\infty[$ c. $] -\infty ; 2[$ d. $]2 ; +\infty[$
- (6) La solution de l'équation $2x - 5 = 7x + 10$ est :
a. $x = 3$ b. $x = -3$ c. $x = 1$ d. $x = -1$
- (7) La droite passant par $A(0 ; 3)$ et $B(2 ; 7)$ a pour coefficient directeur :
a. 2 b. -2 c. 0,5 d. 4
- (8) 15 % de 60 est égal à :
a. 4 b. 12 c. 9 d. 45
- (9) Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$, alors l'image de -2 est :
a. 0 b. 12 c. 4 d. -8
- (10) Une vitesse de 72 km/h est égale à :
a. 20 m/s b. 7,2 m/s c. 25,9 m/s d. 120 m/s
- (11) Un article coûte 80 €. Son prix passe à 100 €. Le taux d'évolution est de :
a. 20 % b. 25 % c. 80 % d. -20 %
- (12) La droite passant par les points $A(1 ; 3)$ et $B(3 ; 7)$ a pour ordonnée à l'origine :
a. 2 b. 1 c. 3 d. -1

DEUXIÈME PARTIE (14 points)**Exercice 1 (4,5 points)**

Dans une population, 80 % des individus sont vaccinés contre une maladie. Parmi eux, 5 % tombent malades. Parmi ceux qui ne sont pas vaccinés, 30 % tombent malades. On choisit un individu au hasard et on note V l'évènement « l'individu est vacciné » et M l'évènement « l'individu est malade ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'individu soit vacciné et malade.
3. Montrer que $P(M) = 0,1$.
4. Sachant que l'individu est malade, quelle est la probabilité qu'il soit vacciné ? (Donner le résultat sous forme de fraction irréductible).

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère les points $A(1 ; 0)$, $B(3 ; 0)$ et $C(2 ; -1)$.

1. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?
(b) Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
2. (a) Justifier que la fonction du second degré f dont la courbe passe par les points A , B et C est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
(b) Justifier que $y = 2x - 6$ est l'équation réduite de la tangente T à la courbe représentative de f au point B .
(c) Montrer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation cartésienne $4x - 2y + 5 = 0$.

Exercice 3 (4,5 points)

Une population de bactéries compte 1 000 individus à l'instant $n = 0$. On observe que chaque heure, la population augmente de 20 %, mais que 100 bactéries meurent à cause du milieu. On note u_n le nombre de bactéries au bout de n heures.

1. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$.
2. Déterminer la valeur de la population initiale u_0 pour laquelle l'effectif resterait constant chaque heure.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 500$.
(a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2.
(b) Exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de (u_n) puis l'interpréter dans le contexte de cette population de bactéries.

CORRIGÉ

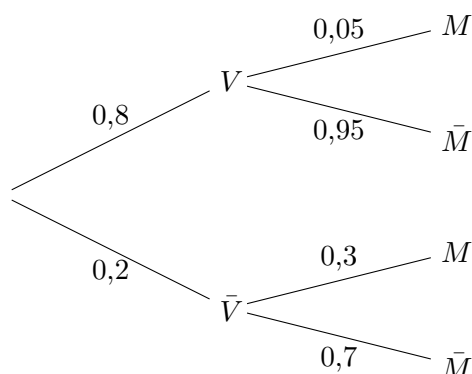
PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES

- (1) Réponse **c** car $\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{8-5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
- (2) Réponse **b** car augmenter de 25 % puis baisser de 20 % revient à multiplier par $1,25 \times 0,8 = 1$.
- (3) Réponse **b** car $\frac{(a^3)^2}{a^{-4}} = \frac{a^6}{a^{-4}} = a^{6-(-4)} = a^{10}$.
- (4) Réponse **d** car $(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$.
- (5) Réponse **a** car $3x-1 > 5x+3 \iff -2x > 4 \iff x < \frac{4}{-2} \iff x < -2$.
- (6) Réponse **b** car $2x-5 = 7x+10 \iff -5x = 15 \iff x = \frac{15}{-5} = -3$.
- (7) Réponse **a** car $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-3}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$.
- (8) Réponse **c** car $15\% \times 60 = 0,15 \times 60 = 9$.
- (9) Réponse **b** car $f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12$.
- (10) Réponse **a** car $72 \text{ km/h} = \frac{72}{3,6} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$.
- (11) Réponse **b** car $t = \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{100-80}{80} = \frac{20}{80} = 0,25 = 25\%$.
- (12) Réponse **b** car le coefficient directeur est $m = \frac{7-3}{3-1} = 2$, et l'ordonnée à l'origine p vérifie $y_A = mx_A + p \iff 3 = 2 \times 1 + p \iff p = 1$.

DEUXIÈME PARTIE

Exercice 1

1. On obtient l'arbre pondéré suivant.



2. On a $P(V \cap M) = 0,8 \times 0,05 = 0,04$.
3. D'après la formule des probabilités totales, on a :
 $P(M) = P(V \cap M) + P(\bar{V} \cap M) = 0,04 + 0,2 \times 0,3 = 0,04 + 0,06 = 0,1$.
4. On a $P_M(V) = \frac{P(V \cap M)}{P(M)} = \frac{0,04}{0,1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Exercice 2

1. (a) On a $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-1) \times 1 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$.
 Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, on peut donc en déduire que le triangle ABC est rectangle en C .
- (b) Le centre I du cercle de diamètre $[AB]$ est le milieu de $[AB]$: $I \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{1+3}{2} ; \frac{0+0}{2} \right) = (2 ; 0)$.
 Son rayon R est $\frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(3-1)^2 + (0-0)^2} = \frac{2}{2} = 1$.
 L'équation du cercle est donc $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2$, soit $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

2. (a) Les points $A(1 ; 0)$ et $B(3 ; 0)$ appartiennent à la courbe de f , donc 1 et 3 sont les racines de $f(x)$. On en déduit la forme factorisée $f(x) = a(x - 1)(x - 3)$.
Comme $C(2 ; -1)$ appartient à la courbe, on a $f(2) = -1 \iff a(2 - 1)(2 - 3) = -1 \iff -a = -1 \iff a = 1$.
D'où $f(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$.
- (b) On a $f'(x) = 2x - 4$ donc $f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2$. L'équation de la tangente T au point $B(3 ; 0)$ est donnée par $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$, soit $y = 2(x - 3) + 0 = 2x - 6$.
- (c) La droite d a pour équation $4x - 2y + 5 = 0 \iff 2y = 4x + 5 \iff y = 2x + 2,5$.
Le coefficient directeur de T est 2 et celui de d est également 2. Les deux droites ayant le même coefficient directeur, elles sont parallèles.

Exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 0,2u_n - 100 = 1,2u_n - 100$ car augmenter de 20 % revient à multiplier par 1,2.
2. La population est constante si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n , soit $u_0 = 1,2u_0 - 100 \iff 0,2u_0 = 100 \iff u_0 = \frac{100}{0,2} = 500$.
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = (1,2u_n - 100) - 500 = 1,2u_n - 600 = 1,2(u_n - 500) = 1,2v_n$.
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,2$.
- (b) Le premier terme est $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$.
Puisque (v_n) est géométrique, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n$.
On en déduit que $u_n = v_n + 500 = 500 \times 1,2^n + 500$.
4. Comme $1,2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,2^n = +\infty$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
La population de bactéries va donc croître indéfiniment.