

Combinatoire et dénombrement

|                                                                                                     | Ordre | Modèle             | Exemples                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|--------------------|----------------------------|
| Permutation                                                                                         | Oui   | Tirage sans remise | Anagramme *                |
| <i>p</i> -liste                                                                                     | Oui   | Tirage avec remise | Digicode                   |
| Arrangement <i>A</i> <sub><i>n</i></sub> <sup><i>p</i></sup>                                        | Oui   | Tirage sans remise | Podium d’une course        |
| Combinaison <span><span>    ( n p   )   {\displaystyle \left({n \choose p} \right)}  </span></span> | Non   | Tirage sans remise | Main dans un jeu de cartes |

\* Permutation des lettres d’un mot formant un mot de sens différent.

Probabilités

● Épreuve de Bernoulli

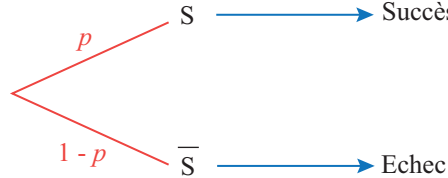
Expérience aléatoire à deux issues : « succès » (S) et « échec » (



S
¯


{\displaystyle {\overline {S}}}

).



● Schéma de Bernoulli

Succession d’épreuves de Bernoulli indépendantes.

*X* (nombre de succès à l’issue de cette succession) suit la loi binomiale *B*(*n*; *p*).

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$E(X)=np$$

$$V(X)=np(1-p)$$

$$\sigma (X)=\sqrt {np(1-p)}$$

● Somme de variables aléatoires indépendantes

$$E(aX+Y)=aE(X)+E(Y)$$

$$V(aX+Y)=a^2V(X)+V(Y)$$

● Concentration et loi des grands nombres

*a* et *δ* sont deux réels strictement positifs.

*X*<sub>1</sub>, ..., *X*<sub>*n*</sub> *n* variables aléatoires indépendantes d’espérance *μ* et d’écart-type *σ*.

|                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Inégalité de Markov              | <span><span>    P ( X ≥<!-- ≥ --> a ) ≤<!-- ≤ -->   E ( X ) a     {\displaystyle P(X\geq a)\leq {\frac {E(X)}{a}}}  </span></span>                                                                                                                                                                                        |
| Inégalité de Bienaymé-Tchebychev | <span><span>    P (   X −<!-- − --> E ( X )   ≥<!-- ≥ --> δ<!-- δ --> ) ≤<!-- ≤ -->   V ( X )  δ<!-- δ -->  2     {\displaystyle P( X-E(X) \geq \delta )\leq {\frac {V(X)}{\delta ^{2}}}}  </span></span>                                                                                                                 |
| Inégalité de concentration       | <span><span>    P (      X  1   + ⋯<!-- ⋯ --> +  X  n   n   −<!-- − --> μ<!-- μ -->   ≥<!-- ≥ --> δ<!-- δ --> ) ≤<!-- ≤ -->   σ<!-- σ -->  2   n  δ<!-- δ -->  2     {\displaystyle P\left(\left {\frac {X_{1}+\cdots +X_{n}}{n}}-\mu \right \geq \delta \right)\leq {\frac {\sigma ^{2}}{n\delta ^{2}}}}  </span></span> |
| Loi faible des grands nombres    | <span><span>     lim  n →<!-- → --> + ∞<!-- ∞ -->     P (      X  1   + ⋯<!-- ⋯ --> +  X  n   n   −<!-- − --> μ<!-- μ -->   ≥<!-- ≥ --> δ<!-- δ --> ) = 0   {\displaystyle \lim _{n\rightarrow +\infty }P\left(\left {\frac {X_{1}+\cdots +X_{n}}{n}}-\mu \right \geq \delta \right)=0}  </span></span>                   |

Suites

Pour *r* ∈ ℝ, *q* ∈ ℝ (avec *q* ≠ 1), on a :

| Suite arithmétique de raison <i>r</i>                                                                                                                                                                      | Suite géométrique de raison <i>q</i>                                                                                                                                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <span><span>     u  n + 1   =  u  n   + r   {\displaystyle u_{n+1}=u_{n}+r}  </span></span>                                                                                                                | <span><span>     u  n + 1   =  q  u  n     {\displaystyle u_{n+1}=qu_{n}}  </span></span>                                                                                                                                        |
| <span><span>     u  n   =  u  0   + n r   {\displaystyle u_{n}=u_{0}+nr}  </span></span>                                                                                                                   | <span><span>     u  n   =  u  0   ×<!-- × -->  q  n     {\displaystyle u_{n}=u_{0}\times q^{n}}  </span></span>                                                                                                                  |
| <span><span>     u  0   +  u  1   + ⋯<!-- ⋯ --> +  u  n   = ( n + 1 ) ×<!-- × -->    u  0   +  u  n   2     {\displaystyle u_{0}+u_{1}+\cdots +u_{n}=(n+1)\times {\frac {u_{0}+u_{n}}{2}}}  </span></span> | <span><span>     u  0   +  u  1   + ⋯<!-- ⋯ --> +  u  n   =  u  0   ×<!-- × -->    1 −<!-- − -->  q  n + 1    1 −<!-- − --> q     {\displaystyle u_{0}+u_{1}+\cdots +u_{n}=u_{0}\times {\frac {1-q^{n+1}}{1-q}}}  </span></span> |
| <span><span>    1 + 2 + 3 + ⋯<!-- ⋯ --> + n =   n ( n + 1 ) 2     {\displaystyle 1+2+3+\cdots +n={\frac {n(n+1)}{2}}}  </span></span>                                                                      | <span><span>    1 +  q  +  q  2   + ⋯<!-- ⋯ --> +  q  n   =    1 −<!-- − -->  q  n + 1    1 −<!-- − --> q     {\displaystyle 1+q+q^{2}+\cdots +q^{n}={\frac {1-q^{n+1}}{1-q}}}  </span></span>                                   |

● Principe de récurrence

(*P*<sub>*n*</sub>) est une propriété dépendant d’un entier *n* et *n*<sub>0</sub> un entier quelconque.

Si (*P*<sub>*n*<sub>0</sub></sub>) est vraie et si, pour un entier *k* ≥ *n*<sub>0</sub>, (*P*<sub>*k*</sub>) ⇒ (*P*<sub>*k*+1</sub>),

alors (*P*<sub>*n*</sub>) est vraie pour tout *n* ≥ *n*<sub>0</sub>.

● Théorèmes de comparaison

Si, pour tout entier *n* ≥ *n*<sub>0</sub>, *u*<sub>*n*</sub> ≤ *v*<sub>*n*</sub> et 




lim

n
→
+
∞



v

n


=
−
∞


{\displaystyle \lim \_{n\rightarrow +\infty }v\_{n}=-\infty }

, alors 




lim

n
→
+
∞



u

n


=
−
∞


{\displaystyle \lim \_{n\rightarrow +\infty }u\_{n}=-\infty }

.

Si, pour tout entier *n* ≥ *n*<sub>0</sub>, *u*<sub>*n*</sub> ≤ *v*<sub>*n*</sub> et 




lim

n
→
+
∞



u

n


=
+
∞


{\displaystyle \lim \_{n\rightarrow +\infty }u\_{n}=+\infty }

, alors 




lim

n
→
+
∞



v

n


=
+
∞


{\displaystyle \lim \_{n\rightarrow +\infty }v\_{n}=+\infty }

.

● Théorème des gendarmes

Si, pour tout entier *n* ≥ *n*<sub>0</sub>, *v*<sub>*n*</sub> ≤ *u*<sub>*n*</sub> ≤ *w*<sub>*n*</sub> et 




lim

n
→
+
∞



v

n


=


lim

n
→
+
∞



w

n


=
ℓ


{\displaystyle \lim \_{n\rightarrow +\infty }v\_{n}=\lim \_{n\rightarrow +\infty }w\_{n}=\ell }

,

alors 




lim

n
→
+
∞



u

n


=
ℓ


{\displaystyle \lim \_{n\rightarrow +\infty }u\_{n}=\ell }

, où *ℓ* est un réel.

● Limites de *q*<sup>*n*</sup>

| <i>q</i> < −1                                                                                                                                             | <i>q</i>   < 1                                                                                                                         | <i>q</i> = 1                                                                                                                           | <i>q</i> > 1                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <span><span>     lim  n →<!-- → --> + ∞<!-- ∞ -->    q  n   n'existe pas   {\displaystyle \lim _{n\rightarrow +\infty }q^{n}n'existe pas}  </span></span> | <span><span>     lim  n →<!-- → --> + ∞<!-- ∞ -->    q  n   = 0   {\displaystyle \lim _{n\rightarrow +\infty }q^{n}=0}  </span></span> | <span><span>     lim  n →<!-- → --> + ∞<!-- ∞ -->    q  n   = 1   {\displaystyle \lim _{n\rightarrow +\infty }q^{n}=1}  </span></span> | <span><span>     lim  n →<!-- → --> + ∞<!-- ∞ -->    q  n   = + ∞<!-- ∞ -->   {\displaystyle \lim _{n\rightarrow +\infty }q^{n}=+\infty }  </span></span> |

● Théorème de convergence

Toute suite croissante et majorée converge.  
Toute suite décroissante et minorée converge.  
Toute suite monotone et bornée converge.

Limites de fonctions

● Formes indéterminées

|                                                                                                                          |                                                                                                                                         |                                                                                                                               |                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| « <span> </span> <span><span>    ∞<!-- ∞ -->   0   {\displaystyle {\frac {\infty }{0}}}  </span></span> <span> </span> » | « <span> </span> <span><span>    ∞<!-- ∞ --> −<!-- − --> ∞<!-- ∞ -->   {\displaystyle \infty -\infty }  </span></span> <span> </span> » | « <span> </span> <span><span>    0 ×<!-- × --> ∞<!-- ∞ -->   {\displaystyle 0\times \infty }  </span></span> <span> </span> » | « <span> </span> <span><span>    0 0   {\displaystyle {\frac {0}{0}}}  </span></span> <span> </span> » |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|

● Asymptotes

