

Devoir de Mathématiques n°1

Il sera tenu compte de la présentation, du bon respect des consignes et de la clarté des justifications

Exercice 1 : Tout résultat non justifié ne sera pas évalué.

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$a. z_1 = 3 - 2i(5 + i) \quad b. z_2 = (4 + 3i)^2 \quad c. z_3 = \frac{1}{1+i} \quad d. z_4 = \frac{3-i}{i-2}$$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : (Donner la forme algébrique des solutions)

$$a. 4i + 3 - 2z = 0$$

$$b. i\bar{z} + 4 + 3i = 0$$

$$c. (-1+i)\bar{z} + 2z = 5 + 9i$$

$$d. 3z^2 + 12z + 39 = 0$$

Exercice 3 :

Soit z un nombre complexe non nul. On pose $Z = (3-i)z + (3i - \bar{z})i$

1. Ecrire $\bar{Z}$ en fonction de z et de $\bar{z}$.

2. En posant $z = x + yi$, démontrer que $Z = 3x - 3 + (3y - 2x)i$

3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

a. Z est un nombre réel.

b. Z est un nombre imaginaire pur.

Correction du devoir de Mathématiques n°1

Exercice 1 :

a. $z_1 = 3 - 2i(5 + i) = 3 - 10i + 2 = 5 - 10i$

b. $z_2 = (4 + 3i)^2 = 16 + 24i - 9 = 7 + 24i$

c. $z_3 = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

d. $z_4 = \frac{3-i}{i-2} = \frac{(3-i)(-i-2)}{1^2+(-2)^2} = \frac{-3i-6-1+2i}{5} = \frac{-7}{5} - \frac{1}{5}i$

Exercice 2 :

a. $4i + 3 - 2z = 0 \Leftrightarrow 4i + 3 = 2z \Leftrightarrow z = 2i + 1,5. \quad S = \{1,5 + 2i\}$

b. $i\bar{z} + 4 + 3i = 0 \Leftrightarrow i\bar{z} = -4 - 3i \Leftrightarrow -\bar{z} = (-4 - 3i)i \Leftrightarrow -\bar{z} = -4i + 3 \Leftrightarrow \bar{z} = 4i - 3 \Leftrightarrow z = -4i - 3.$

$S = \{-3 - 4i\}$

c. $(-1+i)\bar{z} + 2z = 5 + 9i$: On pose $z = x + iy$ alors

$(-1+i)\bar{z} + 2z = 5 + 9i \Leftrightarrow (-1+i)(x-iy) + 2(x+iy) = 5 + 9i \Leftrightarrow x + y + (x+3)i = 5 + 9i.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$. On en déduit (différence membres à membres) que $-2y = -4$ c'est-à-dire

$y = 2$ et que $x = 5 - y = 5 - 2 = 3. \quad S = \{3 + 2i\}$

d. $3z^2 + 12z + 39 = 0$: On pose $\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times 39 = -324 < 0$ donc l'équation admet deux

solutions complexes conjuguées. $z_1 = \frac{-12 - i\sqrt{324}}{2 \times 3} = -2 - 3i$ et $z_2 = \bar{z}_1 = -2 + 3i.$

$S = \{-2 - 3i ; -2 + 3i\}$

Exercice 3 :

1. $Z = (3-i)z + (3i-\bar{z})i$:

$\bar{Z} = \overline{(3-i)z + (3i-\bar{z})i} = \overline{(3-i)}\bar{z} + \overline{(3i-\bar{z})}\bar{i} = (3+i)\bar{z} + (\bar{3i}-\bar{\bar{z}})\bar{i} = (3+i)\bar{z} + (3i-\bar{z}) \times (-i) = (3+i)\bar{z} - (-3i-z)i$

2. On pose $z = x + iy$ alors

$Z = (3-i)(x+iy) + (3i-(x-yi))i = 3x + 3yi - xi + y - 3 - xi + -y = 3x - 3 + (3y - 2x)i$

3. a. Z est un nombre réel $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow 3y - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1,5y.$

$S = \{1,5y + yi ; y \in \mathbb{R}\}$

Remarque : On a aussi $3y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x$ donc $S = \left\{x + \frac{2}{3}xi ; x \in \mathbb{R}\right\}$

b. Z est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$S = \{1 + yi ; y \in \mathbb{R}\}$

Correction du devoir de Mathématiques n°1

Exercice 1 :

a. $z_1 = 3 - 2i(5 + i) = 3 - 10i + 2 = 5 - 10i$

b. $z_2 = (4 + 3i)^2 = 16 + 24i - 9 = 7 + 24i$

c. $z_3 = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

d. $z_4 = \frac{3-i}{i-2} = \frac{(3-i)(-i-2)}{1^2+(-2)^2} = \frac{-3i-6-1+2i}{5} = \frac{-7-i}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$

Exercice 2 :

a. $4i + 3 - 2z = 0 \Leftrightarrow 4i + 3 = 2z \Leftrightarrow z = 2i + 1,5. \quad S = \{1,5 + 2i\}$

b. $i\bar{z} + 4 + 3i = 0 \Leftrightarrow i\bar{z} = -4 - 3i \Leftrightarrow -\bar{z} = (-4 - 3i)i \Leftrightarrow -\bar{z} = -4i + 3 \Leftrightarrow \bar{z} = 4i - 3 \Leftrightarrow z = -4i - 3.$

$S = \{-3 - 4i\}$

c. $(-1+i)\bar{z} + 2z = 5 + 9i$: On pose $z = x + iy$ alors

$(-1+i)\bar{z} + 2z = 5 + 9i \Leftrightarrow (-1+i)(x-iy) + 2(x+iy) = 5 + 9i \Leftrightarrow x + y + (x+3)i = 5 + 9i.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$. On en déduit (différence membres à membres) que $-2y = -4$ c'est-à-dire

$y = 2$ et que $x = 5 - y = 5 - 2 = 3. \quad S = \{3 + 2i\}$

d. $3z^2 + 12z + 39 = 0$: On pose $\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times 39 = -324 < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées. $z_1 = \frac{-12 - i\sqrt{324}}{2 \times 3} = -2 - 3i$ et $z_2 = \bar{z}_1 = -2 + 3i.$

$S = \{-2 - 3i ; -2 + 3i\}$

Exercice 3 :

1. $Z = (3-i)z + (3i-\bar{z})i$:

$\bar{Z} = \overline{(3-i)z + (3i-\bar{z})i} = \overline{(3-i)}\bar{z} + \overline{(3i-\bar{z})}\bar{i} = (3+i)\bar{z} + (\bar{3i}-\bar{\bar{z}})\bar{i} = (3+i)\bar{z} + (\bar{3i}-z)\bar{i} = (3+i)\bar{z} - (-3i-z)i$

2. On pose $z = x + iy$ alors

$Z = (3-i)(x+iy) + (3i-(x-yi))i = 3x + 3yi - xi + y - 3 - xi + -y = 3x - 3 + (3y - 2x)i$

3. a. Z est un nombre réel $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow 3y - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1,5y.$

$S = \{1,5y + yi ; y \in \mathbb{R}\}$

Remarque : On a aussi $3y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x$ donc $S = \left\{x + \frac{2}{3}xi ; x \in \mathbb{R}\right\}$

b. Z est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$S = \{1 + yi ; y \in \mathbb{R}\}$