

- De la même façon, définissons :

$$G_1(x) = \int_1^x \ln(t) dt.$$

G_1 est dérivable et a pour dérivée $\ln$ et :

$$G(x) = G_1(x^2) - G_1(\sqrt{x}).$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2x G_1'(x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}} G_1'(\sqrt{x}) \\ &= 2x \ln(x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\sqrt{x}), \end{aligned}$$

soit :

$$G'(x) = 4 \left(x - \frac{1}{16\sqrt{x}} \right) \ln x.$$

MÉTHODE

Les fonctions définies par une intégrale sont très délicates à étudier. On se ramènera à chaque fois au théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, la fonction

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

puis on utilisera la définition de la primitive d'une fonction.

On se souviendra que pour dériver une fonction du type : $x \mapsto G(u(x))$ il est indispensable d'utiliser le théorème de dérivabilité des fonctions composées.

15 Valeur approchée d'une intégrale

Lycée du Parc, Lyon

Énoncé
p. 245

- 1 La fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et,

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \quad f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) + e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$$

$$\text{donc } \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \quad f'(x) \geq 0.$$