

SUITES NUMÉRIQUES • CHAP. 1

2 Nous allons démontrer par récurrence l'assertion :

$$\mathcal{P}(n) : \left[(*) v_n = 2^{n+1} - 3^n \quad \text{et} \quad (**) v_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1} \right]$$

- Pour $n = 0$, on a $2^{n+1} - 3^n = 2 - 1 = 1 = v_0$ d'où (*).
Enfin, $2^{n+2} - 3^{n+1} = 4 - 3 = 1 = v_1$ qui est (**): on a vérifié $\mathcal{P}(0)$.
- Supposons l'assertion $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain entier naturel k .
On sait déjà: $v_{k+1} = 2^{k+2} - 3^{k+1}$ (d'après l'hypothèse de récurrence),
qui est la partie (*) de l'assertion $\mathcal{P}(k+1)$.
On calcule :

$$\begin{aligned} v_{k+2} &= 5v_{k+1} - 6v_k = 5(2^{k+2} - 3^{k+1}) - 6(2^{k+1} - 3^k) \\ &= 5 \times 2^{k+2} - 5 \times 3^{k+1} - 6 \times 2^{k+1} + 6 \times 3^k \\ &= 5 \times 2^{k+2} - 5 \times 3^{k+1} - 3 \times 2^{k+2} + 2 \times 3^{k+1} \\ &= 2 \times 2^{k+2} - 3 \times 3^{k+1} \\ &= 2^{k+3} - 3^{k+2} \end{aligned}$$

qui est (**) au rang $(k+1)$. On a ainsi vérifié $\mathcal{P}(k+1)$.

On en déduit, d'après le principe de récurrence, que, pour tout entier naturel n , $v_n = 2^{n+1} - 3^n$.

7 Suite convergente

→ Énoncé
p. 9

Lycée de l'Emperi, Salon-de-Provence

Pour tout $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition :

$$u_n = (1+k)(1+k^2)(1+k^3) \cdots (1+k^{n-1}).$$

- Le membre de gauche de l'égalité est :

$$u_1 = (1+k^0)u_0 = 2,$$

et le membre de droite est réduit à :

$$(1+k^{1-1}) = 1+1 = 2.$$

Ainsi, la propriété est vraie pour $n = 1$.

- Supposons que la propriété soit vraie pour un entier p non nul arbitrairement fixé.

On sait par hypothèse que $u_{p+1} = (1+k^p)u_p$. On remplace alors u_p dans cette expression par sa valeur. Il vient :

$$u_{p+1} = (1+k^p)(1+k)(1+k^2)(1+k^3) \cdots (1+k^{p-1}).$$

Donc $\mathcal{P}_p \Rightarrow \mathcal{P}_{p+1}$.

Par conséquent, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

COURS

INTERROS

CORRIGÉS