

SUITES NUMÉRIQUES • CHAP. 1

COURS

INTERROS

CORRIGÉS

$$\begin{aligned}\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{7}{\ell} \right) &\iff 2\ell = \ell + \frac{7}{\ell} \\ &\iff \ell^2 = 7 \\ &\iff \ell = \sqrt{7} \text{ (car } u_n > 0 \text{)}.\end{aligned}$$

3 Pour tout n ,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - \sqrt{7} &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{7}{u_n} \right) - \sqrt{7} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_n^2 + 7 - 2u_n\sqrt{7}}{u_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}.\end{aligned}$$

4 (a) $u_0 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} \approx 0,354$, et $d_0 = 1$ donc $u_0 - \sqrt{7} \leq d_0$.
Supposons que pour une valeur de k fixée, $u_k - \sqrt{7} \leq d_k$.
Montrons qu'alors $u_{k+1} - \sqrt{7} \leq d_{k+1}$.

$$\begin{aligned}u_k - \sqrt{7} \leq d_k &\Rightarrow (u_k - \sqrt{7})^2 \leq d_k^2 \text{ après avoir élevé au carré} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} (u_k - \sqrt{7})^2 \leq \frac{1}{2} d_k^2 \text{ après avoir divisé par 2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} (u_k - \sqrt{7})^2 \leq d_{k+1} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{(u_k - \sqrt{7})^2}{u_k} \leq \frac{d_{k+1}}{u_k} \text{ après avoir divisé par } u_k \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{(u_k - \sqrt{7})^2}{u_k} \leq d_{k+1}.\end{aligned}$$

La dernière inégalité provient du fait que $u_k \geq \sqrt{7} > 1$.
On a donc bien $u_{k+1} - \sqrt{7} \leq d_{k+1}$. L'hérédité est alors prouvée.

Donc, pour tout entier naturel n , $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

(b) $d_5 \leq 10^{-9}$. On a :

$$u_5 - \sqrt{7} \leq d_5 \leq 10^{-9}.$$

Donc u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.