

13 Avec des représentations graphiques

Énoncé
p. 88

Lycée Virlogeux, Riom

- 1 (a) L'équation $f'(x) = 0$ a trois solutions a , b et c .
 $a \approx 0,2$; $b \approx 2,2$ et $c \approx 3,6$.
- (b) $f'(x) > 0$ si x appartient à $]a; b[\cup]c; \frac{9}{2}]$, et $f'(x) < 0$ si x appartient à $[-\frac{1}{2}; a[\cup]b; c[$.
- 2 (a) Dans le tableau de variations de f' suivant, on a rajouté le signe de $f''(x)$, f'' étant la fonction dérivée de la fonction f' .

x	$-\frac{1}{2}$	1	3	$\frac{9}{2}$		
$f'(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		
Signe de $f''(x)$		+	0	-	0	+

- (b) D'après le tableau de signes de f'' , f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 1$ et $x = 3$. Il y a donc deux points d'inflexion d'abscisses 1 et 3.
- 3 D'après la question 1.b., f' est négative, puis positive, puis négative, puis positive.
 Donc f doit être décroissante jusqu'à a , croissante entre a et b , décroissante entre b et c puis finalement croissante.
 C'est la courbe $\mathcal{C}_3$ qui convient.
 Quant à f'' , elle doit être positive jusqu'à 1, négative entre 1 et 3, puis à nouveau positive.
 C'est la courbe $\mathcal{C}_1$ qui convient.

14 Étude générale

Énoncé
p. 88

Lycée Notre-Dame de Boulogne, Boulogne-Billancourt

- 1 $g(x) = -x^2 + 3x - 1$ est un polynôme de degré 2, dont le discriminant est :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 5 > 0$$

donc il admet deux racines :

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \notin [0; 2[\quad \text{et} \quad x_2 = \alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \in [0; 2[.$$

On en déduit alors le tableau de signes suivant :

x	0	α	2
$g(x)$	-	0	+

- 2 $\lim_{x \rightarrow 2} (2 - x) = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x}{2 - x}} = +\infty$.

DÉRIVATION ET CONVEXITÉ • CHAP. 3

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x - 1) = 1 > 0$ donc, par produit, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$.

On peut alors en déduire que la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}$.

3 $f(x) = a(x) \times b(x)$, avec $a(x) = (x - 1)$ et $b(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$.

- $a'(x) = 1$.

- $b(x) = \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = \frac{x}{2-x}$ et :

$$u'(x) = \frac{1(2-x) - x \times (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} b'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{2}{(2-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} \\ &= \frac{1}{(2-x)^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}}. \end{aligned}$$

- On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} f'(x) &= a'(x)b(x) + a(x)b'(x) \\ &= 1 \times \sqrt{\frac{x}{2-x}} + (x-1) \times \frac{1}{(2-x)^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}} \\ &= \frac{(2-x)^2 \times \frac{x}{2-x} + x-1}{(2-x)^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}} \\ &= \frac{(2-x)x + x-1}{(2-x)^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}} \\ &= \frac{-x^2 + 3x - 1}{(2-x)^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}} \\ &= \frac{g(x)}{(2-x)^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$, d'où le tableau suivant :

x	0	α	2
$f'(x)$	-	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$

COURS

INTERROS

CORRIGÉS